

english

Le polycopié d'analyse de l'ENS Cachan
Licence, maîtrise, agrégation

Sylvie Fabre, Jean-Michel Morel, Yann Gousseau

23 septembre 2009

Table des matières

1	Abrégé de topologie générale	7
1.1	Cas des espaces métriques	11
1.2	Théorème d'Ascoli-Arzela	12
1.3	Exercices	14
2	Espaces de Hilbert	19
2.1	Bases hilbertiennes	22
2.2	Convergence faible	24
2.3	Exercices	26
3	Séries de Fourier	37
3.1	Convolution des fonctions périodiques et séries de Fourier	40
3.1.1	Autres bases de Fourier	42
3.2	Bases de Fourier en dimension 2	43
3.3	Décroissance des coefficients de Fourier et problèmes de compression du signal	44
3.4	Phénomène de Gibbs	45
3.5	Note historique	47
3.5.1	Gammes, harmoniques	47
3.5.2	Séries trigonométriques	51
3.6	Exercices	52
4	Transformées de Fourier bidimensionnelles	55
4.1	Base de Fourier sur un carré	55
4.2	Base de Fourier sur un réseau	56
5	Le cas discret	61
5.1	Transformée de Fourier Discrète, applications	61
5.1.1	La dimension 1	61
5.1.2	La dimension 2	64
5.1.3	Le phénomène du repliement de spectre ou aliasage	65
5.1.4	La transformée de Fourier rapide	72
5.1.5	L'utilisation de la transformée de Fourier discrète pour définir zoom, translations et rotations des images	73
5.1.6	Importances relatives de la phase et du module de la TFD pour une image	79
5.2	Lien avec la théorie de Shannon	79
6	Séries de Fourier et espaces de Sobolev	83
6.1	Distributions sur \mathbb{R}	83
6.2	Espaces de Sobolev périodiques $H_{per}^m(0, 2\pi)$	87
6.3	Exercices	90

7	Espaces de Sobolev sur l'intervalle	95
7.1	Les espaces $W^{1,p}(I)$ comme espaces de Banach	98
7.2	Une application : l'élastique chargé	99
7.3	Exercices	100
8	Vérification des acquis	105
9	Corrigés des exercices	109
9.1	Chapitre 1	109
13.2	Chapitre 2	119
13.3	Chapitre 3	122
13.4	Chapitre 4	127
13.5	Chapitre 5	129
13.6	Chapitre 6	134
13.7	Chapitre 7	140
13.8	Chapitre 8	146
13.9	Chapitre 9	150
13.10	Chapitre 11	154
13.11	Chapitre 12	157
13	Exemple de travaux pratiques	169
13.1	Manipulation de l'histogramme	169
13.2	Echantillonnage et transformée de Fourier	170
13.3	Zoom par 0-padding (prolongement du spectre par des zéros)	170
13.4	Translations	171
13.5	Phase et module de la TFD	171
13.6	Codes Matlab	171
	Notations	175
	Index	176

Table des figures

2.1	Décomposition sur la base de Haar	27
2.2	Compression d'images dans une base hilbertienne	28
3.1	Phénomène de Gibbs 1	48
3.2	Phénomène de Gibbs 2	49
5.1	63
5.2	Transformée de Fourier Discrète du son a	64
5.3	Transformée de Fourier Discrète d'une image	66
5.4	Repliement de spectre 1	69
5.5	Repliement de spectre 2	70
5.6	Filtrage passe-bas d'une image	71
5.7	Zoom par prolongement du spectre 1	74
5.8	Zoom par prolongement du spectre 2	75
5.9	Rotation par Transformée de Fourier 1	77
5.10	Rotation par Transformée de Fourier 2	78
5.11	Phase de la Transformée de Fourier Discrète et information géométrique	80
5.12	Module de la Transformée de Fourier Discrète et texture	81
6.1	Espace $H_{per}^1(\mathbb{R})$ et décroissance des coefficients de Fourier	91
6.2	Espace $H_{per}^1(\mathbb{R}^2)$ et décroissance des coefficients de Fourier	92

Sources principales et traités recommandés :

La lecture de ce polycopié ne doit pas détourner les étudiants, particulièrement ceux qui prépareront l'agrégation, de connaître les ouvrages classiques qui suivent. Parmi ces grands classiques (en français!) que nous avons consultés pour élaborer ce polycopié et ses exercices, les ouvrages suivants sont très recommandés et incontournables. Il s'agit du classique livre d'Analyse Fonctionnelle de Haïm BREZIS [4], du non moins classique manuel d'Analyse Réelle et Complexe de Walter Rudin [12], la Théorie des Distributions de Laurent Schwartz [13], [14], du très parfait Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique de Jean-Michel Bony [2], des Cours de Topologie fondateurs de Gustave Choquet [5], Jacques Dixmier [6], et de la Topologie Générale de Bourbaki [3]. Les notions sur probabilités et martingales viennent principalement de Jacques Neveu [11] et du splendide et maniable petit livre de Williams [16]. Les notes manuscrites des cours de DEA et de master de recherche de Yves Meyer (94-2008) ont été une source constante d'inspiration. Une partie de leur contenu est reflétée dans les petits livres très amènes [9] et [10].

Parmi les articles en rapport avec les expériences numériques présentées, il faut citer le très joli article de Philippe Thevenaz, Michael Unser, et Leonid Yaroslavsky [15]. Pour les espaces de Sobolev, nous avons utilisé le livre classique de Robert Adams [1] et le manuel de Haïm Brezis [4]. Beaucoup d'aspects de l'analyse de Fourier appliquée sont très bien expliqués dans le manuel de Richard Gasquet et Patrick Witomsky [8] et ses exercices corrigés.

Chapitre 1

Abrégé de topologie générale

La topologie d'un espace métrique est bien connue du lecteur ; nous donnons ici une brève introduction à la topologie générale, permettant de définir les notions de convergence, de continuité, et de compacité quand un espace topologique n'est pas muni d'une distance. Le lecteur trouvera un exposé beaucoup plus complet dans [5], [6], [3].

Rappels de topologie générale

Définition 1.1 *On appelle espace topologique tout couple constitué d'un ensemble E et d'un ensemble \mathcal{O} de parties de E stable par intersection finie et union quelconque et contenant E et \emptyset . Les éléments de \mathcal{O} sont appelés les ouverts.*

Exercice 1 Montrer qu'un espace métrique muni de \mathcal{O} , défini comme l'ensemble de toutes les unions quelconques de boules ouvertes, est un espace topologique.

Définition 1.2 *Topologie induite : Si (E, \mathcal{O}) est un espace topologique et $A \subset E$, on appelle topologie induite par E sur A le couple (A, \mathcal{O}_A) où $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$.*

Exercice 2 Vérifier que la topologie induite est une topologie.

Exercice 3 Décrire la topologie induite sur $[0, 1]$ par celle de \mathbb{R} et celle induite sur une droite de \mathbb{R}^2 par la topologie euclidienne canonique de \mathbb{R}^2 .

Définition 1.3 *On appelle voisinage de $x \in E$ tout sous-ensemble de E contenant un ouvert contenant x et on notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x .*

Conséquences :

- Un ouvert est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, si A est voisinage de chacun de ses points et si $x \in A$, il existe W_x ouvert tel que $x \in W_x \subset A$. Donc A est la réunion de tous les W_x quand x parcourt A et de ce fait est ouvert.
- Les ouverts d'un espace sont connus dès que sont connus pour tout x les voisinages de x , ou même une base de voisinages (définition suivante).

Définition 1.4 On appelle base de voisinages de $x \in E$, toute partie \mathcal{U} de $\mathcal{V}(x)$ telle que si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U \subset V$.

Exemple classique

Un espace topologique (E, \mathcal{O}) est dit métrisable s'il existe une distance sur E telle que \mathcal{O} coïncide avec l'ensemble des unions arbitraires de boules. Une base de voisinages ouverts commode est alors constituée par les boules ouvertes elles-mêmes. Les boules ouvertes centrées en x forment une base de voisinages ouverts de x et également les boules ouvertes contenant x .

Définition 1.5 On appelle base d'ouverts de E , toute famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ de E vérifiant l'une des deux propriétés équivalentes suivantes,

- 1) Tout $x \in E$ a une base de voisinages constituée par une sous-famille de $(O_i)_{i \in I}$,
- 2) Tout ouvert de E est réunion d'une sous-famille de $(O_i)_{i \in I}$.

Exercice 4 Exemples :

- 1) Montrer que les boules ouvertes d'un espace métrique forment une base d'ouverts de cet espace.
- 2) Montrer qu'il en est de même pour les boules ouvertes de \mathbb{R}^N dont les rayons sont rationnels et les centres sont rationnels. C'est donc une base d'ouverts dénombrable.

Définition 1.6 Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire est ouvert. On appelle fermeture d'un ensemble A , notée \bar{A} , l'intersection de tous les fermés contenant A . On appelle ouverture, ou intérieur, de A , noté $\text{Intérieur}(A)$, l'union de tous les ouverts contenus dans A .

Exercice 5 Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé et qu'une union finie de fermés est un fermé.

Exercice 6 Adhérence Soit A une partie de E , on dit que $x \in E$ est adhérent à A si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$. On appellera adhérence de A , l'ensemble des points de E adhérents à A .

Montrer que \bar{A} et l'adhérence de A sont identiques et que la relation $A = \bar{A}$ caractérise les ensembles fermés.

Définition 1.7 On dit qu'une partie A de E est dense dans E si $\bar{A} = E$ et donc, de manière équivalente, si tout ouvert non vide de E rencontre A .

Par exemple l'ensemble des points à coordonnées rationnelles est dense dans \mathbb{R}^N .

Définition 1.8 Espace séparable On dit qu'un espace topologique est séparable s'il possède une partie dénombrable et dense.

Exercice 7 Exemple : montrer que l'espace métrique \mathbb{R}^N muni de la norme euclidienne canonique est séparable.

Définition 1.9 Espace séparé On dit que l'espace E est séparé si $\forall x, y \in E$, $x \neq y$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ et $\exists U \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 8 Donner un exemple simple d'espace topologique non séparé.

Tous les espaces topologiques que nous considérerons seront en fait séparés.

Définition 1.10 Convergence d'une suite

On dit qu'une suite x_n tend vers x dans E si pour tout voisinage V de x il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V$.

Proposition 1.1 *Tout fermé F est séquentiellement fermé, c'est-à-dire que si F est fermé et si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de F convergeant vers $x \in E$, alors $x \in F$.*

Démonstration Si on avait $x \in F^c$, qui est ouvert, il existerait un voisinage ouvert U de x tel que $U \subset F^c$. Mais $x_n \rightarrow x$ implique que $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$, ce qui contredirait $x_n \in F$. \circ

Définition 1.11 Valeur d'adhérence d'une suite

Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E , on dit que $x \in E$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si $\forall n, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists i \geq n$ tel que $x_i \in V$.

Exercice 9 Si on note $A_n = \{x_i, i \geq n\}$ alors vérifier que x est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si et seulement si $x \in \bigcap_n \overline{A_n}$.

Définition 1.12 Continuité en un point

Soient E et F deux espaces topologiques et f une application de E dans F . Soit $x_0 \in E$, on dit que f est continue en x_0 si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U) \subset V$.

Une application d'un espace topologique dans un autre est dite *continue* si elle est continue en tout point.

Théorème 1.1 *Une application f d'un espace topologique dans un autre est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert par f est un ouvert ou, de manière équivalente, si l'image réciproque de tout fermé est un fermé, ou, de manière équivalente, si l'image réciproque par f de chaque élément d'une base d'ouverts de F est un ouvert. On a aussi la propriété suivante : f est continue si et seulement si pour tout ensemble $A \subset E$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Exercice 10 Démontrer le théorème précédent !

Voici un exemple que nous utiliserons souvent : une application f de E dans \mathbb{R} est continue si et seulement si pour tout intervalle ouvert I de \mathbb{R} , l'ensemble $f^{-1}(I)$ est un ouvert. En effet, les intervalles ouverts forment une base de voisinages ouverts de \mathbb{R} . Il convient de vérifier que notre définition de la continuité généralise bien la notion de continuité séquentielle pour f , c'est-à-dire que $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Proposition 1.2 *Si $f : (E, \mathcal{O}) \rightarrow (F, \mathcal{U})$ est continue, alors elle est séquentiellement continue.*

Démonstration Soit x_n tendant vers x pour \mathcal{O} . Fixons $U \in \mathcal{U}$ tel que $f(x) \in U$ et montrons que $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U$. Or, f étant continue, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x . Donc $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in f^{-1}(U)$ et on a donc, comme désiré, $f(x_n) \in U$. \circ

Définition 1.13 Espace compact

On dit qu'un espace E est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Exercice 11

Soit E un espace topologique compact, montrer que toute suite de points de E possède une valeur d'adhérence.

Exercice 12 Montrer que l'image d'un compact par une fonction continue à valeurs dans un espace séparé est un compact.

Définition 1.14 On appelle topologie sur E la moins fine vérifiant une propriété P la topologie ayant cette propriété P et qui a le moins d'ouverts possible. Cette topologie \mathcal{U} est donc telle que pour toute autre topologie \mathcal{O} vérifiant P , on ait $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$.

Exercice 13 Montrer que la topologie \mathcal{U} peut être construite comme l'intersection de toutes les topologies vérifiant la propriété P . (Expliquer d'abord pourquoi cette intersection est non vide!)

