

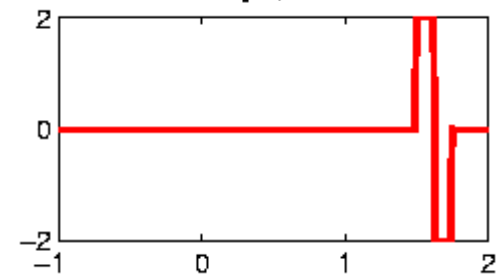
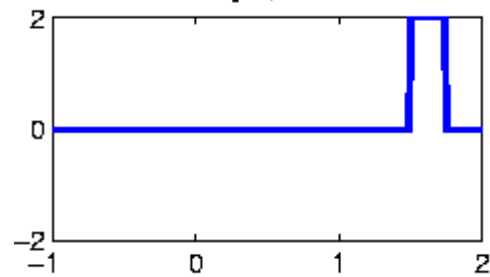
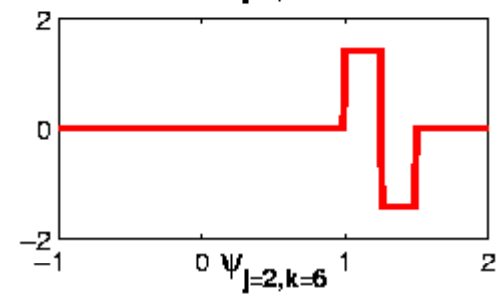
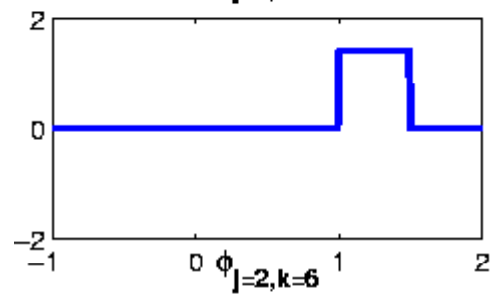
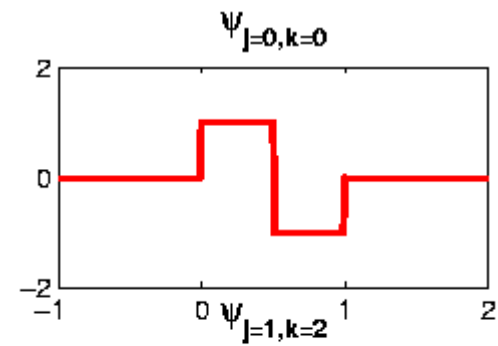
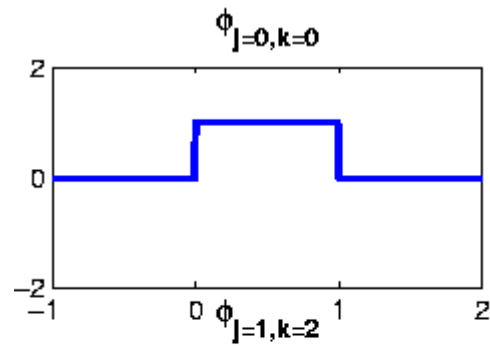
### Exercice 7 Base de Haar

On pose  $H(x) = 1$  si  $0 \leq x < \frac{1}{2}$  et  $H(x) = -1$  si  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ . C'est la fonction de Haar. On pose

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

- 1) Dessiner les fonctions de Haar pour  $l = 1, 2$ . Démontrer que ces fonctions forment un système orthonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ .
- 2) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans  $[0, 1]$  et qui sont constantes sur les intervalles dyadiques de longueur  $2^{-j}$ . On appelle  $S_j$  le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de  $W_j$ , l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des intervalles de longueur  $2^{-j}$  et à moyenne nulle.
- 3) Montrer que les fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$  dont l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$  est nulle forment un sous-espace dense de  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Indication : montrer que si  $f \in L^2 \cap L^1$ ,  $f - \frac{\int f(x) dx}{\text{mes}(B(0, R))} \mathbb{1}_{B(0, R)}$  converge vers  $f$  dans  $L^2$  quand  $R \rightarrow +\infty$  et est d'intégrale nulle.
- 4) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$ . On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de  $L^2(-2^j, 2^j)$  d'intégrale nulle sur  $(-2^j, 0)$  et  $(0, 2^j)$ .

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



**Décomposition d'images sur la base de Haar** Nous nous plaçons dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Nous considérons tout d'abord la fonction de  $L^2(\mathbb{R})$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.8)$$

Nous définissons ensuite  $I(x) = \mathbb{1}_{[0,1)}$ , puis les trois fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H_1(x, y) = H(x)I(y), \quad H_2(x, y) = I(x)H(y) \quad \text{et} \quad H_3(x, y) = H(x)H(y).$$

Enfin nous définissons

$$H_{i,j_1,j_2}^k(x, y) = 2^k H_i(2^k x - j_1, 2^k y - j_2), \quad k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3.$$

On peut montrer (voir l'exercice 7) que ces fonctions forment une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Donc si pour une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  nous définissons les coefficients

$$c_{i,j_1,j_2}^k(f) = \langle f, H_{i,j_1,j_2}^k \rangle,$$

alors

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{k,j_1,j_2 \in \mathbb{Z}} c_{i,j_1,j_2}^k(f) H_{i,j_1,j_2}^k$$

5) Nous nous plaçons dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Soit  $I(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$ , puis les trois fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H_1(x, y) = H(x)I(y) , H_2(x, y) = I(x)H(y) \text{ et } H_3(x, y) = H(x)H(y).$$

Ensuite on définit la “base d’ondelettes de Haar en dimension 2”,

$$H_{i,j_1,j_2}^k(x, y) = 2^k H_i(2^k x - j_1, 2^k y - j_2), \quad k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3.$$

Commencer par dessiner les fonctions  $H_1, H_2, H_3$ .

6) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans  $[0, 1]^2$  et qui sont constantes sur les carrés dyadiques de côté  $2^{-j}$ . On appelle  $S_j$  le système qu’elles forment. Remarquer qu’elles sont toutes d’intégrale nulle et déduire qu’elles forment une base de  $W_j$ , l’espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des carrés de côté  $2^{-j}$  et d’intégrale nulle.

7) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . On commencera par montrer qu’une partie de la base de Haar engendre l’espace des fonctions de  $L^2(-2^j, 2^j)^2$  d’intégrale nulle.

8) Pour une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  considérons les coefficients

$$c_{i,j_1,j_2}^k(f) = \langle f, H_{i,j_1,j_2}^k \rangle.$$

Conclure que

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{k,j_1,j_2 \in \mathbb{Z}} c_{i,j_1,j_2}^k(f) H_{i,j_1,j_2}^k$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Pour illustrer cette décomposition dans le cas d'une image, nous considérons, pour  $k_1$  fixé, une fonction  $v_{k_1}$  appartenant à l'espace  $V_{k_1}$  des fonctions constantes sur les hypercubes  $C^{k_1, z} = 2^{-k_1}(z + [0, 1]^2)$ ,  $z \in \mathbb{Z}^2$ , et supposons de plus que le support de  $v_{k_1}$  est inclus dans  $[0, 1]^2$ . Une telle fonction représente une image numérique.

Dans ce cas, les coefficients  $c_{i, j_1, j_2}^k(v_{k_1})$  sont nuls pour  $j_1 \geq 2^k$ ,  $j_1 < 0$ ,  $j_2 \geq 2^k$ ,  $j_2 < 0$  ou  $k > k_1$ .

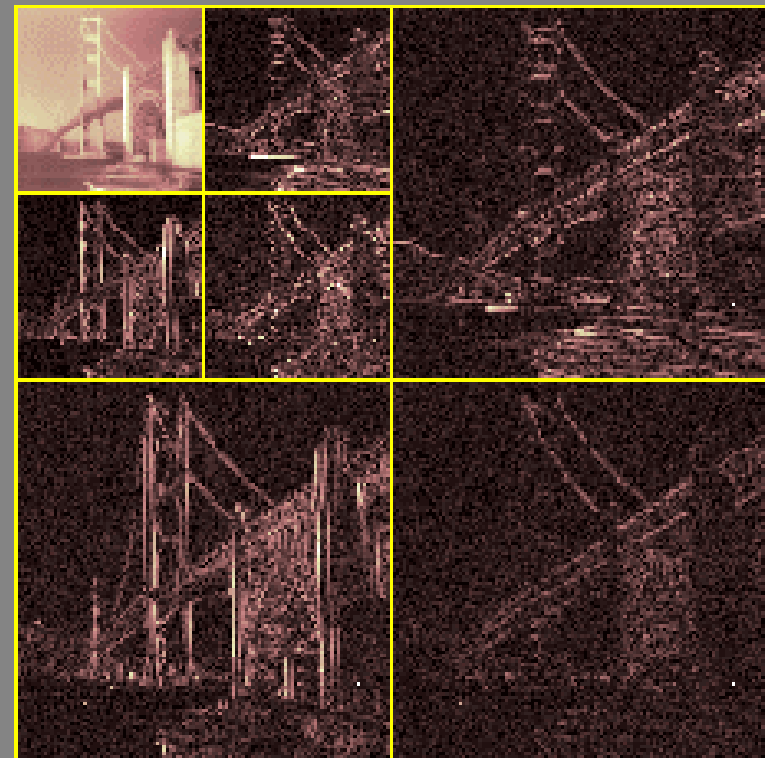
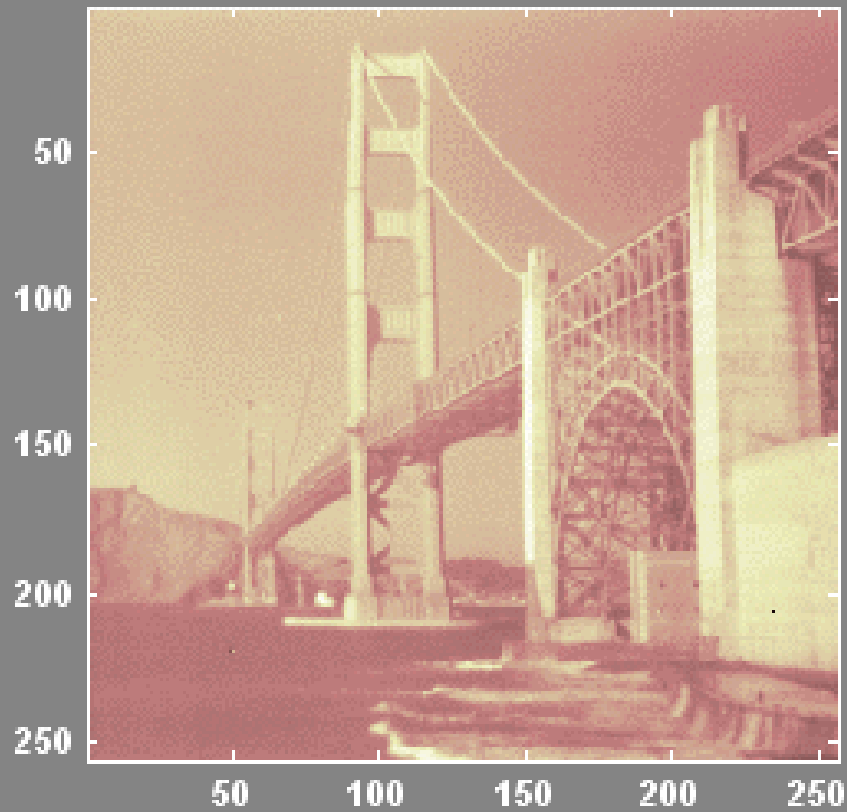
D'autre part, pour montrer que les  $(H_{i, j_1, j_2}^k)$  forment une base de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , on montre que si  $W_k$  est l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur les hypercubes de côtés  $2^{-k}$  et à moyenne nulle, les  $(H_{i, j_1, j_2}^k(x, y))$  forment une base de  $W_k$ .

