Les espaces de Lebesgue, L^1, L^p, L^∞

Soient f et g deux fonctions réelles mesurables sur $\mathbb{R}^N$ telles que $f(x) = g(x)$ pour tous les x n'appartenant pas à un ensemble négligeable. On dit alors que f et g sont égales presque partout. On considère la relation $f = g$ presque partout : c'est une relation d'équivalence. On identifiera dans ce chapitre et les suivants chaque fonction f et sa classe d'équivalence. Il est habituel dans ce cas de dire que "f est définie presque partout". Toutes les propriétés des fonctions que nous allons considérer sont des propriétés qui portent sur l'intégrale de fonctions définies presque partout. Cette intégrale ne dépend pas de l'élément de la classe choisi.

Définition 3.1 *On appelle, pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions définies presque partout et telles que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx < \infty.$$

On appelle $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions définies presque partout et telles qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ pour presque tout x. La plus petite constante C pour laquelle cette relation est vraie s'appelle le "sup essentiel" de $|f(x)|$ et on le note $||f||_{L^\infty}$. On dit que f est "essentiellement bornée."

$$||f||_{L^1} = \int |f(x)|dx \text{ et } ||f||_{L^\infty} = \text{supess}_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|.$$

On note ces normes $||f||_1$ et $||f||_\infty$. On va aussi poser pour $1 < p < \infty$

$$||f||_p = ||f||_{L^p} = (\int |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}},$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$

Théorème 3.1 *(Inégalité de Hölder) Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$, la fonction fg est sommable et*

$$\int |fg| \leq ||f||_p ||g||_{p'}.$$

Théorème 3.2 $L^p(\mathbb{R}^N)$ *est un espace vectoriel et $||f||_p$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Proposition 3.1 Convergence dominée dans L^p. *Si $f_n \to f$ p.p. et s'il existe un chapeau intégrable $g \in L^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ tel que $|f_n| \leq g$ p.p., alors f_n converge vers f dans L^p.*

Démonstration On pose $h_n = |f_n - f|^p$. Alors $|h_n| \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p |g|^p$ p.p. car $|f_n| \leq g$ p.p. et, en passant à la limite simple, $|f| \leq g$ presque partout. On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée à h_n et conclure que $h_n \to 0$. $\circ$

Lemme 3.1 (Fatou dans L^p) *Prenons $1 \leq p \leq +\infty$. Soit f_k une suite de fonctions telles que $||f_k||_{L^p} \leq c$, et que $f_k(x)$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$. Alors f appartient aussi à L^p et $||f||_p \leq \liminf_k ||f_k||_p$.*

Démonstration En appliquant le lemme de Fatou, on a

$$c \geq \liminf \int |f_k|^p \geq \int \liminf |f_k(x)|^p = \int |f(x)|^p.$$

Le cas $p = +\infty$ se traite aisément. $\circ$

Théorème 3.3 *Les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$, $(1 \leq p \leq +\infty)$ sont des espaces de Banach.*

Théorème 3.4 *Les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration La propriété est déja connue pour $p = 1$. Dans le cas général, on commence par montrer que l'on peut approcher une fonction f de L^p par des fonctions bornées et à support compact. L'approximation se fait par simple troncature : on pose $f_k(x) = f(x)$ si $||x|| \leq k$ et $|f(x)| \leq k$, $f_k(x) = 0$ sinon. La suite $f_k(x)$ a $f(x)$ pour chapeau intégrable dans L^p et tend presque partout vers 0. Par le théorème de Lebesgue dans L^p (Proposition 3.1), on obtient $f_k \rightarrow f$ dans L^p.