Proposition 1.3 Soit $(E_j, \mathcal{O}_j)_{i \in J}$ une famille d'espaces topologiques et $\varphi_j : E \rightarrow E_j$ une famille d'applications définies sur un ensemble E . Les ouverts de la topologie la moins fine sur E rendant continues les applications φ_j sont tous de la forme :

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in F_i} \varphi_j^{-1}(U_j), \quad (1.1)$$

où U_j désigne un ouvert quelconque de E_j , F_i est un sous-ensemble fini quelconque de J et I est un ensemble quelconque d'indices.

La même formule est encore valide si on restreint les U_j à une base de voisinages ouverts de E_j .

Remarque 1.1 En conséquence, on a la base de voisinages de $x \in E$:

$$\bigcap_{j \in F} \varphi_j^{-1}(O_j),$$

où $F \subset J$ est fini, et O_j appartient à une base de voisinages de $\varphi_j(x)$ dans E_j . Donc on peut caractériser la convergence des suites pour cette topologie de la manière très simple suivante :

$x_n \rightarrow x$ pour la topologie \mathcal{O} si et seulement si $\varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x)$ pour tout i .

Lemme 1.1 Soient $(A_i)_{i \in J}$ une famille d'ensembles et $(J_i)_{i \in F}$ une famille de parties de J . Alors

$$\bigcap_{i \in F} \bigcup_{j \in J_i} A_j = \bigcup_{\psi \in \Psi} \bigcap_{i \in F} A_{\psi(i)},$$

où Ψ est l'ensemble de toutes les applications $i \in F \rightarrow \psi(i) \in J_i$.

Cette dernière formule implique que si \mathcal{A} est une famille d'ensembles, alors "toute intersection finie d'unions d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} est une union d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} ."

Démonstration Si x appartient à $\bigcap_{i \in F} \bigcup_{j \in J_i} A_j$, cela revient à dire que

$$\forall i \in F, \exists j (= \psi(i)) \in J_i, x \in A_j \Leftrightarrow$$

$$\exists \psi : F \rightarrow \cup_i J_i, \psi(i) \in J_i, \forall i \in F x \in A_{\psi(i)}.$$

◊

Démonstration de la proposition 1.3 Si les φ_i sont continues, tout élément de la forme (1.1) est bien un ouvert de E . Réciproquement, la famille des ensembles de la forme (1.1) est évidemment stable par union quelconque, et par intersection finie d'après le lemme 1.1. ◊

Définition 1.15 Topologie produit Soit (E_i, \mathcal{O}_i) des espaces topologiques. L'espace topologique produit $E = \prod_i E_i$ peut être muni de la topologie produit, définie comme la moins fine rendant les projections de E sur chaque E_i continues.

Théorème 1.2 de Tikhonov Soit $K = \prod_i K_i$ un produit de compacts. On note ses éléments $\omega = (\omega_i)_i$ et on le munit de la topologie produit, c'est-à-dire la moins fine rendant les projections $\omega \rightarrow w_i \in K_i$ continues. Alors K est compact.

1.1 Cas des espaces métriques

Nous rappelons ici un certain nombre de propriétés vraies dans les espaces métriques. Dans tout ce qui suit le couple (E, d) , ou plus simplement E , désignera un espace métrique muni d'une distance d . On rappelle aussi qu'un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy converge.

Exercice 14 Soit E un espace métrique alors

- 1) l'espace E est séparé,
- 2) si A est une partie de E et si $x \in E$ alors $x \in \bar{A} \iff d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$
 $\iff \exists (x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x$.

Exercice 15 Continuité séquentielle

Si E et F sont des espaces métriques, alors $f : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si elle est *séquentiellement continue*, c'est-à-dire si $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Exercice 16 Soit E un espace métrique. Soient $(x_n)_n$ une suite dans E et $x \in E$. Alors montrer que x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et seulement si il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers x .

Définition 1.16 Compacité séquentielle Si E est un espace métrique compact, on sait maintenant que de toute suite de points de E , on peut extraire une sous-suite convergente. On traduit cette propriété en disant qu'un espace métrique compact est *séquentiellement compact*.

Remarque 1.2 On verra à l'exercice ?? page ?? un exemple d'espace topologique compact qui n'est pas séquentiellement compact.

Théorème 1.3 Soit E un espace métrique, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'espace E est compact.
- (ii) Toute suite de points de E admet une valeur d'adhérence.
- (iii) Toute suite de points de E a une sous-suite convergente.

Exercice 17

Montrer le théorème de Tikhonov dans le cas un peu moins général suivant : $K = \prod_{n \in \mathbb{N}} K_n$ (produit dénombrable) et on suppose que K_n est métrisable et donc muni d'une distance d_n . Commencer par montrer que K est métrisable en posant

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n \text{diam}(K_n)},$$

où $\text{diam}(K_n) = \max\{d(x_n, y_n), x_n, y_n \in K_n\}$ est le diamètre de K_n et $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n$.

Théorème 1.4 Un espace métrique compact est complet.

Exercice 18 Montrer que les compacts de \mathbb{R}^N muni de la distance euclidienne canonique sont les fermés bornés.

Définition 1.17 On dit que $f : E \rightarrow F$ espaces métriques est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon \exists \eta, \forall x, y \in E (d(x, y) < \eta) \Rightarrow (d(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

On pose $m(r) := \sup_{d(x,y) < r} d(f(x), f(y))$. Montrer que f est uniformément continue si et seulement si $m(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$. On appelle m le module de continuité uniforme de f .

Exercice 19 Si E est un espace métrique compact, F métrique et si $f : E \rightarrow F$ est continue alors elle est uniformément continue.

Exercice 20 Montrer que toute fonction réelle continue sur un compact atteint son maximum et son minimum. On pourra considérer une suite minimisante et utiliser la compacité séquentielle et la continuité séquentielle...

Théorème 1.5 dit de prolongement

Soient E un espace métrique et F un espace métrique complet. Soit $X \subset E$, une partie dense dans E . Enfin soit $f : X \rightarrow F$ uniformément continue. Montrer qu'il existe un unique prolongement \tilde{f} de f , continu. De plus, \tilde{f} est uniformément continue.

Pour des compléments de topologie générale nous renvoyons aux ouvrages de G.Choquet et J.Dixmier, et à la Topologie Générale de N. Bourbaki.

1.2 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Exercice 21

Soit E un espace métrique et $A \subset E$ une partie non vide. Montrer que \bar{A} est compact si et seulement si de toute suite de points de A , on peut extraire une sous-suite convergent dans E .

Théorème 1.6 (Ascoli-Arzelà) Soit f_n une suite de fonctions définies sur un espace métrique compact (K, d) et à valeurs réelles. On suppose que la suite f_n a les deux propriétés suivantes :

- f_n est équicontinue : $\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall x, y \in K, \forall n \in \mathbb{N}, d(x, y) \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$.
- La suite $(f_n(x))_n$ est bornée pour tout $x \in K$.

Alors il existe une sous-suite de f_n qui converge vers une fonction continue f .

Démonstration Remarquons d'abord qu'il existe une suite de points $(x_k)_k$ qui est dense dans K . En effet, K est compact et donc on peut le recouvrir pour tout n par un nombre fini de boules de rayon plus petit que $\frac{1}{n}$. L'union des centres de ces boules est un ensemble dénombrable qui répond à la question.

On va alors extraire pour tout k de la suite f_n une sous-suite $f_{\varphi_k(n)}$ telle que $f_{\varphi_k(n)}(x_l)$ converge pour $l \leq k$ et telle que $f_{\varphi_k(n)}$ soit une sous-suite de $f_{\varphi_{k-1}(n)}$. On procède par extractions successives. Comme la suite $f_n(x_1)$ est bornée, la suite f_n admet une sous-suite convergente en x_1 que nous notons $f_{\varphi_1(n)}$. On extrait de cette sous-suite une nouvelle sous-suite $f_{\varphi_2(n)}$ qui converge aussi en x_2 , etc.. On applique alors le procédé dit d'extraction diagonale : on considère la suite de fonctions $g_n = f_{\varphi_n(n)}$. Elle converge en tout point de la suite x_k . On appelle $g(x_k)$ sa limite en x_k . Dès que $n \geq k$, la suite $f_{\varphi_n(n)}$ devient une sous-suite de $f_{\varphi_k(n)}$. Elle converge donc en x_k . La suite g_n converge donc en tout x_k . En fait, la fonction g est uniformément continue et se prolonge d'une manière unique en une fonction continue sur K , que nous noterons encore g . Voyons pourquoi. On a

$$|g(x_l) - g(x_k)| \leq |g(x_l) - g_n(x_l)| + |g(x_k) - g_n(x_k)| + |g_n(x_l) - g_n(x_k)|.$$

Le troisième terme est rendu inférieur à ε pour tout n si on impose $d(x_l, x_k) < \eta(\varepsilon)$. Les deux premiers termes tendent vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. On obtient donc $|g(x_l) - g(x_k)| \leq \varepsilon$ si $d(x_k, x_l) < \eta(\varepsilon)$. Donc g est uniformément continue sur la suite x_k et a d'ailleurs le même module d'uniforme continuité que la suite f_n . La fonction g est uniformément continue sur un ensemble dense dans K . Par le théorème 1.5 page 12, elle se prolonge de manière unique en une fonction uniformément continue sur K , avec le même module de continuité uniforme. Montrons pour finir que $g_n \rightarrow g$ uniformément. On fixe $\varepsilon > 0$, puis k assez grand pour

$$\forall x \in K, \exists l \leq k, d(x, x_l) \leq \eta(\varepsilon).$$

On fixe n_0 assez grand pour que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \forall l \leq k, |g_n(x_l) - g(x_l)| \leq \varepsilon.$$

En combinant les deux dernières inégalités, on a pour $n \geq n_0$ et x dans K ,

$$|g_n(x) - g(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_l)| + |g_n(x_l) - g(x_l)| + |g(x_l) - g(x)| \leq 3\varepsilon.$$

◦

Remarque 1.3 On peut montrer que le théorème d'Ascoli-Arzelà est encore valable si les fonctions f_n sont à valeurs dans un espace métrique complet et si on suppose, comme deuxième hypothèse, que pour tout x dans K , l'ensemble $(f_n(x))$ est relativement compact (c'est-à-dire de fermeture compacte), voir les ouvrages de [Choquet] et [Dixmier].

Corollaire 1.1 Toute famille f_n de fonctions L -lipschitziennes réelles, définies sur un compact K et telle que pour un certain point x_0 , $f_n(x_0)$ soit borné admet une sous-suite uniformément convergente vers une fonction également L -lipschitzienne.

Démonstration Comme K est compact, il est borné et on a donc $d(x, x_0) \leq M$ pour tout x dans K . D'où $|f_n(x)| \leq |f_n(x_0)| + LM$ est aussi borné. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà. \circ

Exercice 22 (longueur d'un arc rectifiable)

On appelle arc rectifiable un sous-ensemble C de \mathbb{R}^N qui est l'image d'une application Lipschitz $c : s \in [0, 1] \rightarrow c(s) \in \mathbb{R}^N$. On appelle longueur de l'arc, $l(C)$, l'infimum des constantes de Lipschitz des applications surjectives $c : [0, 1] \rightarrow C$. Montrer que cet infimum est atteint.

Marche à suivre : considérer une suite c_n dont les constantes de Lipschitz tendent vers $l(C)$. Extraire une sous-suite convergeant uniformément vers un arc c et montrer que c est Lipschitz et que sa constante de Lipschitz est égale à $l(C)$.

1.3 Exercices

Exercice 23 Démontrer le théorème 1.3 :

Soit E un espace métrique, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'espace E est compact.
- (ii) Toute suite de points de E admet une valeur d'adhérence.
- (iii) Toute suite de points de E a une sous-suite convergente.

Indication pour (iii) \Rightarrow (i) : Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E ,

- 1) montrer que $\exists r > 0$, tel que $\forall x \in E, \exists i \in I$, tel que $B(x, r) \subset O_i$.
- 2) montrer que E est recouvert par un nombre fini de O_i .

Exercice 24

Démontrer le théorème 1.5

Exercice 25 Montrer qu'un espace métrique compact est séparable.

Exercice 26

1) Soient E un espace vectoriel réel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé

- a) Montrer que toutes les normes sur E sont équivalentes.
- b) Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire, montrer que u est continue.

2) Soit $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$. On définit sur E , $N_0(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}|$ et $N_1(a + b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|)$.

- a) Vérifier que N_0 et N_1 sont des normes sur E .

Soit $x = \sqrt{2} - 1$, montrer que $\forall n \geq 1, x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ et $a_n b_n < 0$. En déduire que $(\sqrt{2} + 1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$.

b) Montrer que N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes sur E . (E est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie, commenter.)

Exercice 27 Soient E et F deux espaces vectoriels normés

a) Montrer que si F est complet, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est complet (donc E' est toujours complet).

b) Montrer que si $\overline{B_E}(0, 1)$ est compacte, la dimension de E est finie.