On peut en fait montrer que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $V_{k+1} = V_k \oplus W_k$ .

L'image  $v_{k_1}$  peut s'écrire, pour  $0 \leq k_0 \leq k_1 - 1$ , :

$$v_{k_1} = v_{k_0} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \sum_{j_1, j_2=0}^{2^k-1} c_{i, k, j_1, j_2} H_{i, j_1, j_2}^k.$$

Original Image



Decomposition at level 2

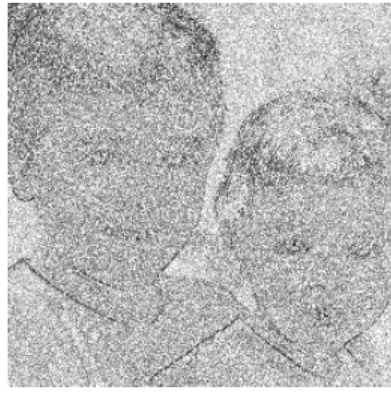
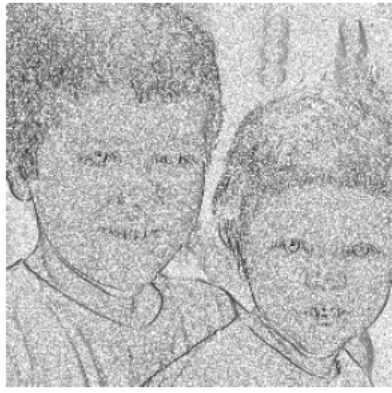




Figure 5.2: Exemple de compression d'images dans une base hilbertienne. A gauche, l'image originale (même image que figure 5.1), à droite l'image obtenue en ne gardant que 10% des coefficients dans la base de Haar (voir la formule (5.10)).



## Chapitre 6

# Séries de Fourier

Et ignem regunt numeri



Jean Baptiste Joseph Fourier ([1768-1830](#))

Traité de la chaleur, page 231  
([www.google.fr/books](http://www.google.fr/books))

**Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction dont on demande le développement en séries de sinus d'arcs multiples, peut être développée en une série ordonnée, suivant les puissances de la variable  $x$ , et qu'il n'entre dans cette dernière série que des puissances impaires. On peut étendre les mêmes conséquences à des fonctions quelconques, même à celles qui seraient discontinues et entièrement arbitraires. Pour établir clairement la vérité de cette proposition, il est nécessaire de poursuivre l'analyse qui fournit l'équation précédente (B) et d'examiner quelle est la nature des coefficients qui multiplient  $\sin. x$ ,  $\sin. 2x$ ,  $\sin. 3x$ ,  $\sin. 4x$ .**

Si l'on substitue cette valeur de  $\frac{s}{n}$  dans l'équation (B), en prenant le signe + lorsque le terme de cette équation est de rang impair, et le signe — lorsque  $n$  est pair; on aura en général  $S(\varphi x \cdot \sin. nx \cdot dx)$  pour le coefficient de  $\sin. nx$ ; on parvient de cette manière à un résultat très-remarquable exprimé par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} \pi \varphi x = & \sin. x S(\sin. x \cdot \varphi x \cdot dx) + \sin. 2x S(\sin. 2x \varphi x dx) \\ & + \sin. 3x S(\sin. 3x \cdot \varphi x dx) \dots + \sin. ix S(\sin. ix \varphi x dx) + \text{etc.}; \end{aligned} \quad (D)$$

le second membre donnera toujours le développement cherché de la fonction  $\varphi x$ , si l'on effectue les intégrations depuis  $x=0$ , jusqu'à  $x=\pi$ .