Reste à montrer que si une fonction f est bornée ($|f| \leq k$) et à support compact ($|f(x)| = 0$ si $||x|| \geq k$), alors elle est approchable dans L^p par des fonctions continues. Mais comme $f \in L^1$, il existe une suite de fonctions continues et à support compact f_n convergeant vers f dans L^1 (Propriété 2.1). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite f_n converge presque partout vers f (réciproque du théorème de Lebesgue). Utilisons une fonction g continue et à support compact valant 1 sur $B(0, k)$. La suite de fonctions $h_n = g \max(-k,\ \min(k,\ f_n))$ est encore continue, converge presque partout vers f et a la fonction $k|g|$ comme chapeau intégrable dans L^p. Elle converge donc vers f dans tous les L^p tels que $1 \leq p < \infty$. $\circ$

Corollaire 3.1 *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telle que pour toute fonction continue à support compact $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ on ait $\int f(x)u(x) = 0$. Alors $f = 0$ p.p.*

Démonstration En reprenant exactement le même raisonnement que dans la démonstration précédente, on voit qu'il existe pour toute boule $B(0,R) \subset \mathbb{R}^N$ une suite $u_n \in \mathcal{C}_c(B(0,R+1))$ qui converge vers Signe(f) presque partout dans $B(0,R)$, vers zéro ailleurs, et vérifie $|u_n| \leq 1$. Il vient alors par le théorème de Lebesgue,

$$0 = \int_{B(0,R+1)} f(x)u_n(x) \to \int_{B(0,R)} f(x)\text{Signe}(f(x)) = \int_{B(0,R)} |f(x)|dx.$$

Donc $f = 0$.

Théorème 3.5 *Pour tout* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, *on a*

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p dx = 0.$$

Démonstration Cette propriété de "continuité en moyenne est vraie pour les fonctions continues à support compact car elles sont uniformément continues et on la déduit aisément pour une fonction arbitraire de $L^p(\mathbb{R}^N)$ en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c$ dans L^p (théorème 3.4).

$\circ$

3.2 Convolution, approximation et régularisation des fonctions de L^p

Théorème 3.6 et définition *Si f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors le produit de convolution $f * g$ est défini par*

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy,$$

la fonction de y figurant sous le signe somme étant sommable pour presque tout x. En outre, la fonction $f * g$ appartient à L^1 et on a

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$

Démonstration On montre d'abord en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli et le théorème de changement de variable que la fonction $|f(x-y)g(y)|$ est sommable. En effet,

$$\int\int |f(x-y)g(y)|dxdy = \int |g(y)|(\int |f(x-y)|dx)dy =$$

$$\int |g(y)|(\int |f(x)|dx)dy = ||f||_{L^1}||g||_{L^1}.$$

La fonction $f(x-y)g(y)$ est donc sommable sur $\mathbb{R}^{2N}$ et le théorème de Fubini assure que la fonction $y \to f(x-y)g(y)$ est sommable pour presque tout x et que la fonction alors définie presque partout par $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ est elle-même sommable sur $\mathbb{R}^N$. On a finalement

$$||f * g||_{L^1} = \int |f * g|(x)dx \leq \int |g(y)|(\int |f(x-y)|dx)dy = ||f||_{L^1}||g||_{L^1}.$$

Théorème 3.7 (régularisation par convolution) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et soit g une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}^N$. Alors la fonction $f*g$ définie en tout point par*

$$f * g(x) = \int g(x-y)f(y)dy$$

est continue et bornée. Si de plus les dérivées partielles de g existent et sont continues et bornées jusqu'à l'ordre $k \in \mathbb{N}$, il en est de même pour $f*g$ et l'on a

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_j} = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2(f*g)}{\partial x_j \partial x_k} = f * \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}, \quad etc.$$

Démonstration On remarque d'abord que la fonction $y \to g(x-y)f(y)$ est sommable pour tout x. En effet, $|g(x-y)f(y)| \leq ||g||_\infty |f(y)|$. La continuité de $f*g(x)$ découle du théorème de Lebesgue. En effet, si $x_n \to x$, alors $g(x_n - y)f(y)$ tend partout vers $g(x-y)f(y)$ et $||g||_\infty |f(y)|$ est chapeau intégrable. Donc

$$(f*g)(x_n) = \int g(x_n - y)f(y)dy \to \int g(x-y)f(y)dy = (f*g)(x).$$

Si g est dérivable par rapport à x_j et de dérivée continue et bornée, appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme. On a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g(x-y)f(y)) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(x-y)f(y)$$

et cette fonction est majorée en module par $||\frac{\partial g}{\partial x_j}||_\infty |f(y)|$, qui est indépendante de x et sommable. Le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique donc et donne bien $\frac{\partial(f*g)}{\partial x_j} = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}$. Ceci montre le résultat pour $k=1$. Ensuite, il suffit d'itérer puisque qu'on peut appliquer ce résultat au couple formé de f et d'une dérivée première de g, ce qui prouve le théorème pour $k=2$, etc. $\circ$