Exercice 28 Soient E un espace vectoriel normé et $f \in E'$, $f \neq 0$. Soit $H = \{x \in E : f(x) = 0\}$, on se propose de montrer que

$$\forall x \in E, \quad d(x, H) = \inf_{y \in H} \|x - y\| = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \quad (\star)$$

- 1) Vérifier que $|f(x)| \leq \|f\| d(x, H)$, $\forall x \in E$.
- 2) Soit $u \in E \setminus H$, en notant que $y = x - \frac{f(x)}{f(u)} u$ est dans H , montrer que $d(x, H) \leq \frac{|f(x)|}{|f(u)|} \|u\|$ et prouver (\star) .
- 3) Soit $E = \mathcal{C}_0 = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \text{ tel que } x_n \rightarrow 0\}$ que l'on munit de

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

- a) Vérifier que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
- b) Soient $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ et $H = \text{Ker} f$. Vérifier que $f \in E'$, donner une expression de $d(x, H)$. $\|f\|_{E'}$ est-elle atteinte?

Exercice 29 Théorèmes du point fixe

- 1) Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $f : E \rightarrow E$ une application k -lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f admet un unique point fixe $x = f(x)$.
- 2) Soit (E, d) un espace métrique complet et soit Λ un espace topologique. Soit $f : E \times \Lambda \rightarrow E$ telle que
 - $\forall x \in E, \lambda \rightarrow f(x, \lambda)$ est continue de Λ dans E ,
 - $\exists k < 1, \forall \lambda \in \Lambda, x \rightarrow f(x, \lambda)$ est k -lipschitzienne de E dans E . On pose $f_\lambda(x) = f(x, \lambda)$. Si a_λ est l'unique point fixe de f_λ , montrer que $\lambda \rightarrow a_\lambda$ est continue de Λ dans E .
- 3) Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

- 4) Soit C un convexe compact dans E espace vectoriel normé et soit $f : C \rightarrow C$ 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe (pour z fixé dans C , considérer $f_n(x) = \frac{1}{n+1}z + \frac{n}{n+1}f(x)$).

Exercice 30

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = (f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt)^{1/2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{[0, 1]} |f(x)|$.

- a) Vérifier que N est une norme sur E .
- b) Montrer que pour toute f dans E , $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.
- c) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes sur E .

Exercice 31

Soit E un espace métrique complet tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon ε , montrer que E est compact.

Exercice 32

Soient E et F deux espaces de Banach. On note $B_E = \overline{B_E(0, 1)}$. On dit que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur compact si $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F .

- 1) Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim \text{Im} T < \infty$, montrer que T est compact.
- 2) Soit E l'espace de Banach $\mathcal{C}[0, 1]$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{[0, 1]} |f(x)|$. Soit $K \in \mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1])$. Pour $f \in E$, on définit $T(f)$ par

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy.$$

Vérifier que $T(f) \in E$ et que $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Puis, montrer que T est compact.

Exercice 33 Soit $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} , à valeurs réelles. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On souhaite montrer ici que E n'est pas séparable.

On note $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites constituées de 0 ou 1.

- 1) Montrer que A n'est pas dénombrable.
- 2) Vérifier que $\forall z = (z_n)_n \in A$, il existe $f_z \in E$ telle que $f_z(n) = z_n, \forall n, 0 \leq f_z(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ et telle que $z \neq t \Rightarrow \|f_z - f_t\|_\infty = 1$.
- 3) Supposer qu'il existe une suite $(g_n)_n$ dense dans E et construire une injection de A dans \mathbb{N} . Conclure.

Exercice 34

Pour p réel et $0 < p < \infty$, on note

$$\ell^p = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

Pour $1 \leq p < \infty$, on note $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Enfin, on note

$$\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} \text{ tel que } \sup_n |x_n| < \infty\}$$

que l'on munit de $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$.

Enfin on note $e^n = (\delta_{ni})_{i \geq 1}$ où $\delta_{ni} = 1$ si $i = n$, $\delta_{ni} = 0$ sinon.

I.- Etude de ℓ^p quand $1 \leq p \leq \infty$.

Préliminaire : Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

1) Pour $x = (x_n) \in \ell^p$, on note $x^N = \sum_{n=1}^N x_n e^n$. Vérifier que si $x \in \ell^p$ avec $1 \leq p < \infty$, alors $\|x^N - x\|_p \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ (on écrira alors $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^n$). Par contre, vérifier que $\exists x \in \ell^\infty$ tel que $\|x^N - x\|_\infty$ ne tend pas vers 0.

2) Si $1 \leq p < \infty$, montrer que ℓ^p est séparable.

3) On souhaite, dans cette question, démontrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Soit $A = \{x \in \ell^\infty : \forall n, x_n = 0 \text{ ou } 1\}$, vérifier que $\forall x, y \in A$ tels que $x \neq y$, $\|x - y\|_\infty \geq 1$.

Si D est une partie dense dans ℓ^∞ , construire une injection de A dans D et conclure.

4) Soit $1 < p < \infty$ et soit $p' = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Montrer que $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$. En déduire que $\forall x = (x_n)_n \in \ell^p, \forall y = (y_n)_n \in \ell^{p'}, \forall \lambda > 0,$

$$\sum_{n \geq 1} |x_n y_n| \leq \frac{1}{p} \|x\|_p^p \lambda^{p-1} + \frac{1}{\lambda^{p'}} \|y\|_{p'}^{p'}.$$

En choisissant bien λ , montrer l'inégalité

$$\sum_{n \geq 1} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

Vérifier que cette inégalité est encore vraie avec $p = 1$ et $p' = \infty$.

5) Soit $p' = \infty$ si $p = 1$ et $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Soit $y = (y_n)_n \in \ell^{p'}$. On considère

$$\begin{aligned} f : \ell^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sum_{n \geq 1} x_n y_n, \end{aligned}$$

avec $x = (x_n)_n$. Montrer que $f \in (\ell^p)'$. On pose $\Lambda_y = f$ et on définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \Lambda : \ell^{p'} &\longrightarrow (\ell^p)' \\ y &\longmapsto \Lambda_y, \end{aligned}$$

où $\langle \Lambda_y, x \rangle = \sum_1^\infty x_n y_n, \forall x = (x_n)_n \in \ell^p$.

a) Montrer que Λ est une isométrie.

b) Montrer que Λ est un isomorphisme.

6) Soit C_0 l'espace des suites de réels $(x_n)_n$ qui tendent vers 0. On rappelle que C_0 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach. Identifier le dual topologique $(C_0)'$ de C_0 .

II.- Etude de ℓ^p pour $0 < p < 1$.

On pose $d(x, y) = \sum_1^\infty |x_n - y_n|^p$ pour $x, y \in \ell^p$.

1) Vérifier que ℓ^p est un espace vectoriel (réel) et que d est une distance sur ℓ^p qui vérifie $\forall x, y \in \ell^p, d(x, y) = d(0, x - y)$.

L'espace (ℓ^p, d) est complet, c'est la même démonstration que dans la partie I.

2) Pour $x = (x_n) \in \ell^p$ on note $x^N = \sum_{n=1}^N x_n e^n$. Vérifier que $d(x^N, x) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ et que $\ell^p \subset \ell^1$.

3) L'objet de cette question est de montrer que les boules (pour d) ne sont pas convexes.

a) D'abord, montrer que si E est un espace vectoriel et si une partie $A \subset E$ est convexe alors $\forall N$ entier, $N \geq 1, \forall (x_1, \dots, x_N) \in A^N, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in [0, 1]^N$

tels que $\sum_1^N \lambda_i = 1$, on a $\sum_1^N \lambda_i x_i \in A$.

b) Soit $R > 0$, montrer que $\exists \alpha > 0$, tel que $\forall n \geq 1, \alpha e^n \in B_d(0, R)$ et que $\forall \beta > 0$,

$$\frac{\alpha e^n}{n^\beta} \in B_d(0, R).$$

c) En déduire que $B_d(0, R)$ n'est pas convexe (raisonner par l'absurde) et conclure.

4) En reprenant les notations de la question I-5), soit $y \in \ell^\infty$, montrer que Λ_y est une application bien définie, linéaire et continue de (ℓ^p, d) à valeurs dans \mathbb{R} .

5) On note $(\ell^p)'$ l'ensemble des applications linéaires continues de (ℓ^p, d) à valeurs dans \mathbb{R} .

On définit l'application Λ , comme dans la partie I, par

$$\begin{aligned} \Lambda : \ell^\infty &\longrightarrow (\ell^p)' \\ y &\longmapsto \Lambda_y, \end{aligned}$$

où $\langle \Lambda_y, x \rangle = \sum x_n y_n, \forall x \in \ell^p$. Montrer que Λ est linéaire bijective.

Chapitre 2

Espaces de Hilbert

Définition 2.1 Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire (u, v) et tel que $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ soit une norme pour laquelle H soit complet. Un espace de Hilbert hermitien est un espace vectoriel sur \mathbb{C} muni d'un produit hermitien (u, v) c'est-à-dire vérifiant

$$(u, v) = \overline{(v, u)}, (\lambda u, v) = \lambda(u, v), (u + v, w) = (u, w) + (v, w).$$

et tel que $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ soit une norme rendant H complet. Remarquons aussi que

$$(u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v) \text{ et } (u, v + w) = (u, v) + (u, w).$$

Dans toute la suite, nous traiterons le cas général des espaces de Hilbert hermitiens, le cas des Hilbert réels se déduisant immédiatement.

Exemple 2.1 On pose $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $u = (u_1, \dots, u_n, \dots)$ avec $u_n \in \mathbb{C}$ et vérifiant $\sum_n |u_n|^2 < \infty$. Muni du produit scalaire $(u, v) = \sum_n u_n \overline{v_n}$, c'est un espace de Hilbert. $L^2(\mathbb{R}^N)$, muni du produit scalaire $(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} dx$ est également un espace de Hilbert : on a vu qu'il est complet. Remarquer que $l^2(\mathbb{N})$ peut être plongé naturellement dans $L^2(\mathbb{R})$ en posant $u(x) = u_n$ si $x \in [n, n+1[$ et qu'il apparaît alors sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$. La complétude de $L^2(\mathbb{R})$ implique donc la complétude de $l^2(\mathbb{N})$.

Proposition 2.1 Nous avons toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

Démonstration la démonstration est évidemment la même qu'en dimension finie puisqu'elle se fait dans le plan de f et g . On pose $(f, g) = e^{i\theta} |(f, g)|$ et on développe $\|f + te^{i\theta}g\|^2 \geq 0$, ce qui donne

$$\|f\|^2 + t(f, e^{i\theta}g) + t(e^{i\theta}g, f) + t^2\|g\|^2 \geq 0, \text{ soit}$$

$$\|f\|^2 + 2t|(f, g)| + t^2\|g\|^2 \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime que le discriminant de ce trinôme est négatif. \circ

La relation de Pythagore reste valable : si f et g sont orthogonaux, alors

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Cette relation s'étend à une suite de vecteurs orthogonaux deux à deux, f_k . On a alors

$$\left\| \sum_k f_k \right\|^2 = \sum_k \|f_k\|^2.$$

Grâce à la complétude, le premier membre de cette égalité, $\sum_k f_k$, est bien un élément de H si le deuxième membre est une série convergente. On a donc

Proposition 2.2 *Soit H un Hilbert et u_n une suite d'éléments de H . Si la série u_n est composée d'éléments orthogonaux deux à deux et si $\sum_n \|u_n\|^2$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ converge dans H . Si la série de terme général $\|u_n\|$ est convergente, la série $\sum_n u_n$ converge dans H .*

Démonstration Les deux convergences découlent de la complétude de H . En effet, dans le premier cas, la suite $v_k = \sum_0^k u_n$ est de Cauchy puisque pour $k \geq l$, par le théorème de Pythagore, $\|v_k - v_l\|^2 = \sum_{l+1}^k \|u_n\|^2$. Dans le second cas, elle est également de Cauchy puisque, par l'inégalité triangulaire, $\|v_k - v_l\| \leq \sum_{l+1}^k \|u_n\|$. \circ

Théorème 2.1 *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé et non vide de H . Pour tout $f \in H$ il existe un unique point de C , appelé projection de f sur H dont la distance à f soit minimum. Cette projection se caractérise comme l'unique point g de C tel que*

$$\forall h \in C, \operatorname{Re}(f - g, h - g) \leq 0. \quad (2.1)$$

Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H , la projection de f est l'unique point $g \in C$ tel que $f - g$ soit orthogonal à tous les éléments de C .

Lemme 2.1 *(identité du parallélogramme). La somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.*

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2).$$

Démonstration du théorème 2.1 Montrons d'abord l'unicité. S'il existait deux éléments g_1 et g_2 réalisant la projection de f sur C , on aurait en considérant leur milieu $\frac{g_1 + g_2}{2}$ et en appliquant l'identité du parallélogramme à $u = f - g_1$ et $v = f - g_2$,

$$\frac{1}{2}\|2f - (g_1 + g_2)\|^2 = \|f - g_1\|^2 + \|f - g_2\|^2 - \frac{1}{2}\|g_1 - g_2\|^2.$$

Donc $\|f - \frac{g_1 + g_2}{2}\|^2 < d(f, C)^2$. Mais comme $\frac{g_1 + g_2}{2}$ est dans C , c'est impossible. On montre maintenant l'existence de la projection. Soit g_n une suite de C telle que $\|f - g_n\| \rightarrow d(f, C)$. En utilisant de nouveau l'inégalité du parallélogramme,

$$\frac{1}{2}\|g_n - g_m\|^2 = \|f - g_n\|^2 + \|f - g_m\|^2 - 2\|f - \frac{g_n + g_m}{2}\|^2.$$

Quand n et m tendent vers l'infini, le membre de droite tend vers 0. En effet, $\|f - g_n\|$ et $\|f - g_m\|$ tendent vers $d(f, C)$ et on a $-2\|f - \frac{g_n + g_m}{2}\| \leq -2d(f, C)$, puisque $\frac{g_n + g_m}{2}$ appartient à C .