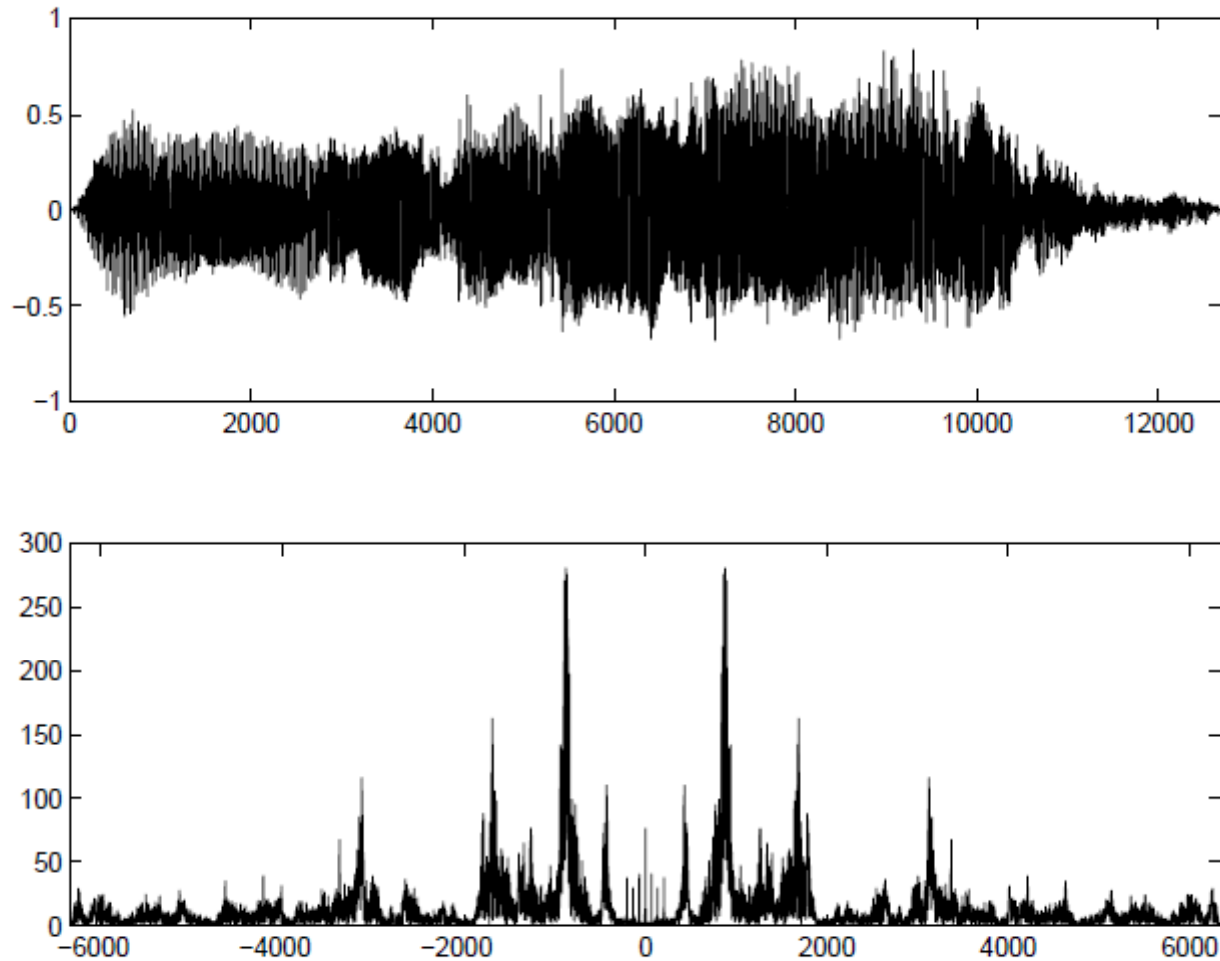
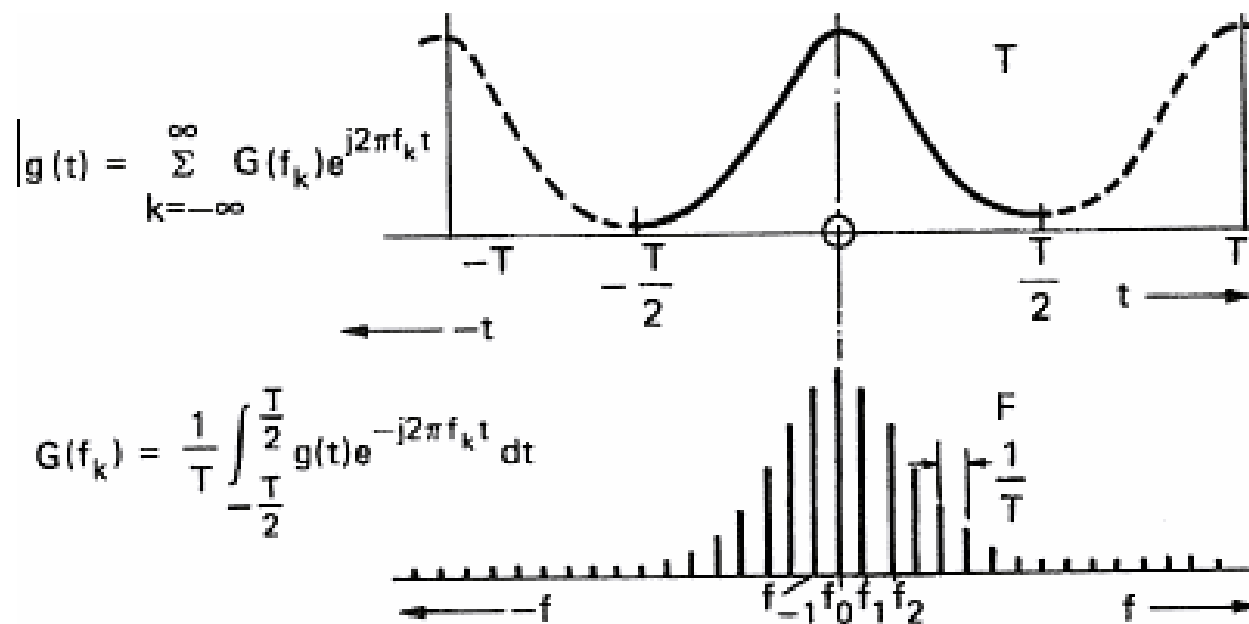