Définition 2.6 *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}^N$. *On appelle support de* f *et on note* $\text{Support}(f)$ *le complémentaire du plus grand ouvert* O *tel que* $f(x) = 0$ *presque partout sur* O. *Le support de* f *est donc un fermé. S'il est de plus borné, on dit que* f *est à support compact.*

Proposition 3.2 *Soient* f *et* g *deux fonctions telles que* $(f * g)(x)$ *soit défini pour presque tout* x. *(C'est en particulier le cas si* f *et* g *sont dans* L^1, *mais il y a bien d'autres cas où l'intégrale définissant la convolution a un sens, par exemple si* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *et* $g_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$.*) Alors*

$$\text{Support}(f * g) \subset \overline{\text{Support}(f) + \text{Support}(g)}. \tag{3.6}$$

Démonstration Soit $x \notin \text{Support}(f)+\text{Support}(g)$, alors $(x-\text{Support}(f))\cap\text{Support}(g) = \emptyset$ et donc

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int_{(x-\text{Support}(f))\cap\text{Support}(g)} f(x-y)g(y)dy = 0.$$

Donc $(f * g)(x) = 0$ en tout point n'appartenant pas à $\text{Support}(f) + \text{Support}(g)$ et donc aussi en tout point n'appartenant pas à sa fermeture $\overline{\text{Support}(f) + \text{Support}(g)}$, ce qui donne le résultat. $\circ$

Définition 3.2 *On note $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions f telles que pour tout borné B de $\mathbb{R}^N$, $f \in L_1(B)$. On dit que $f_n \to f$ dans L^1_{loc} si f_n tend vers f dans $L^1(B)$ pour tout borné B.*

Exercice 8 Montrer que les espaces que nous connaissons : $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$ et $C^0(\mathbb{R}^N)$ sont dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Corollaire 3.2 *Si $f \in L^1_{loc}$ et $g \in C^k$ est à support compact, alors $f * g$ est C^k.*

Définition 3.3 *Soit $k \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\int k(x)dx = 1$ et $k(x) \geq 0$ presque partout. On pose pour tout $h > 0$,*

$$k_h(x) = h^{-N} k(\frac{x}{h}).$$

On appelle un tel système de fonctions k_h, $h > 0$, une "approximation de l'identité".

Proposition 3.3 *Si f est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^N$, alors $f * k_h$ converge vers f uniformément.*

Démonstration On remarque d'abord que

$$\int k_h(x)dx = \int k(x)dx = 1, \tag{3.7}$$

$$k_h * f(x) - f(x) = \int (k_h(y)(f(x-y) - f(x))dy, \tag{3.8}$$

et que (une conséquence du théorème de Lebesgue), pour η fixé et h assez petit,

$$\int_{|y| \geq \eta} |k_h(y)|dy \leq \varepsilon. \tag{3.9}$$

Donc

$$|(k_h * f)(x) - f(x)| = |\int k_h(y)(f(x-y) - f(x))dy|$$

$$\leq 2 \sup |f| \int_{|y| \geq \eta} |k_h(y)|dy + \sup_{|y| \leq \eta} |f(x-y) - f(x)| \int |k_h(y)|dy \leq 2\varepsilon$$

pourvu que l'on fixe premièrement η assez petit pour que le deuxième terme soit plus petit que ε, puis h assez petit pour que le premier soit aussi plus petit que ε. ∘

Théorème 3.10 *Soit k_h une approximation de l'identité. Alors pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, les fonctions $f * k_h$ convergent vers f dans L^p.*