La suite g_n est donc de Cauchy et converge vers un élément g de C , car C est fermé. Donc $\|f - g_n\| \rightarrow \|f - g\|$ et donc $\|f - g\| = d(f, C)$. Montrons l'inégalité

variationnelle (2.1). Pour tout $h \in C$, et $t \in [0, 1]$, les points $g + t(h - g)$ du segment $[g, h]$ appartiennent à C . On a donc

$$\forall t \in [0, 1], \|f - g\|^2 \leq \|f - g - t(h - g)\|^2 \text{ ce qui est équivalent à } \quad (2.2)$$

$$\forall t \in [0, 1], t^2\|h - g\|^2 - 2t\operatorname{Re}(f - g, h - g) \geq 0.$$

On divise par $t > 0$ et on fait tendre t vers 0^+ pour obtenir (2.1). Réciproquement, si (2.1) est vérifiée pour tout $h \in C$, (2.2) aussi et en faisant $t = 1$ on voit que $\|f - g\|$ réalise la distance minimale de f à un point de C .

Considérons pour terminer le cas où C est un sous-espace vectoriel fermé de H . Soit g la projection de f . Pour tout v dans C , $g + e^{i\theta}v$ appartient à C . On a donc $\operatorname{Re}(e^{i\theta}(v, g - f)) \leq 0$ pour tout θ et donc $(v, g - f) = 0$. Réciproquement, si $g \in C$ vérifie $(v, g - f) = 0$ pour tout $v \in C$, on a $(v - g, g - f) = 0$ pour tout v dans C et par la deuxième partie du théorème 2.1, g est bien la projection de f sur C . \circ

Exercice 1 Démontrer en utilisant (2.1) que la projection P sur un convexe fermé est une application contractante : $\|Pf_1 - Pf_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$.

Définition 2.2 On appelle orthogonal d'un sous-ensemble A de H et note A^\perp l'ensemble

$$A^\perp = \{v, \forall f \in A, (v, f) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de H .

Corollaire 2.1 Si F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H , alors tout élément de H se décompose de manière unique sous la forme

$$f = g + h, \quad g \in F, \quad h \in F^\perp \quad (2.3)$$

où g est la projection de f sur F et h la projection de f sur F^\perp . On a donc

$$H = F + F^\perp, \quad (F^\perp)^\perp = F, \quad H^\perp = \{0\}. \quad (2.4)$$

Si $A \subset H$, on a toujours

$$(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Vect}(A)}.$$

Démonstration La relation (2.3) est une conséquence du théorème 2.1. Par (2.1), la projection g de f sur F est caractérisée par le fait que $f - g = h \in F^\perp$. Comme $f - h = g \in F \subset F^{\perp\perp}$, h est par cette même caractérisation la projection de f sur F^\perp . On a donc $H = F \oplus F^\perp$. Montrons que $F = F^{\perp\perp}$. On a immédiatement $F \subset F^{\perp\perp}$. Donc la décomposition $f = g + h$ sur F et F^\perp est aussi une décomposition sur $F^{\perp\perp}$ et F^\perp . F^\perp étant fermé, cette dernière décomposition est unique. Or si $f \in F^{\perp\perp}$ on a $f = f + 0$ qui est une décomposition sur $F^{\perp\perp}$ et F^\perp . Par identification on obtient $f = g$ et donc $f \in F$.

On remarque enfin que $A^\perp = \overline{\operatorname{Vect}(A)}^\perp$. En effet, si un élément f est orthogonal à A , il est orthogonal aux combinaisons linéaires d'éléments de A et donc à $\operatorname{Vect}(A)$ et par un passage à la limite immédiat à $\overline{\operatorname{Vect}(A)}$. Utilisant (2.4), on obtient alors

$$(A^\perp)^\perp = (\overline{\operatorname{Vect}(A)})^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Vect}(A)}.$$

\circ

Corollaire 2.2 et définition On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est total si l'espace vectoriel $\text{Vect}(A)$ engendré par A est dense dans H . Pour que A soit total dans H , il faut et il suffit que A^\perp soit réduit à $\{0\}$.

Démonstration Si A est total, $\overline{\text{Vect}(A)}$ est égal à H et donc $A^\perp = \overline{\text{Vect}(A)}^\perp = H^\perp = \{0\}$. Réciproquement, si $A^\perp = 0$, on a $\overline{\text{Vect}(A)}^\perp = \{0\}$ et donc par (2.4) $\overline{\text{Vect}(A)} = H$, ce qui signifie que A est total. \circ

Théorème 2.2 (Riesz) Pour tout $f \in H$, l'application $v \in H \rightarrow (v, f)$ est une forme linéaire continue sur H . Réciproquement, si \tilde{f} est une forme linéaire continue sur H , il existe un unique élément $f \in H$ tel que

$$\tilde{f}(v) = (v, f).$$

En d'autres termes, H est son propre dual. Il est donc aussi le dual de son dual, propriété que l'on appelle la réflexivité.

Démonstration La première assertion découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrons la réciproque. Soit \tilde{f} une forme linéaire continue et non nulle sur H et L son noyau, qui est un espace vectoriel fermé. Comme $\tilde{f} \neq 0$, L est un sous-espace propre de H (c'est-à-dire strictement inclus dans H). Comme L est fermé, par la relation (2.4) L^\perp n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $g \in L^\perp$, non nul. On a donc $\tilde{f}(g) \neq 0$ et on pose pour tout $v \in H$

$$v = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)}g + (v - \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)}g) = v_1 + v_2.$$

Le second terme vérifie $\tilde{f}(v_2) = 0$ et appartient donc à L . Comme $g \in L^\perp$, on a donc

$$(v, g) = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)}\|g\|^2.$$

Il en résulte que

$$\tilde{f}(v) = (v, \frac{\tilde{f}(g)}{\|g\|^2}g).$$

\circ

2.1 Bases hilbertiennes

On rappelle qu'un espace métrique est dit séparable s'il contient une suite dense.

Définition 2.3 Soit un espace de Hilbert séparable. On appelle base hilbertienne de H un système orthonormé fini ou infini $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est total. En d'autres termes, (e_n) est une base hilbertienne si $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$ et $\overline{\text{Vect}((e_n)_n)} = H$.

Théorème 2.3 Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Démonstration Soit $(f_n)_n$ une suite dense de H . On en extrait par récurrence sur n un sous-système libre (que nous appellerons encore par commodité (f_n)), c'est-à-dire tel qu'aucun vecteur de la suite n'est combinaison linéaire des autres. Le système obtenu n'est plus nécessairement dense, mais il reste total. On applique alors le procédé de Gram-Schmidt à la suite f_n . Cela veut dire qu'on pose par récurrence

$$g_1 = f_1, \quad g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^n (f_{n+1}, g_k) \frac{g_k}{\|g_k\|^2},$$

ce qui donne un système orthogonal et on pose finalement $e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$, ce qui donne une suite e_n orthonormée. Le système est bien total, puisque les e_n engendrent les f_n . Cela peut se vérifier par une simple récurrence, ou bien en remarquant que la tout n la matrice de passage de (g_1, \dots, g_n) à (f_1, \dots, f_n) est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Donc le système (e_n) est une base hilbertienne. \circ

Théorème 2.4 Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H . Alors tout élément de H peut s'écrire comme la somme d'une série convergente

$$f = \sum_n (f, e_n) e_n = \sum_n c_n(f) e_n \quad (2.5)$$

et les coordonnées sur la base vérifient l'égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_n |c_n(f)|^2. \quad (2.6)$$

Réciproquement, si c_n est une suite vérifiant $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, la série $\sum_n c_n e_n$ converge dans H et sa somme f vérifie $c_n(f) = c_n$.

Démonstration On pose $f_m = \sum_1^m c_n(f) e_n$. On vérifie que $(f - f_m, e_n) = 0$ pour $n \leq m$. Par le théorème 2.1 des projections, cela veut dire que f_m est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les e_n pour $0 \leq n \leq m$. Par la relation (2.3) et le théorème de Pythagore, on déduit que $\|f_m\|^2 \leq \|f\|^2$. Toujours par le théorème de Pythagore, on a donc

$$\|f_m\|^2 = \sum_1^n |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2, \quad (2.7)$$

ce qui prouve que la série $\sum_n c_n(f) e_n$ est convergente dans H (proposition 2.2). Appelons g sa somme. Reste à montrer que $f = g$. Mais si $n \leq m$, on voit que $(f_m - g, e_n) = 0$ et en passant à la limite quand $m \rightarrow \infty$, on obtient $(f - g, e_n) = 0$. Donc $f - g$ est orthogonal à un système total et est donc nul. La relation de Parseval s'obtient en passant à la limite dans (2.7).

La réciproque du théorème est immédiate en reprenant les arguments précédents.

\circ

Exercice 2 (Inégalité de Parseval) Montrer que si (e_n) est un système orthonormé quelconque de H , alors $\sum_n |(e_n, f)|^2 \leq \|f\|^2$. Montrer que si cette

inégalité est une égalité pour tout $f \in H$, alors (e_n) est une base hilbertienne. Montrer que tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.

Corollaire 2.3 *Tout espace de Hilbert séparable est isométrique à $l^2(\mathbb{N})$. Il suffit d'associer à $f \in H$ son vecteur de coordonnées sur une base hilbertienne, $c = (c_1(f), \dots, c_n(f), \dots)$. En particulier, on a*

$$(f, g) = \sum_n c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

Exercice 3 Montrer qu'une forme bilinéaire $a(u, v)$ sur un espace vectoriel normé est continue si et seulement si il existe C tel que $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$.

2.2 Convergence faible

Définition 2.4 *On dit qu'une suite u_n dans un Hilbert converge faiblement vers $u \in H$ si pour tout $v \in H$ on a $(v, u_n) \rightarrow (v, u)$. On écrit alors $u_n \rightharpoonup u$.*

Proposition 2.3 *Si $u_n \in H$ séparable est bornée ($\|u_n\| \leq C$), alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge faiblement :*

$$\forall v \in H, (u_{n_k}, v) \rightarrow (u, v)$$

et on a

$$\|u\| \leq \liminf_n \|u_n\|.$$

Démonstration On utilise l'isomorphisme avec $l^2(\mathbb{N})$ muni de la base canonique $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Par commodité on notera encore u_n une sous-suite de u_n extraite par un procédé d'extraction diagonale de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $(u_n, e_k) \rightarrow x_k$. Ceci est possible car par le théorème de Cauchy-Schwartz, $|(u_n, e_k)| \leq \|u_n\| \leq C$ est borné. Pour plus de détails sur le procédé d'extraction diagonale, voir le théorème 1.6. En appliquant le lemme de Fatou à la suite de suites (u_n, e_k) , $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\sum_k x_k^2 \leq \liminf_n \sum_k |(u_n, e_k)|^2 = \liminf_n \|u_n\|^2 \leq C^2.$$

Posons $u = \sum_k x_k e_k$. Alors $u \in H$ et

$$\|u\|^2 = \sum_k |x_k|^2 \leq \liminf_n \|u_n\|^2.$$

Finalement montrons que $(u_n, v) \rightarrow (u, v)$ pour tout $v \in H$. C'est immédiat quand v est une combinaison linéaire finie des e_n et donc pour v dans un sous-ensemble dense D de H . Prenons maintenant v quelconque dans H . On fixe ε , puis $w \in D$ tel que $\|v - w\| \leq \varepsilon$. On a $|(u_n - u, v)| \leq |(u_n - u, w)| + |(u_n - u, w - v)|$. Le premier terme est petit pour n grand. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité triangulaire, le second est plus petit que $2C\varepsilon$. \circ

Exercice 4 On pose dans $H = L^2(0, 2\pi)$, $u_n(x) = \sin(nx)$ et $v_n(x) = |\sin(nx)|$. Montrer que ces suites convergent faiblement dans H mais pas fortement. Calculer leur limite faible.

Décomposition d'images sur la base de Haar Nous nous plaçons dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Nous considérons tout d'abord la fonction de $L^2(\mathbb{R})$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous définissons ensuite $I(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$, puis les trois fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H_1(x, y) = H(x)I(y), \quad H_2(x, y) = I(x)H(y) \quad \text{et} \quad H_3(x, y) = H(x)H(y).$$

Enfin nous définissons

$$H_{i,j_1,j_2}^k(x, y) = 2^k H_i(2^k x - j_1, 2^k y - j_2), \quad k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3.$$

On peut montrer (voir l'exercice 2) que ces fonctions forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Donc si pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ nous définissons les coefficients

$$c_{i,j_1,j_2}^k(f) = \langle f, H_{i,j_1,j_2}^k \rangle,$$

alors

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{k,j_1,j_2 \in \mathbb{Z}} c_{i,j_1,j_2}^k(f) H_{i,j_1,j_2}^k$$

dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour illustrer cette décomposition dans le cas d'une image, nous considérons, pour k_1 fixé, une fonction v_{k_1} appartenant à l'espace V_{k_1} des fonctions constantes sur les hypercubes $C^{k_1,z} = 2^{-k_1}(z + [0, 1]^2)$, $z \in \mathbb{Z}^2$, et supposons de plus que le support de v_{k_1} est inclus dans $[0, 1]^2$. Une telle fonction représente une image numérique comme nous l'avons vu au paragraphe ?? (voir la figure ??). Dans ce cas, les coefficients $c_{i,j_1,j_2}^k(v_{k_1})$ sont nuls pour $j_1 \geq 2^k$, $j_1 < 0$, $j_2 \geq 2^k$, $j_2 < 0$ ou $k > k_1$ (le vérifier!). Figure 2.1, nous représentons les coefficients de l'image numérique représentée figure ??, en haut à gauche (il s'agit donc de v_8 , image prenant 256×256 valeurs). Pour chaque valeur de k ("échelle") entre 6 et 8, et chaque valeur de i ("orientation") entre 1 et 3, nous représentons une fonction constante par morceaux, dont la valeur prise en $2^{-k}((j_1, j_2) + [0, 1]^2)$ est $\log(1 + |c_{i,j_1,j_2}|)$, pour $j_1, j_2 = 0, \dots, 2^k - 1$ (la fonction $\log(1 + |x|)$ est utilisée car c'est une fonction croissante qui permet d'atténuer les très fortes variations des modules des coefficients $|c|$, tout en donnant une idée de leur valeurs respectives).