FIGURE 8.2 – Haut : un signal correspondant à la voyelle "Ah" (le signal représente la pression de l'air en fonction du temps); bas : module de la TFD (coefficients  $|\tilde{u}|$ , voir le texte). On remarque que le module du spectre est symétrique, et qu'il existe trois pics importants correspondant aux fréquences dominantes.



# Séries de Fourier

On considère l'espace de Hilbert hermitien  $L^2([-\pi, \pi])$  que l'on notera aussi  $L^2(-\pi, \pi)$ . Ces fonctions sont à valeurs réelles ou complexes. On va montrer que le système orthonormé

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de  $L^2(-\pi, \pi)$ . Cette base s'appelle la base de Fourier. On notera

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx,$$

en sorte que pour toute  $f$  dans  $L^2([-\pi, \pi])$  on puisse écrire

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx},$$

la série précédente convergeant au sens  $L^2$ . Les  $c_n(f)$  s'appellent les coefficients de Fourier de  $f$  et sont proportionnels aux coordonnées de  $f$  dans la base de Fourier. Pour montrer ce résultat, on va commencer par analyser le comportement des coefficients de Fourier selon la régularité de  $f$ .

**Lemme 6.1** (*Lemme de Riemann-Lebesgue*)

i) On pose pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} dx.$$

Si  $f \in C_c(\mathbb{R})$  est  $k$  fois continûment différentiable et telle que  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

ii) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  alors  $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{iax} dx \rightarrow 0$  quand  $|a| \rightarrow \infty$ .

iii) Application aux coefficients de Fourier : si  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ ,

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n(f) = 0.$$

**Démonstration** i) En intégrant par parties  $k$  fois l'intégrale définissant  $\hat{f}$ , on obtient pour  $\xi \neq 0$ ,

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{(i\xi)^k} \int f^{(k)}(x) e^{-ix\xi} dx \right| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

ii) Soit  $f_n$  une suite de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact qui tendent vers  $f$  dans  $L^1$  (proposition 3.4). On a, pour  $n$  fixé assez grand :  $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$ , ce qui implique  $|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$  pour tout  $\xi$ . En utilisant (i), on voit que  $|\hat{f}_n(\xi)| \rightarrow 0$  quand  $n$  est fixé et  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Donc  $|\hat{f}_n(\xi)| \leq \varepsilon$  pour  $\xi$  assez grand. Finalement,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| + |\hat{f}_n(\xi)| \leq 2\varepsilon$$

pour  $\xi$  assez grand. ◦



La proposition suivante nous dit que la série de Fourier de  $f$  converge vers  $f(x)$  en tout point  $x$  où  $f$  est suffisamment régulière.

**Proposition 6.1** (*Principe de localisation*)

Si  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  et si la fonction  $y \rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$  est intégrable sur un voisinage de  $x$ , alors  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N f(x) = f(x)$ , où on a noté :  $s_N f(x) =: \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e^{inx}$ .

**Etape 1** On se ramène au cas  $f(x) = 0, x = 0$ .

**Etape 2** On a

$$s_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dy.$$

En effet,  $\sum_{-N}^N e^{iky} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}}$ , ce qui se prouve aisément en sommant la suite géométrique.

**Etape 3** Par l'étape 1 il suffit de montrer que si  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  et si  $\frac{f(y)}{y}$  est intégrable autour de 0, alors  $s_N f(0) \rightarrow 0$ . Comme sur  $[-\pi, \pi]$ ,  $|\sin \frac{y}{2}| \geq \frac{|y|}{\pi}$ , on a

$$\left| \frac{f(y)}{\sin \frac{y}{2}} \right| \leq \frac{\pi |f(y)|}{|y|} \in L^1(-\pi, \pi).$$

Donc on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction  $\frac{f(y)}{\sin \frac{y}{2}}$ . On conclut que l'intégrale de (6.1) définissant  $s_N f(0)$  tend vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini.  $\circ$

**Corollaire 6.2** *Le système*

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(e^{ikt})_{k \in \mathbb{Z}}$$

*est une base hilbertienne de  $L^2(-\pi, \pi)$ . Notant  $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$ , on a donc pour toute  $f$  dans  $L^2([-\pi, \pi])$ ,*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx},$$