Démonstration Comme $f \in L^p$, on peut choisir par le théorème 3.5 η assez petit pour que

$$|y| \leq \eta \Rightarrow \int |f(x-y) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon. \tag{3.10}$$

L'inégalité de Hölder et le fait que $k_h \geq 0$, $\int k_h = 1$ impliquent que pour toute fonction f dans L^p, on ait

$$\left(\int k_h(x)|f(x)|dx\right)^p \leq \int k_h(x)|f(x)|^p dx. \tag{3.11}$$

En effet,

$$\left(\int k_h|f|\right)^p = \left(\int k_h^{\frac{1}{p}} k_h^{\frac{1}{p'}}|f|\right)^p \leq \left(\int k_h|f|^p\right)\left(\int k_h\right)^{\frac{p}{p'}}.$$

En utilisant les relations (3.7)-(3.11) et le théorème de Fubini,

$$\int |k_h * f(x) - f(x)|^p dx = \int \left|\int (k_h(y)(f(x-y) - f(x))dy\right|^p dx \leq \int\int k_h(y)|f(x-y) - f(x))|^p dy dx \leq$$

$$2^p \int |f(x)|^p dx \int_{|y|\geq\eta} |k_h(y)|dy + \int_{|y|\leq\eta} |k_h(y)|dy \int |f(x-y) - f(x)|^p dx \leq$$

$$2^p ||f||_{L^p}^p \varepsilon + \int |k_h(y)|\varepsilon = (2^p||f||_{L^p}^p + ||k||_{L^1})\varepsilon.$$

Corollaire 3.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On appelle $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω et on munit $\mathcal{C}_c(\Omega)$, l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω, de la topologie suivante : on dit que u_n tend vers u si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $\text{Support}(u_n) \subset \text{Support}(u) + B(0, \varepsilon)$ et $\sup_{x\in\Omega} |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$. Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$.*

Démonstration Si $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, alors elle est uniformément continue et $k_h * f$ tend vers f uniformément. De plus, par la proposition 3.2, $\text{Support}(k_h * f) \subset \text{Support}(f) + B(0, h)$. Donc $k_h * f$ tend bien vers f dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Enfin, par le théorème 3.7, on a bien $k_h * f \in \mathcal{C}^\infty$. ○

Pour compléter la démonstration précédente, il nous reste à montrer qu'il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Lemme 3.2 *Il existe une fonction $f_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, à support compact, positive et de support contenu dans $\overline{B}(0, 1)$.*

Démonstration On pose , en dimension 1, $f_1(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ si $|x| \leq 1$, $f(x) = 0$ sinon. Il est facile de voir que $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0$ pour tout ordre k et que donc f est $\mathcal{C}^\infty$. En dimension N, on pose simplement $g_N(x_1, ..., x_N) = f_1(x_1)...f_N(x_N)$ qui est à support dans l'hypercube $[-1, 1]^N$ puis $f_N(x) = g_N(2\sqrt{N}x)$ pour ramener le support dans $B(0, 1)$. ○

Proposition 3.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration On considère les voisinages intérieurs bornés de Ω, $\Omega_r = \{x, B(x,r) \subset \Omega\} \cap B(0, \frac{1}{r})$. Comme $\Omega = \cup_{r>0}\Omega_r$, on a par le théorème de Lebesgue

$$\forall \varepsilon \exists r, \int_\Omega |f(x) - f(x)\mathbb{1}_{\Omega_r}|^p dx < \varepsilon.$$

On choisit alors $r' < r$ tel que

$$||(f\mathbb{1}_{\Omega_r}) * k_{h_{r'}} - f\mathbb{1}_{\Omega_r}||_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

On obtient donc $||f - (f\mathbb{1}_{\Omega_r}) * k_{h_{r'}}||_{L^p(\Omega)} < 2\varepsilon$. Comme $r' < r$, le lemme 3.2 et le théorème 3.7 impliquent que $(f\mathbb{1}_{\Omega_r}) * h_{r'} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. $\circ$