Revenons maintenant sur la figure ?? . Dans le cadre des espaces de Hilbert, les images v_k sont les projections d'une fonction v de $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur les espaces V_k . D'autre part, pour montrer que les (H_{i,j_1,j_2}^k) forment une base de $L^2(\mathbb{R}^2)$, on montre que si W_k est l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur les hypercubes de côtés 2^{-k} et à moyenne nulle, les $(H_{i,j_1,j_2}^k(x, y))$ forment une base de W_k (voir l'exercice 2). On peut en fait montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $V_{k+1} = V_k \oplus W_k$. En ce sens, la décomposition de la figure 2.1 représente les détails ajoutés à l'image v lorsque l'on passe de la représentation v_k à la représentation v_{k+1} . Le fait de s'intéresser aux familles de fonctions $(H_{i,j_1,j_2}^k(x, y))$ à i fixé permet de voir les détails correspondant aux trois directions associées aux fonctions H_1, H_2 et H_3 : respectivement verticale, horizontale et diagonale. Remarquons également qu'en vertu des propriétés énoncées ci-dessus, l'image v_{k_1} peut s'écrire, pour $0 \leq k_0 \leq k_1 - 1$, :

$$v_{k_1} = v_{k_0} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \sum_{j_1, j_2=0}^{2^k-1} c_{i,k,j_1,j_2} H_{i,j_1,j_2}^k. \quad (2.9)$$

Ce type de décomposition en une image à une certaine précision, et en images de détails, utilisant des fonctions de moyenne nulle et à support compact, est à la base de la théorie mathématique des ondelettes, qui a de nombreuses applications en traitement du signal et des images. La décomposition particulière présentée ici repose sur les fonctions H_{i,j_1,j_2}^k , et les coefficients c_{i,j_1,j_2}^k sont les coefficients d'ondelettes de l'image dans cette base.

A titre d'exemple, nous illustrons une application classique de la théorie des ondelettes : la compression d'images. Le but de la compression est de représenter un signal discret $(s_n)_{n=0,\dots,N}$ par un nombre minimum de coefficients $(c_n)_{n=0,\dots,N'}$, $N' < N$. On parle de compression sans perte lorsque l'on peut retrouver le signal (s_n) à partir des (c_n) , et de compression avec perte lorsque l'on ne peut que retrouver une approximation (\tilde{s}_n) de (s_n) . Nous montrons figure 2.2 un exemple de compression avec perte dans le cas des images. Pour un certain $k_1 \in \mathbb{N}$, nous considérons l'image numérique v_{k_1} (projection de v sur l'espace V_{k_1}). Nous supposons à nouveau que la fonction v est nulle en dehors de $[0, 1]^2$. Nous utilisons ensuite la formule 2.9. L'idée de la compression par ondelettes est de ne garder qu'un petit nombre des coefficients c_{i,k,j_1,j_2} pour représenter l'image. Pour $i = 1, \dots, 3$, $k = k_0, \dots, k_1 - 1$, nous définissons $E_{i,k}$ ensemble des 10 % des coefficients de plus grand module parmi $\{c_{i,k,j_1,j_2} \mid j_1, j_2 = 0, \dots, 2^k - 1\}$. Sur la figure 2.2, nous montrons l'image obtenue par la formule suivante avec $k_1 = 8$ et $k_0 = 6$:

$$\tilde{v}_{k_1} = a_{k_0} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \sum_{E_{i,k}} c_{i,k,j_1,j_2} H_{i,j_1,j_2}^k(x, y). \quad (2.10)$$

Bien que le nombre de coefficients utilisé pour décrire le signal ait été grandement réduit (10 fois si on néglige la fonction a_{k_0}), le résultat reste visuellement acceptable. En pratique, les fonctions de base utilisées sont plus complexes que les H_i^k (plus régulières) et le choix du nombre de coefficients à garder plus subtil (pas forcément le même pour chaque "échelle" k). Ceci permet en particulier d'atténuer les zones carrées homogènes, visibles sur la figure 2.2.

2.3 Exercices

Exercice 5

1) Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx,$$

et trouver

$$\max \int_{-1}^1 x^3 g(x) dx,$$

où g est soumis aux contraintes

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 xg(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 g(x) dx = 0; \quad \int_{-1}^1 |g(x)|^2 dx = 1.$$

2) Si $x_0 \in H$ et si M est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H , énoncer le problème de maximum correspondant à $\min\{\|x_0 - x\|, x \in M\}$ comme dans la question précédente.

Exercice 6 Lemme de Grothendieck

Soit Ω un espace mesuré et μ une mesure de probabilité sur Ω . Soit S un



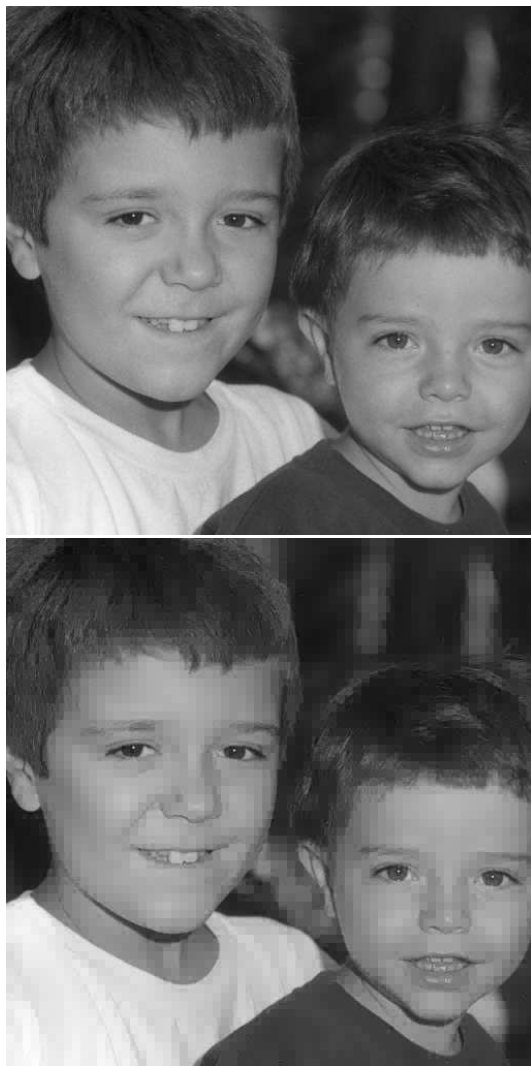


FIGURE 2.2 – Exemple de compression d'images dans une base hilbertienne. A gauche, l'image originale (même image que figure 2.1), à droite l'image obtenue en ne gardant que 10% des coefficients dans la base de Haar (voir la formule (2.10)).

sous-espace vectoriel fermé de $L^1(\mu)$ tel que $S \subset L^\infty(\mu)$. On va montrer que $\dim S < \infty$.

1) Montrer que $\exists C, M$ tels que $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leq C \|f\|_1$ puis que $\|f\|_\infty \leq M \|f\|_2$.

2) Vérifier que $(S, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert. Soit Φ_1, \dots, Φ_n une famille orthonormée quelconque de S . Pour $c = (c_i)_i \in \overline{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, on définit

$$f_c(x) = \sum_1^n c_i \Phi_i(x).$$

Vérifier que $\forall c \in \overline{B}(0, 1), \|f_c\|_\infty \leq M$.

Montrer qu'il existe $\Omega' \subset \Omega$ avec $\mu(\Omega') = 1$ tel que $\forall x \in \Omega', \forall c \in \overline{B}(0, 1)$ on ait $|f_c(x)| \leq M$. En déduire que

$$\sum_1^n |\Phi_i(x)|^2 \leq M^2, \quad \text{p.p.}$$

Conclure.

Exercice 7 Base de Haar

On pose $H(x) = 1$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $H(x) = -1$ si $\frac{1}{2} \leq x < 1$. C'est la fonction de Haar. On pose

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

1) Dessiner les fonctions de Haar pour $l = 1, 2$. Démontrer que ces fonctions forment un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

2) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]$ et qui sont constantes sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j} . On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j , l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des intervalles de longueur 2^{-j} et à moyenne nulle.

3) Montrer que les fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ dont l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$ est nulle forment un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Indication : montrer que si $f \in L^2 \cap L^1, f - \frac{\int f(x) dx}{\text{mes}(B(0, R))} \mathbb{1}_{B(0, R)}$ converge vers f dans L^2 quand $R \rightarrow +\infty$ et est d'intégrale nulle.

4) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)$ d'intégrale nulle sur $(-2^j, 0)$ et $(0, 2^j)$.

5) Nous nous plaçons dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit $I(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}$, puis les trois fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H_1(x, y) = H(x)I(y), \quad H_2(x, y) = I(x)H(y) \quad \text{et} \quad H_3(x, y) = H(x)H(y).$$

Ensuite on définit la "base d'ondelettes de Haar en dimension 2",

$$H_{i, j_1, j_2}^k(x, y) = 2^k H_i(2^k x - j_1, 2^k y - j_2), \quad k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3.$$

Commencer par dessiner les fonctions H_1, H_2, H_3 .

6) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]^2$ et qui sont constantes sur les carrés dyadiques de coté 2^{-j} . On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j , l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des carrés de coté 2^{-j} et d'intégrale nulle.

7) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$. On

commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)^2$ d'intégrale nulle.

8) Pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ considérons les coefficients

$$c_{i,j_1,j_2}^k(f) = \langle f, H_{i,j_1,j_2}^k \rangle.$$

Conclure que

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{k,j_1,j_2 \in \mathbb{Z}} c_{i,j_1,j_2}^k(f) H_{i,j_1,j_2}^k$$

dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel normé dont la norme vérifie l'identité du parallélogramme, c'est à dire

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2), \quad \forall a, b \in E.$$

On se propose de montrer que l'expression suivante

$$(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2), \quad x, y \in E,$$

définit un produit scalaire sur E tel que $(x, x) = \|x\|^2$.

1) Vérifier que $(x, y) = (y, x)$, $(-x, y) = -(x, y)$ et $(x, 2y) = 2(x, y)$, $\forall x, y \in E$.

2) Montrer que $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $\forall x, y, z \in E$.

On pourra appliquer l'identité du parallélogramme successivement avec

- (1) $a = x, b = y$,
- (2) $a = x + z, b = y + z$,
- (3) $a = x + y + z, b = z$.

3) Montrer que $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$. (Le faire d'abord pour $\lambda \in \mathbb{N}$, puis $\lambda \in \mathbb{Q}$ et enfin $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Exercice 9

Soit $w(x) = x^{-\log x}$. On considère l'espace de Hilbert $L_w^2(0, +\infty) = \{f : f\sqrt{w} \in L^2(0, +\infty)\}$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^\infty fgwdx$. Soit $\mathbf{P} = \{p \text{ polynôme à coefficients réels}\}$.

1) Vérifier que $\mathbf{P} \subset L_w^2(0, +\infty)$.

2) Soit $f(x) = \sin(2\pi \log x)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (x^n, f) = 0$.

En déduire que \mathbf{P} n'est pas dense dans $L_w^2(0, +\infty)$.

Exercice 10 Soit V un espace de Hilbert réel tel que $\dim V = \infty$.

Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue et coercive c'est à dire telle que $\exists \beta > 0, |a(u, v)| \leq \beta \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V$ et $\exists \alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V$.

Soit $\ell \in V'$.

1) Montrer que $\exists ! u \in V$ tel que $a(u, v) = \ell(v), \forall v \in V$ et que $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{V'}$.

2) On suppose dans toute la suite de l'exercice que V satisfait l'hypothèse suivante :

il existe une suite de sous-espaces $(V_n)_{n \geq 1}$ de V telle que

$$(H) : \begin{cases} (i) & \dim V_n = p_n, \\ (ii) & V_n \subset V_{n+1}, \\ (iii) & \bigcup_n V_n \text{ est dense dans } V. \end{cases}$$

Vérifier que $\exists! u_n \in V_n$ tel que $a(u_n, v) = \ell(v)$, $\forall v \in V_n$ et que l'on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite qui converge faiblement dans V vers une limite u^* .

3) Démontrer que $u = u^*$. En déduire que toute la suite $(u_n)_n$ converge faiblement dans V vers u .

On veut montrer que $(u_n)_n$ converge fortement vers u dans V .