*la série précédente convergeant au sens  $L^2$ .*

**Démonstration** On appelle polynôme trigonométrique toute expression de la forme  $P(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt}$ , où les  $a_k$  sont des nombres complexes. Pour montrer que le système de Fourier est une base hilbertienne, il nous suffit de montrer que c'est un système total, c'est-à-dire que les polynômes trigonométriques forment un sous-espace vectoriel dense de  $L^2(-\pi, \pi)$ . Mais le lemme 6.1 (Principe de localisation) nous assure que si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  et à support compact dans  $[-\pi, \pi]$ , alors  $s_N(f)(x) \rightarrow f(x)$  en tout point (On peut aussi utiliser directement le théorème de Stone-Weierstrass). Comme de plus les coefficients de la série de Fourier de  $f$  vérifient  $|c_k(f)| \leq \frac{C}{k^2}$ , la série de Fourier est en fait uniformément convergente et donc converge aussi dans  $L^2([-\pi, \pi])$  vers  $f$ . Or, par la proposition 3.4, les fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $[-\pi, \pi]$  sont denses dans  $L^2(-\pi, \pi)$ . On conclut que le système de Fourier est total, et donc une base hilbertienne. ◦

**Théorème 5.2 (Riesz)** *Pour tout  $f \in H$ , l'application  $v \in H \rightarrow (v, f)$  est une forme linéaire continue sur  $H$ . Réciproquement, si  $\tilde{f}$  est une forme linéaire continue sur  $H$ , il existe un unique élément  $f \in H$  tel que*

$$\tilde{f}(v) = (v, f).$$

*En d'autres termes,  $H$  est son propre dual. Il est donc aussi le dual de son dual, propriété que l'on appelle la réflexivité.*

**Démonstration** La première assertion découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrons la réciproque. Soit  $\tilde{f}$  une forme linéaire continue et non nulle sur  $H$  et  $L$  son noyau, qui est un espace vectoriel fermé. Comme  $\tilde{f} \neq 0$ ,  $L$  est un sous-espace propre de  $H$  (c'est-à-dire strictement inclus dans  $H$ ). Comme  $L$  est fermé, par la relation (5.4)  $L^\perp$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . Soit  $g \in L^\perp$ , non nul. On a donc  $\tilde{f}(g) \neq 0$  et on pose pour tout  $v \in H$

$$v = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)}g + \left(v - \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)}g\right) = v_1 + v_2.$$

Le second terme vérifie  $\tilde{f}(v_2) = 0$  et appartient donc à  $L$ . Comme  $g \in L^\perp$ , on a donc

$$(v, g) = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} \|g\|^2.$$

Il en résulte que

$$\tilde{f}(v) = \left(v, \frac{\overline{\tilde{f}(g)}}{\|g\|^2}g\right).$$

◦

### 3.2.1 Le théorème fondamental du traitement du signal

Le théorème que nous allons maintenant énoncer est appelé théorème fondamental du traitement du signal, car il exprime que tout traitement linéaire continu appliqué à un signal temporel se réduit au choix d'une convolution. En première analyse, le traitement du signal doit être invariant par translation temporelle, puisque ce traitement ne dépend en général pas de l'instant, inconnu, où le signal commence.

**Définition 3.2** *Si  $f$  est une fonction sur  $\mathbb{R}^N$  et  $x \in \mathbb{R}^N$ , on note  $(\tau_x f)(y) = f(y - x)$ . C'est la translatée de  $f$  par le vecteur  $x$ . On dit qu'un opérateur  $T$  agissant sur des fonctions est invariant par translation si  $T(\tau_x f) = \tau_x(Tf)$ .*

On note  $C_b(\mathbb{R}^N)$  l'ensemble des fonctions continues et bornées, muni de la norme  $\|f\|_\infty$ . On vérifie aisément que c'est un espace de Banach.

**Théorème 3.9** *(L'universalité de la convolution) Soit  $T : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$  un opérateur linéaire, invariant par translation et continu. Alors il existe  $g$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  telle que  $T(f) = g * f$ .*

**Théorème 3.9** (*L'universalité de la convolution*) Soit  $T : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$  un opérateur linéaire, invariant par translation et continu. Alors il existe  $g$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  telle que  $T(f) = g * f$ .

**Démonstration** On considère la forme linéaire  $f \rightarrow (Tf)(0)$ , qui appartient par hypothèse à  $(L^2(\mathbb{R}^N))'$ . En effet,

$$|(Tf)(0)| \leq \|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{L^2},$$

et cette inégalité exprime la continuité de la forme linéaire  $(Tf)(0)$  sur  $L^2$ . Par le théorème 5.2, (théorème de Riesz), il existe alors une fonction  $g_0 \in L^2$  telle que

$$(Tf)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \overline{g_0}(y) dy. \quad (3.5)$$

Par hypothèse aussi,  $T(\tau_x f) = \tau_x Tf$ . Donc par (3.5),

$$\begin{aligned} Tf(x) &= (\tau_{-x}(Tf))(0) = T(\tau_{-x}f)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y) \overline{g_0}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) \overline{g_0}(-y) dy = (f * g)(x), \end{aligned}$$

avec  $g(y) = \overline{g_0}(-y)$ .



**Théorème 3.9** (*L'universalité de la convolution*) Soit  $T : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$  un opérateur linéaire, invariant par translation et continu. Alors il existe  $g$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  telle que  $T(f) = g * f$ .

## 6.1 Convolution des fonctions périodiques et séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier d'une fonction  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  implique qu'on la considère comme une fonction  $2\pi$ -périodique, puisque la série de Fourier l'est. On note  $L^2_{per}(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$  qui sont  $2\pi$ -périodiques. Toute fonction  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  définit un élément unique de  $L^2_{per}(\mathbb{R})$ .

**Définition 6.1 et proposition** Si  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  et  $g \in L^1([-\pi, \pi])$ , on prolonge  $f$  et  $g$  en des fonctions  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$  et on pose  $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$ . La fonction  $f * g$  ainsi définie appartient à  $L^1(-\pi, \pi)$  et est  $2\pi$ -périodique.

**Exercice 2** En reprenant l'argument du théorème 3.9, montrer que si  $T : L^2_{per}([-\pi, \pi]) \rightarrow C^0_{per}([-\pi, \pi])$  est linéaire, continu et commute avec les translations, alors il existe une fonction  $g \in L^2([-\pi, \pi])$  telle que  $Tf = g * f$ , où " $*$ " désigne la convolution périodique.'

## 6.1 Convolution des fonctions périodiques et séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier d'une fonction  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  implique qu'on la considère comme une fonction  $2\pi$ -périodique, puisque la série de Fourier l'est. On note  $L^2_{per}(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$  qui sont  $2\pi$ -périodiques. Toute fonction  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  définit un élément unique de  $L^2_{per}(\mathbb{R})$ .

**Définition 6.1 et proposition** *Si  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  et  $g \in L^1([-\pi, \pi])$ , on prolonge  $f$  et  $g$  en des fonctions  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$  et on pose  $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$ . La fonction  $f * g$  ainsi définie appartient à  $L^1(-\pi, \pi)$  et est  $2\pi$ -périodique.*

**Théorème 6.2** *Si  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ , alors  $f * g$  est continue et  $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f)c_n(g)$ . De plus, la série de Fourier de  $f * g$  converge uniformément vers  $f * g$ .*

**Théorème 6.2** Si  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ , alors  $f * g$  est continue et  $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f)c_n(g)$ . De plus, la série de Fourier de  $f * g$  converge uniformément vers  $f * g$ .

**Démonstration** i) On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f * g)(x)| \leq \int |f(x - y)||g(y)|dy \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Donc  $f * g$  est majorée et appartient aussi à  $L^2(-\pi, \pi)$ . On a, en appliquant plusieurs fois le théorème de Fubini (les intégrales se font sur  $[-\pi, \pi]$  ou, indifféremment, sur n'importe quel intervalle de longueur  $2\pi$ ) :

$$\begin{aligned} c_n(f * g) &= \frac{1}{2\pi} \int \int f(x - y)g(y)e^{-int}dydx = \frac{1}{2\pi} \int \int f(x - y)e^{-in(x-y)}g(y)e^{-iny}dydx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int g(y)e^{-iny}dy \right) \left( \int f(u)e^{-inu}du \right) = 2\pi c_n(f)c_n(g). \end{aligned}$$

**Théorème 6.2** Si  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ , alors  $f * g$  est continue et  $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f)c_n(g)$ . De plus, la série de Fourier de  $f * g$  converge uniformément vers  $f * g$ .

$$|c_n(f * g)e^{inx}| = |c_n(f)||c_n(g)| \leq |c_n(f)|^2 + |c_n(f)|^2.$$

Cette dernière série est convergente. La série de Fourier de  $f * g$ ,  $F_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n(f * g)e^{inx}$ , est donc uniformément convergente. Sa  $F$  limite est donc continue. Donc d'une part  $F_N$  tend vers  $f * g$  dans  $L^2$  et donc par la réciproque du théorème de Lebesgue une sous-suite tend vers cette fonction presque partout. De l'autre  $F_N$  tend uniformément vers  $F$ . On en déduit que  $f * g = F$  presque partout et on en déduit aussi que  $f * g$  est égale presque partout à une fonction continue (et donc peut être appelée continue).  $\circ$

## Transformée de Fourier discrète et transformée inverse.

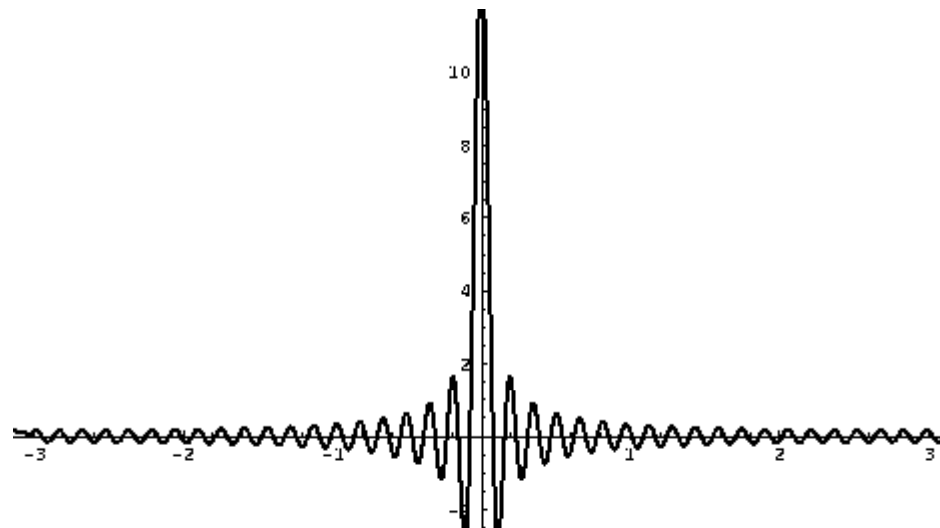
La transformée de Fourier discrète est l'application de  $L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$  qui associe à une fonction  $u$  la suite de ses coefficients de Fourier  $c(f) = (c_k(u))_{k \in \mathbb{Z}}$ .  
la transformée inverse est la série de Fourier associée à  $c \in l^2(\mathbb{Z})$ , notée

$$S(c)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

On a donc  $S(c(f)) = f$ , ce qui constitue une *formule d'inversion de Fourier*.  
Si  $a, b \in l^2(\mathbb{Z})$ , on note  $ab$  le produit terme à terme, défini par  $(ab)_k = a_k b_k$ .