4) Première démonstration : En développant $a(u_n - u, u_n - u)$, montrer que $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

5) Deuxième démonstration : On note $\delta_n = \inf\{\|u - w\|, w \in V_n\}$.

a) Montrer que δ_n est atteint.

b) Montrer (sans utiliser la forme bilinéaire a) que $\delta_n \rightarrow 0$.

c) Montrer que $\|u_n - u\| \leq \frac{\beta}{\alpha} \delta_n$ et en déduire que u_n converge fortement vers u dans V .

Questions subsidiaires :

1) Montrer que $p_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2) Montrer que l'hypothèse (H) $\implies V$ séparable.

Exercices du 7 Février 2008**Exercice 1**

- 1) Soit $\chi_n(x) = \frac{1}{2n}$ sur $[-n, n]$, $\chi_n(x) = 0$ ailleurs. Etudier sa limite dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- 2) Utiliser cette suite de fonctions pour montrer que

$$\left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0 \right\}$$

est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Base de Haar

On pose $H(x) = 1$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $H(x) = -1$ si $\frac{1}{2} \leq x < 1$. C'est la fonction de Haar. On pose

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

- 1) Dessiner les fonctions de Haar pour $l = 1, 2$. Démontrer que ces fonctions forment un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.
- 2) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]$ et qui sont constantes sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j} . On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j , l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des intervalles de longueur 2^{-j} et à moyenne nulle.
- 3) Montrer que les fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ dont l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$ est nulle forment un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Indication : montrer que si $f \in L^2 \cap L^1$, $f - \frac{\int f(x) dx}{\text{mes}(B(0, R))} \mathbb{1}_{B(0, R)}$ converge vers f dans L^2 quand $R \rightarrow +\infty$ et est d'intégrale nulle.
- 4) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)$ d'intégrale nulle sur $(-2^j, 0)$ et $(0, 2^j)$.
- 5) Nous nous plaçons dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit $I(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}$, puis les trois fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H_1(x, y) = H(x)I(y), \quad H_2(x, y) = I(x)H(y) \quad \text{et} \quad H_3(x, y) = H(x)H(y).$$

Ensuite on définit la "base d'ondelettes de Haar en dimension 2",

$$H_{i, j_1, j_2}^k(x, y) = 2^k H_i(2^k x - j_1, 2^k y - j_2), \quad k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3.$$

Commencer par dessiner les fonctions H_1, H_2, H_3 .

- 6) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]^2$ et qui sont constantes sur les carrés dyadiques de côté 2^{-j} . On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j , l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des carrés de côté 2^{-j} et d'intégrale nulle.
- 7) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)^2$ d'intégrale nulle.
- 8) Pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ considérons les coefficients

$$c_{i, j_1, j_2}^k(f) = \langle f, H_{i, j_1, j_2}^k \rangle.$$

Conclure que

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}} c_{i, j_1, j_2}^k(f) H_{i, j_1, j_2}^k$$

dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 3 On note \star le produit de convolution.

Montrer que $(L^1(\mathbb{R}), +, \star)$ est une algèbre de Banach commutative qui ne possède pas d'élément neutre pour \star .

Exercice 4 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

1) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Montrer que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Soit $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$, on suppose que $\exists C$ telle que $\|f\|_p \leq C, \forall p$ tel que $1 \leq p < \infty$. Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

3) Soit $\Omega =]0, 1[$ et $f(x) = \log x$, vérifier que $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$ et que $f \notin L^\infty(\Omega)$.

Exercice 5 (J.M.Bony, Ecole Polytechnique)

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ et soit f définie sur \mathbb{R} . On pose, $\forall n \geq 1$, (lorsque cela a un sens),

$$T_n(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y^n)g(y)dy.$$

1) si $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $T_n(f)$ est définie p.p. et $T_n(f) \in L^1(\mathbb{R})$.

2) Si f est continue et bornée, montrer que $T_n(f)$ est continue et bornée.

3) Si f est continue et $f(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, montrer que $\forall x, T_n(f)(x) \rightarrow C f(x)$ où C est une constante à déterminer.

CORRIGES

Exercice 1

1) On a $\chi_n(x) \geq 0, \int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1, \chi_n \rightarrow 0$ p.p. et $\int_{\mathbb{R}} \chi_n^2 = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$. Donc $\chi_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\chi_n \not\rightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

2) L'ensemble $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car contient $C_c(\mathbb{R})$ par exemple. Soit $E = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0\}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $g_n = f - (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \in E$ et $f - g_n = (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc E est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

1) Le support de H_k^l est $I_k^l = [\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}]$. Donc si $l = l'$ et $k \neq k'$, les supports de H_k^l et $H_{k'}^{l'}$ sont disjoints donc $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Si $l \neq l'$, par exemple $l > l'$ alors H_k^l est constante sur les intervalles dyadiques de longueur $2^{-l'-1}$ donc est constante sur le support de $H_{k'}^{l'}$. Comme $H_{k'}^{l'}$ est de moyenne nulle, on en déduit que $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Enfin $\|H_k^l\|_{L^2}^2 = 2^l \int_{I_k^l} 1 dx = 1$. Donc $(H_k^l)_{l,k}$ forme un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

2) Il y a

	1 fonction constante par morceaux sur les intervalles de longueur	$\frac{1}{2}$,
1 + 2	$\frac{1}{4}$,
...
1 + 2 + ... + 2 ^{j-1}	$\frac{1}{2^j}$.

Donc $\text{card}(S_j) = 2^j - 1$. Or W_j est un espace de codimension 1 dans un espace de dimension 2^j , l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j} , donc le système S_j forme une base de W_j .

3) Les fonctions indicatrices des intervalles dyadiques sont denses dans $L^2(0, 1)$ donc

$\{1, H_k^l, l \geq 0, k = 0, \dots, 2^l - 1\}$ forme une base orthogonale de $L^2(0, 1)$. Si on enlève la fonction égale à 1, les H_k^l forment une base orthogonale de $\{f \in L^2(0, 1), f \text{ à moyenne nulle}\}$, et par symétrie par rapport à 0 et dilatations, les $H_k^l, l \geq -j, k = -2^l, \dots, 2^l - 1$ forment une base orthogonale des fonctions de $L^2(-2^l, 2^l)$ d'intégrale nulle sur $[-2^j, 0]$ et $[0, 2^j]$.

3) Soit maintenant $f \in L^2(\mathbb{R})$, comme les fonctions à supports compacts sont denses dans L^2 , on peut supposer que f est à support compact. On découpe f en $f = \mathbb{1}_{(0, +\infty)}f + \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}f$. Soit $g = \mathbb{1}_{(0, +\infty)}f$ alors g est à support compact dans \mathbb{R}^+ , soit $[0, A]$ son support alors $A \leq 2^j$ pour un j . On connaît une base de $L^2(0, 2^j)$ en ajoutant aux H_k^l la fonction $e_1 = 2^{-\frac{j}{2}} \mathbb{1}_{(0, 2^j)}$ donc $g = (g, e_1)e_1 + \sum_{i \geq 2} (g, e_i)e_i$ où les

e_i pour $i \geq 2$ sont les H_k^l . Alors $\|g - \sum_{i \geq 2} (g, e_i)e_i\|_2 = |(g, e_1)|$. Montrons que pour $\varepsilon > 0$ on peut choisir j tel que $|(g, e_1)| \leq \varepsilon$. On a

$$|(g, e_1)| = \left| \int_0^A 2^{-\frac{j}{2}} g(x) dx \right| \leq 2^{-\frac{j}{2}} \|g\|_2 \sqrt{A},$$

et on veut rendre ce terme plus petit que ε , il est clair que c'est vrai pour j assez grand. On raisonne de la même façon pour le terme $\mathbb{1}_{(-\infty, 0)}f$, donc on approxime arbitrairement bien toute fonction à support compact et par densité toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Par le théorème de Fubini, $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. $(f, g) \mapsto (f \star g)$ est bilinéaire donc \star est distributive par rapport à l'addition. Enfin, il est évident que \star est commutative, donc il reste à voir que \star est associative. Soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, en appliquant le théorème de Fubini et en effectuant un changement de variables, on a

$$\begin{aligned} (f \star g) \star h(x) &= \int_{\mathbb{R}} f \star g(x-y) h(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y-u) g(u) h(y) dy du, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(y) g(v-y) f(x-v) dv dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-v) g \star h(v) dv = f \star (g \star h)(x). \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe un élément neutre δ pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $f_n \geq 0$, de support $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et telle que $f_n(0) = \|f_n\|_\infty = 1$. Alors $\delta \star f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \delta \star f_n(x) = f_n \star \delta(x) = f_n(x)$, donc en particulier

$$f_n \star \delta(0) = f_n(0) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f_n(-y) \delta(y) dy.$$

Soit $g_n(y) = f_n(-y) \delta(y)$ alors $g_n(y) \rightarrow 0$ p.p. et $|g_n(y)| \leq |\delta(y)| \in L^1(\mathbb{R})$. Le théorème de convergence dominée montre que $\int_{\mathbb{R}} g_n \rightarrow 0$, d'où contradiction.

Exercice 4

1) On a $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{p}}$ donc $\limsup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

Soient $0 < k < \|f\|_\infty$ et $A = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}$, alors $|A| \neq 0$ et $\|f\|_p \geq k |A|^{\frac{1}{p}}$. Donc $\liminf \|f\|_p \geq k$ et ceci $\forall k < \|f\|_\infty$. D'où $\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$ et $\lim \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Soit $k > C$ et soit $A = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}$ alors

$$k^p |A| \leq \|f\|_p^p \leq C^p \implies |A| \leq \left(\frac{C}{k}\right)^p, \forall p.$$

Quand $p \rightarrow \infty$, on obtient $|A| = 0$, donc p.p. $|f(x)| \leq k$ et $f \in L^\infty$.

3) Soit $f(x) = \log x$, alors $f \notin L^\infty(0, 1)$. Soit $1 \leq p < +\infty$ comme $\sqrt{x} |\log x|^p \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|x| \leq \varepsilon \implies |\log x|^p \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors

$$|f(x)|^p \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0, \varepsilon)} + |\log x|^p \mathbb{1}_{(\varepsilon, 1)} \in L^1(0, 1),$$

donc $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$.

Exercice 5

1) Soit $F(x, y) = f(x - y^n)g(y)$ alors $\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx = \|f\|_{L^1} |g(y)|$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

donc par le théorème de Fubini-Tonelli, $F \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. De plus, p.p. x , $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x, y) dy$ est définie et est dans $L^1(\mathbb{R})$. Enfin, $\|T_n(f)\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.

2) On a

$$\begin{aligned} \forall x, y &\mapsto f(x - y^n)g(y) \in L^1(\mathbb{R}), \\ \text{p.p. } y, x &\mapsto f(x - y^n)g(y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

et $\forall x$, $|f(x - y^n)g(y)| \leq \|f\|_{\infty} |g(y)| \in L^1(\mathbb{R})$, donc par le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, $T_n(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\forall x$, $|T_n(f)(x)| \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{L^1}$ donc $T_n(f)$ est bornée.

3) On écrit $T_n(f)(x) = A_n + B_n$ où $A_n = \int_{|y| < 1} f(x - y^n)g(y) dy$ et $B_n = \int_{|y| > 1} f(x - y^n)g(y) dy$.

Etude de A_n :

Quand $n \rightarrow \infty$, $f(x - y^n)g(y) \rightarrow f(x)g(y)$ p.p. et $|f(x - y^n)g(y)| \leq M|g(y)| \in L^1$. Par le théorème de convergence dominée, $A_n \rightarrow f(x) \int_{|y| < 1} g(y) dy$.

Etude de B_n :

Quand $n \rightarrow \infty$, $x - y^n \rightarrow \pm\infty$ et par hypothèse $f(x - y^n) \rightarrow 0$ donc $f(x - y^n)g(y) \rightarrow 0$ p.p. Enfin, $|f(x - y^n)g(y)| \leq M|g(y)| \in L^1$, donc le théorème de convergence dominée montre que $B_n \rightarrow 0$.

D'où $T_n(f)(x) \rightarrow C f(x)$ avec $C = \int_{|y| < 1} g(y) dy$.

Chapitre 3

Séries de Fourier

On considère l'espace de Hilbert hermitien $L^2([-\pi, \pi])$ que l'on notera aussi $L^2(-\pi, \pi)$. Ces fonctions sont à valeurs réelles ou complexes. On va montrer que le système orthonormé

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(-\pi, \pi)$. Cette base s'appelle la base de Fourier. On notera

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx,$$

en sorte que pour toute f dans $L^2([-\pi, \pi])$ on puisse écrire

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx},$$

la série précédente convergeant au sens L^2 . Les $c_n(f)$ s'appellent les coefficients de Fourier de f et sont proportionnels aux coordonnées de f dans la base de Fourier. Pour montrer ce résultat, on va commencer par analyser le comportement des coefficients de Fourier selon la régularité de f .

Lemme 3.1 (*Lemme de Riemann-Lebesgue*)

i) On pose pour $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} dx.$$

Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est k fois continûment différentiable et telle que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{iax} dx \rightarrow 0$ quand $|a| \rightarrow \infty$.

iii) Application aux coefficients de Fourier : si $f \in L^1(-\pi, \pi)$,

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n(f) = 0.$$

Remarque 3.1 Si $f \in L^2$, on sait immédiatement que $c_n(f) \rightarrow 0$ car $c_n(f)$ s'interprètent comme les coordonnées de f sur un système orthonormé.

Démonstration i) En intégrant par parties k fois l'intégrale définissant \hat{f} , on obtient pour $\xi \neq 0$,

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{(i\xi)^k} \int f^{(k)}(x) e^{-ix\xi} dx \right| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

ii) Soit f_n une suite de fonctions \mathcal{C}^∞ et à support compact qui tendent vers f dans L^1 (proposition ??). On a, pour n fixé assez grand : $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$, ce qui implique $|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$ pour tout ξ . En utilisant (i), on voit que $|\hat{f}_n(\xi)| \rightarrow 0$ quand n est fixé et $|\xi| \rightarrow \infty$. Donc $|\hat{f}_n(\xi)| \leq \varepsilon$ pour ξ assez grand. Finalement,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| + |\hat{f}_n(\xi)| \leq 2\varepsilon$$

pour ξ assez grand. ◦

La proposition suivante nous dit que la série de Fourier de f converge vers $f(x)$ en tout point x où f est suffisamment régulière.

Proposition 3.1 (*Principe de localisation*)

Si $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et si la fonction $y \rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est intégrable sur un voisinage de x , alors $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N f(x) = f(x)$, où on a noté : $s_N f(x) =: \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e^{inx}$.

Expliquons pourquoi le résultat précédent s'appelle principe de localisation. Alors que $s_N(f)$ est le résultat d'un calcul intégral sur tout l'intervalle $[-\pi, \pi]$, et donc d'un calcul global, le comportement de $s_N f(x)$ dépend du comportement local de f au voisinage de x . Il y a donc "localisation".

Démonstration **Etape 1** On se ramène au cas $f(x) = 0, x = 0$.

Supposons la proposition démontrée pour $x = 0, f(x) = 0$. Soit maintenant $g \in L^1(-\pi, \pi)$ telle que $\frac{g(y)-g(x)}{y-x}$ soit intégrable au voisinage de x . Alors on pose $f(y) = g(x+y) - g(x)$. On a bien $f(0) = 0$ et $\frac{f(y)}{y} = \frac{g(x+y)-g(x)}{y}$ est intégrable au voisinage de 0. Donc, par hypothèse, $s_N f(0) \rightarrow f(0) = 0$. Mais

$$\begin{aligned} s_N f(0) &= \sum_{|n| \leq N} c_n(g(x+y) - g(x)) = \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(x+y) - g(x)) e^{-iny} dy \\ &= \left(\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) e^{-in(z-x)} dz \right) - g(x) = \left(\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) e^{-inz} dz \right) - g(x) \\ &= s_N g(x) - g(x). \end{aligned}$$

Donc $s_N g(x) \rightarrow g(x)$. En fait, l'argument précédent montre que s_N commute avec les translations :

$$s_N[g(\cdot + x)] = (s_N g)(\cdot + x).$$

Etape 2 On a

$$s_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dy. \quad (3.1)$$

En effet, $\sum_{-N}^N e^{iky} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$, ce qui se prouve aisément en sommant la suite géométrique.

Étape 3 Par l'étape 1 il suffit de montrer que si $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et si $\frac{f(y)}{y}$ est intégrable autour de 0, alors $s_N f(0) \rightarrow 0$. Comme sur $[-\pi, \pi]$, $|\sin\frac{y}{2}| \geq \frac{|y|}{\pi}$, on a

$$\left| \frac{f(y)}{\sin\frac{y}{2}} \right| \leq \frac{\pi|f(y)|}{|y|} \in L^1(-\pi, \pi).$$

Donc on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction $\frac{f(y)}{\sin\frac{y}{2}}$. On conclut que l'intégrale de (3.1) définissant $s_N f(0)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. \circ

Corollaire 3.1 si $f \in L^1([-\pi, \pi])$ est Höldérienne d'exposant $0 < \alpha \leq 1$ en x (c'est-à-dire $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$), alors $s_N f(x) \rightarrow f(x)$. Cette conclusion s'applique si f est une primitive sur $[-\pi, \pi]$ d'une fonction de $L^2(-\pi, \pi)$.

Démonstration L'application du principe de localisation est immédiate : $\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq |x - y|^{\alpha-1}$ qui est bien intégrable au voisinage de x . Soit maintenant f une fonction qui est la primitive sur $[-\pi, \pi]$ d'une fonction de $L^2(-\pi, \pi)$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t) dt \right| \leq |y - x|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La fonction f est donc Hölderienne d'exposant $\frac{1}{2}$ et le principe de localisation s'applique. \circ

Exercice 1 Une preuve rapide et une généralisation du principe de localisation.

Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$, 2π -périodique. On note $s_{N,M} f$ la série partielle de Fourier de f , définie par

$$s_{N,M} f(x) = \sum_{k=-N}^{k=M} c_k(f) e^{ikx},$$

où $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$. On rappelle que par le Lemme de Riemann-Lebesgue, $c_k(f) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \pm\infty$. Nous allons montrer le théorème suivant, qui est une version du "principe de localisation".

Théorème 3.1 (i) Soit $f(x)$ une fonction 2π -périodique telle que

$$\frac{f(x)}{e^{ix} - 1} = g(x) \in L^1(0, 2\pi).$$

Alors $s_{N,M} f(0) \rightarrow 0$ quand $N, M \rightarrow +\infty$.

(ii) Plus généralement, si $x \rightarrow \frac{f(x) - c}{x - y} \in L^1(0, 2\pi)$, alors $s_{N,M} f(y) \rightarrow c$.

Remarque : si f est continue en 0, la première hypothèse entraîne $f(0) = 0$. Si f est continue en y , la deuxième hypothèse entraîne $f(y) = c$.

On appelle l'énoncé précédent le principe de localisation car il dit, en termes informels, que "si f est régulière en x , alors la série de Fourier de f tend vers $f(x)$ au point x ". Bien que $s_{N,M}f$ soit définie par une formule globale (une intégrale sur l'intervalle $[0, 2\pi]$), la série de Fourier reconnaît les points réguliers et son comportement dépend du comportement local de f . La démonstration qui suit est vraiment élémentaire grâce à l'astucieuse démonstration due à Ronald Coifman, de l'Université de Yale (démonstration communiquée par Yves Meyer).

1) Dédurre (ii) de (i).

2) Sous l'hypothèse de (i), on appelle γ_k les coefficients de Fourier de g . Montrer que $c_k = \gamma_{k-1} - \gamma_k$. En déduire que $\sum_N^M c_k \rightarrow 0$ et conclure en appliquant le Lemme de Riemann-Lebesgue.

Corollaire 3.2 *Le système*

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} (e^{ikt})_{k \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(-\pi, \pi)$. Notant $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$, on a donc pour toute f dans $L^2([-\pi, \pi])$,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx},$$

la série précédente convergeant au sens L^2 .

Démonstration On appelle polynôme trigonométrique toute expression de la forme $P(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt}$, où les a_k sont des nombres complexes. Pour montrer que le système de Fourier est une base hilbertienne, il nous suffit de montrer que c'est un système total, c'est-à-dire que les polynômes trigonométriques forment un sous-espace vectoriel dense de $L^2(-\pi, \pi)$. Mais le lemme 3.1 (Principe de localisation) nous assure que si f est \mathcal{C}^2 et à support compact dans $[-\pi, \pi]$, alors $s_N(f)(x) \rightarrow f(x)$ en tout point (On peut aussi utiliser directement le théorème de Stone-Weierstrass). Comme de plus les coefficients de la série de Fourier de f vérifient $|c_k(f)| \leq \frac{C}{k^2}$, la série de Fourier est en fait uniformément convergente et donc converge aussi dans $L^2([-\pi, \pi])$ vers f . Or, par la proposition ??, les fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans $[-\pi, \pi]$ sont denses dans $L^2(-\pi, \pi)$. On conclut que le système de Fourier est total, et donc une base hilbertienne. \circ

3.1 Convolution des fonctions périodiques et séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([-\pi, \pi])$ implique qu'on la considère comme une fonction 2π -périodique, puisque la série de Fourier l'est. On note $L_{per}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ qui sont 2π -périodiques. Toute fonction $f \in L^2([-\pi, \pi])$ définit un élément unique de $L_{per}^2(\mathbb{R})$.

Définition 3.1 et proposition Si $f \in L^1([-\pi, \pi])$ et $g \in L^1([-\pi, \pi])$, on prolonge f et g en des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} et on pose $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$. La fonction $f * g$ ainsi définie appartient à $L^1(-\pi, \pi)$ et est 2π -périodique.

Exercice 2 En reprenant l'argument du théorème ??, montrer que si $T : L^2_{per}([-\pi, \pi]) \rightarrow C^0_{per}([-\pi, \pi])$ est linéaire, continu et commute avec les translations, alors il existe une fonction $g \in L^2([-\pi, \pi])$ telle que $Tf = g * f$, où " $*$ " désigne la convolution périodique.

Théorème 3.2 Si $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$, alors $f * g$ est continue et $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f)c_n(g)$. De plus, la série de Fourier de $f * g$ converge uniformément vers $f * g$.

Remarquons que la relation précédente montre l'effet régularisant de la convolution : les hautes fréquences de $f * g$ sont plus faibles que celles de f , puisque $c_n(g)$ tend vers zéro.

Démonstration i) On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f * g)(x)| \leq \int |f(x-y)||g(y)|dy \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Donc $f * g$ est majorée et appartient aussi à $L^2(-\pi, \pi)$. On a, en appliquant plusieurs fois le théorème de Fubini (les intégrales se font sur $[-\pi, \pi]$ ou, indifféremment, sur n'importe quel intervalle de longueur 2π) :

$$\begin{aligned} c_n(f * g) &= \frac{1}{2\pi} \int \int f(x-y)g(y)e^{-int} dy dx = \frac{1}{2\pi} \int \int f(x-y)e^{-in(x-y)}g(y)e^{-iny} dy dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int g(y)e^{-iny} dy \right) \left(\int f(u)e^{-inu} du \right) = 2\pi c_n(f)c_n(g). \end{aligned}$$

Le terme général de la série de Fourier de $f * g$ vérifie

$$|c_n(f * g)e^{inx}| = |c_n(f)||c_n(g)| \leq |c_n(f)|^2 + |c_n(f)|^2.$$

Cette dernière série est convergente. La série de Fourier de $f * g$, $F_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n(f * g)e^{inx}$, est donc uniformément convergente. Sa F limite est donc continue. Donc d'une part F_N tend vers $f * g$ dans L^2 et donc par la réciproque du théorème de Lebesgue une sous-suite tend vers cette fonction presque partout. De l'autre F_N tend uniformément vers F . On en déduit que $f * g = F$ presque partout et on en déduit aussi que $f * g$ est égale presque partout à une fonction continue (et donc peut être appelée continue). \circ

Exercice 3 Transformée de Fourier discrète et transformée inverse.

La transformée de Fourier discrète est l'application de $L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ qui associe à une fonction u la suite de ses coefficients de Fourier $c(f) = (c_k(u))_{k \in \mathbb{Z}}$. la transformée inverse est la série de Fourier associée à $c \in l^2(\mathbb{Z})$, notée

$$S(c)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

On a donc $S(c(f)) = f$, ce qui constitue une *formule d'inversion de Fourier*. Si $a, b \in l^2(\mathbb{Z})$, on note ab le produit terme à terme, défini par $(ab)_k = a_k b_k$.

- 1) Avec le formalisme précédent, vérifier que $S(ab) = \frac{1}{2\pi} S(a) * S(b)$.
- 2) Cette formule nous permet de mieux comprendre. La démonstration que nous avons donnée pour le principe de localisation. Considérons le "filtre passe-bas" $b^N \in l^2(\mathbb{Z})$ défini par $b_k^N = 1$ si $|k| \leq N$, $b_k^N = 0$ sinon. Calculer $S(b^N)$.
- 3) En déduire que la série de Fourier tronquée de f , $s_N f$, est obtenue par convolution 2π -périodique de f avec ce qu'on appelle le noyau de Féjer, $s_N f = h_N * f$, où

$$h_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}}.$$

- 4) Dessiner le noyau de Féjer. En déduire qu'une coupure brutale des fréquences dépassant un seuil peut faire apparaître des oscillations dans le signal : comparer avec le paragraphe sur le phénomène de Gibbs.

3.1.1 Autres bases de Fourier

Corollaire 3.3 Bases en sinus et en cosinus

i) On pose pour $T > 0$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$, c'est la fréquence de base associée à la période T . Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}} e^{ik\omega t}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

forment une base hilbertienne de $L^2(0, T)$. Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$$

forment également une base hilbertienne de $L^2(0, T)$: c'est en fait la base originale de Fourier!

ii) Il en est de même pour les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$$

La transformée associée à la base en cosinus s'appelle la "transformée en cosinus."