$$S(ab) = \frac{1}{2\pi} S(a) * S(b).$$

Considérons le “filtre passe-bas”  $b_k^N = 1$  si  $|k| \leq N$ ,  $b_k^N = 0$



la série de Fourier tronquée de  $f$ ,  $s_N f$ , est obtenue par convolution  $2\pi$ -périodique de  $f$  avec le noyau de Dirichlet:

$$s_N f = h_N * f$$

$$h_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}}$$

## Autres bases de Fourier

i) On pose pour  $T > 0$   $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , c'est la fréquence de base associée à la période  $T$ . Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}} e^{ik\omega t}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

forment une base hilbertienne de  $L^2(0, T)$ . Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$$

forment également une base hilbertienne de  $L^2(0, T)$  : c'est en fait la base originale de Fourier !

**Démonstration** i) La deuxième base résulte de l'application à la base de Fourier de la remarque générale suivante. Si  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne, alors le système  $f_0 = e_0, \dots, f_{2k} = \frac{e_k + e_{-k}}{\sqrt{2}}, f_{2k+1} = \frac{e_k - e_{-k}}{\sqrt{2}}, \dots$  aussi.

ii) Il en est de même pour les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$$

La transformée associée à la base en cosinus s'appelle la "transformée en cosinus."

Il y a également une "base en sinus",  $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$

ii) Si  $f \in L^2(0, T)$ , on lui associe la fonction paire  $\tilde{f}$  sur  $[-T, T]$  qui coïncide avec  $f$  sur  $[0, T]$ . On décompose  $\tilde{f}$  sur la base de Fourier de  $[-T, T]$ . La base de Fourier sur  $[-T, T]$  est formée des fonctions  $\frac{1}{\sqrt{2T}} e^{\frac{i\pi kt}{T}}$ . Donc on a

$\tilde{f}(x) =_{L^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2T} \left( \int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{-\frac{i\pi kt}{T}} dt \right) e^{\frac{i\pi kx}{T}}$ . Comme  $\tilde{f}$  est paire, on voit en faisant le changement de variables  $t \rightarrow -t$  dans les intégrales que les coefficients de  $e^{\frac{i\pi kx}{T}}$  et  $e^{-\frac{i\pi kx}{T}}$  sont égaux. On remarque aussi que  $\int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{\frac{i\pi kt}{T}} dt = 2 \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right) dt$ . Aussi,

$$\tilde{f}(x) =_{L^2} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{f}(t) dt + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2T} \left( \int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{-\frac{i\pi kt}{T}} dt \right) \left( e^{\frac{i\pi kx}{T}} + e^{-\frac{i\pi kx}{T}} \right), \text{ et donc}$$

$$f(x) =_{L^2} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{T} \left( \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right) dt \right) \cos\left(\frac{\pi kx}{T}\right).$$

## Bases de Fourier en dimension 2

On pose  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

$$k \cdot x = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

**Théorème 6.3** *Les fonctions  $e_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ik \cdot x}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ , forment une base hilbertienne de  $L^2([0, 2\pi]^2)$  et on a donc pour toute fonction  $u \in L^2([0, 2\pi]^2)$ ,*

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k(u) e^{ik \cdot x}, \text{ avec } c_k(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0, 2\pi]^2} u(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad (6.2)$$

*la convergence de la série se vérifiant au sens de  $L^2$ .*



**Lemme 6.2** Les fonctions à variables séparées, c'est-à-dire de la forme  $w(x) = u(x_1)v(x_2)$  avec  $u, v \in L^2(0, 2\pi)$  forment un système total de  $L^2([0, 2\pi]^2)$ .

**Démonstration** Les fonctions caractéristiques de rectangles sont à variables séparées et elles forment un système total de  $L^2([0, 2\pi]^2)$ .  $\circ$

**Lemme 6.3** Si  $u_k(x) \rightarrow u(x)$  et  $v_l(x) \rightarrow v(x)$  dans  $L^2(0, 2\pi)$ , alors  $u_k(x_1)v_l(x_2) \rightarrow u(x_1)v(x_2)$  dans  $L^2([0, 2\pi]^2)$  quand  $k, l \rightarrow +\infty$ .

$$u(x_1) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} c_{k_1} e^{ik_1 x_1}, \quad c_{k_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} u(x_1) e^{-ik_1 x_1};$$

$$v(x_2) = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_2} e^{ik_2 x_2}, \quad c_{k_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} v(x_2) e^{-ik_2 x_2}.$$

En appliquant le lemme 6.3 à  $u_N(x_1) = \sum_{-N}^N c_{k_1}(u) e^{ik_1 x_1}$

et  $v_M(x_2) = \sum_{-M}^M c_{k_2}(v) e^{ik_2 x_2}$  qui convergent respectivement vers  $u(x_1)$  et  $v(x_2)$  dans  $L^2([0, 2\pi])$

on obtient une série double convergente dans  $L^2([0, 2\pi]^2)$















































