Il y a également une "base en sinus", $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$

Démonstration i) La deuxième base résulte de l'application à la base de Fourier de la remarque générale suivante. Si $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne, alors le système $f_0 = e_0, \dots, f_{2k} = \frac{e_k + e_{-k}}{\sqrt{2}}, f_{2k+1} = \frac{e_k - e_{-k}}{\sqrt{2}}, \dots$ aussi.

ii) Si $f \in L^2(0, T)$, on lui associe la fonction paire \tilde{f} sur $[-T, T]$ qui coïncide avec f sur $[0, T]$. On décompose \tilde{f} sur la base de Fourier de $[-T, T]$. La base de Fourier sur $[-T, T]$ est formée des fonctions $\frac{1}{\sqrt{2T}} e^{\frac{i\pi kt}{T}}$. Donc on a

$\tilde{f}(x) =_{L^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{-\frac{i\pi kt}{T}} dt \right) e^{\frac{i\pi kx}{T}}$. Comme \tilde{f} est paire, on voit en faisant le changement de variables $t \rightarrow -t$ dans les intégrales que les coefficients de $e^{\frac{i\pi kx}{T}}$ et $e^{-\frac{i\pi kx}{T}}$ sont égaux. On remarque aussi que $\int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{\frac{i\pi kt}{T}} dt = 2 \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right) dt$. Aussi,

$\tilde{f}(x) =_{L^2} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{f}(t) dt + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2T} (\int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{-\frac{i\pi kt}{T}}) (e^{\frac{i\pi kx}{T}} + e^{\frac{i\pi kx}{T}})$, et donc $f(x) =_{L^2} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{T} (\int_0^T f(t) \cos(\frac{\pi kt}{T})) \cos(\frac{\pi kx}{T})$. Comme les fonctions $\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\frac{\pi kx}{T})$ forment un système orthonormé de $L^2(0, T)$, l'égalité précédente exprime qu'elles forment en fait une base hilbertienne.

(iii) Si on prolonge la fonction f en une fonction impaire sur $[-T, T]$ et que l'on reprend le raisonnement précédent, on trouve la base en sinus. Cette base a la propriété, utile pour modéliser les cordes vibrantes, que ses éléments valent 0 aux extrémités de l'intervalle.

◊

Exercice 4 Détailler la preuve de (iii) en vous inspirant de la preuve de (ii).

Remarque : Le résultat ii), relatif à la transformée en cosinus, s'obtient en considérant la série de Fourier du signal pair \tilde{f} obtenu par symétrie par rapport à l'axe des y . Ceci est très important en pratique, car l'introduction de cette symétrie, qui se généralise sans mal au cas des images, permet d'éviter la présence de discontinuités aux frontières du domaine du signal ou de l'image (supposés périodique dans le cadre de la décomposition en séries de Fourier), qui sont à l'origine d'effets de Gibbs (voir le paragraphe 3.4). Ce type de transformée en cosinus est souvent utilisé en compression des images (comme dans le standard JPEG). Un autre avantage de cette décomposition, pour la compression, est présenté ci-dessous.

3.2 Bases de Fourier en dimension 2

Les énoncés qui suivent se généralisent sans changement de démonstration à la dimension N . Nous traitons le cas $N = 2$ pour éviter des indices de sommation inutiles. On pose $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ et on note $k \cdot x = k_1 x_1 + k_2 x_2$ leur produit scalaire.

Lemme 3.2 Les fonctions à variables séparées, c'est-à-dire de la forme $w(x) = u(x_1)v(x_2)$ avec $u, v \in L^2(0, 2\pi)$ forment un système total de $L^2([0, 2\pi]^2)$.

Démonstration Les fonctions caractéristiques de rectangles sont à variables séparées et elles forment un système total de $L^2([0, 2\pi]^2)$. ◊

Lemme 3.3 Si $u_k(x) \rightarrow u(x)$ et $v_l(x) \rightarrow v(x)$ dans $L^2(0, 2\pi)$, alors $u_k(x_1)v_l(x_2) \rightarrow u(x_1)v(x_2)$ dans $L^2([0, 2\pi]^2)$ quand $k, l \rightarrow +\infty$.

Démonstration On remarque que par le théorème de Fubini,

$$\|u(x_1)v(x_2)\|_{L^2([0, 2\pi]^2)} = \|u(x_1)\|_{L^2([0, 2\pi])} \|v(x_2)\|_{L^2([0, 2\pi])}.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\|u_k(x_1)v_l(x_2) - u(x_1)v(x_2)\|_{L^2([0, 2\pi]^2)} \leq \|(u_k - u)v_l\|_{L^2([0, 2\pi]^2)} + \|u(v_l - v)\|_{L^2([0, 2\pi]^2)} =$$

$$\|u_k - u\|_{L^2([0, 2\pi])} \|v_l\|_{L^2([0, 2\pi])} + \|u\|_{L^2([0, 2\pi])} \|v_l - v\|_{L^2([0, 2\pi])}.$$

Les deux termes de droite tendent vers zéro quand $k, l \rightarrow +\infty$. ◦

Théorème 3.3 Les fonctions $e_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ik \cdot x}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, forment une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi]^2)$ et on a donc pour toute fonction $u \in L^2([0, 2\pi]^2)$,

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k(u) e^{ik \cdot x}, \text{ avec } c_k(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0, 2\pi]^2} u(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad (3.2)$$

la convergence de la série se vérifiant au sens de L^2 .

Démonstration On vérifie facilement que e_k est un système orthonormé. Pour montrer qu'il est total, il suffit de montrer, par le lemme 4.1, que les e_k engendrent les fonctions séparables. Mais si $w(x) = u(x_1)v(x_2) \in L^2([0, 2\pi]^2)$ est une telle fonction, par une application directe du théorème de Fubini, $u(x_1)$ et $v(x_2)$ sont dans $L^2(0, 2\pi)$. Les fonctions u et v sont donc sommes au sens L^2 de leurs séries de Fourier :

$$u(x_1) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} c_{k_1} e^{ik_1 x_1}, \quad c_{k_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} u(x_1) e^{-ik_1 x_1};$$

$$v(x_2) = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_2} e^{ik_2 x_2}, \quad c_{k_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} v(x_2) e^{-ik_2 x_2}.$$

En appliquant le lemme 3.3 à $u_N(x_1) = \sum_{-N}^N c_{k_1}(u) e^{ik_1 x_1}$ et $v_M(x_2) = \sum_{-M}^M c_{k_2}(v) e^{ik_2 x_2}$ qui convergent respectivement vers $u(x_1)$ et $v(x_2)$ dans $L^2([0, 2\pi])$, on obtient une série double convergente dans $L^2([0, 2\pi]^2)$. On obtient donc (4.1) dans le cas d'une fonction séparable $w(x) = u(x_1)v(x_2)$ avec $c_k(w) = c_{k_1}(u)c_{k_2}(v)$. Il en résulte que le système $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi]^2)$ et (4.1) est donc valide. ◦

3.3 Décroissance des coefficients de Fourier et problèmes de compression du signal

On s'intéresse au comportement des coefficients de Fourier quand la 2π -périodisée de f est C^1, C^2 , etc... Si f est C^p et 2π -périodique, en intégrant par parties p fois sur $[0, 2\pi]$,

$$c_n(f) = \int e^{-inx} f(x) dx = \frac{1}{(in)^p} \int e^{-inx} f^{(p)}(x) dx.$$

Donc, les coefficients décroissent d'autant plus vite que f est plus régulière.

Si maintenant f présente un saut en 0, on montre que si f est C^1 sur $[0, 2\pi]$ mais pas 2π -périodique, alors $c_n(f) = O(\frac{1}{n})$. Plus précisément, si nous notons $f(0^+)$ la valeur en 0 par la droite et $f(2\pi^-)$ la valeur en 2π par la gauche

$$c_n(f) = \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f'(x) dx + \frac{f(0^+) - f(2\pi^-)}{in}.$$

Or on montre (par le lemme de Riemann-Lebesgue) que le premier terme est $o(\frac{1}{n})$. On sait que $\sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} = O(\frac{1}{N})$, et la décroissance des coefficients de

Fourier de la fonction est donc très lente (1000 termes pour une précision de 10^{-3}), dès que la fonction présente une discontinuité.

En ce qui concerne les coefficients de Fourier $c_{k,l}$ d'une "image", c'est-à-dire une fonction $f(x, y)$ définie sur un carré $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, C^1 , mais pas $2\pi \times 2\pi$ -périodique, le résultat est identique. On montre que $c_{n,m} = O(\frac{1}{nm})$ et le reste (pour la norme L^2) de la série double est donc en $O(\frac{1}{nm})$. Donc, pour une précision de 10^{-3} , il faut encore 1000 termes.

Une bonne alternative lorsque la fonction présente une discontinuité du type précédent consiste à utiliser la transformée en cosinus : $c_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) f(x) dx$. On a, en intégrant par parties et en remarquant que $\sin(nx)$ s'annule en 0 et 2π ,

$$c_n(f) = \frac{1}{i\pi n} \int_0^{2\pi} \sin(nx) f'(x) dx.$$

On a $c_n(f) = o(\frac{1}{n})$ par le lemme de Riemann-Lebesgue. Les coefficients de Fourier "en cosinus" décroissent donc plus vite qu'avec la transformée de Fourier classique et on peut donc en transmettre moins pour une qualité d'image égale. Pour transmettre une image, on la découpe en petits carrés et on transmet une partie des coefficients de Fourier de chaque imagerie (principe utilisée par le standard JPEG). On augmente ainsi la probabilité qu'une imagerie présente une couleur homogène et soit donc régulière. L'utilisation de la transformée en cosinus permet donc de comprimer l'information dans les sous-carrés de l'image où celle-ci est régulière. Par contre, les calculs précédents prouvent qu'on ne gagne rien quand un "bord" est présent dans l'imagerie. En effet, un calcul du même type que ci-dessus implique que les coefficients $c_{n,0}(f)$ décroissent en $O(\frac{1}{n})$. C'est ce qui explique les phénomènes de "halo" autour des objets sur un fond contrasté : le petit nombre de coefficients transmis ne suffit pas à approcher bien l'imagerie. Nous verrons au paragraphe 3.4 qu'il y a plus grave : le phénomène de Gibbs (voir la figure 3.2). Le long des discontinuités de l'image, apparaissent toujours des oscillations résiduelles, quel que soit le nombre de coefficients transmis.

En conclusion, la transformée en cosinus, s'affranchissant des discontinuités aux frontières du domaine de l'image, présente un double avantage sur la transformée de Fourier. En termes d'économie de la représentation, elle tire mieux partie de l'éventuelle régularité de la fonction à l'intérieur de son domaine (régularité souvent élevée dans le cas d'images). De plus, elle évite l'apparition d'oscillations résiduelles le long de ces frontières.

3.4 Phénomène de Gibbs

La représentation d'un signal par sa série de Fourier conduit à l'apparition d'oscillations résiduelles, dont l'amplitude ne dépend pas du nombre de coefficients utilisés pour représenter la fonction. Ce résultat mathématique sur l'approximation d'un signal par les sommes partielles de sa série de Fourier porte le nom de phénomène de Gibbs. Ce phénomène est observé à la sortie de tout système physique ou numérique mesurant ou calculant une fonction f . Si la fonction $f(t)$ (t désignant par exemple le temps) "saute" brusquement d'une valeur à une autre, alors l'expérimentateur observe une série d'oscillations avant et après le saut. Il se gardera bien de les interpréter comme faisant partie du signal. En effet, le phénomène est dû au fait que les appareils de mesure (et les programmes numériques sur ordinateur) "tronquent" nécessairement les hautes fréquences. Cela veut aussi dire que l'on n'observe jamais les fonctions elles mêmes, mais des sommes partielles de leur série de Fourier. Et on observe

donc aussi les “parasites” dûs à cette troncature en fréquence ; en particulier, le phénomène de Gibbs. Du point de vue mathématique, on peut énoncer le phénomène comme suit :

“ Si une fonction f , par ailleurs régulière, présente un saut en un point, alors les sommes partielles $s_N f$ de sa série de Fourier accentuent ce saut en le multipliant par un facteur qui ne dépend pas de N .”

On commence par donner le résultat précis dans un cas simple : on considère la fonction “en dents de scie” $s(x)$, 2π -périodique et telle que $s(x) = \frac{\pi-x}{2}$ sur $[0, 2\pi[$. Le calcul des coefficients de Fourier de s et le corollaire 3.2 montrent que $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ au sens de la convergence L^2 , ainsi qu’en tout point de l’intervalle ouvert $]0, 2\pi[$, d’après la proposition 3.1. On considère les sommes partielles de cette série de Fourier, $s_n(x) =: \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.

Proposition 3.2 (Phénomène de Gibbs) :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, x \rightarrow 0^+} s_n(x) = (1+c)s(0^+); \quad \liminf_{n \rightarrow \infty, x \rightarrow 0^+} s_n(x) = (1-c')s(0^+). \quad (3.3)$$

Démonstration On va étudier la suite $s_n(\frac{\pi}{n})$ quand $n \rightarrow \infty$. On commence par étudier les variations de $G(a) =: \int_0^a \frac{\sin(t)}{t} dt$ pour en déduire que $G(\pi) > G(+\infty)$. La fonction $G(a)$ est croissante sur les intervalles pairs $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ et décroissante sur les intervalles impairs. On voit aisément que $|G((n+1)\pi) - G(n\pi)|$ est une suite décroissante. Il en résulte que la suite $G(2n\pi)$ est une suite croissante strictement, la suite $G((2n+1)\pi)$ une suite strictement décroissante, et les deux convergent vers une valeur commune notée $G(+\infty)$. On a donc $G(\pi) > G(+\infty)$. On sait par ailleurs que $G(+\infty) = \frac{\pi}{2}$. Revenons à la suite $s_n(\frac{\pi}{n})$. On a

$$s_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{k} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\frac{k\pi}{n}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

La dernière limite vient du fait que l’on reconnaît la somme de Riemann associée à l’intégrale. Mais

$$s_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow G(\pi) > G(+\infty) = \frac{\pi}{2} = s(0^+),$$

car $s(0^+) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$. Donc pour tout n , il y a une valeur très proche de 0, en l’occurrence $\frac{\pi}{n}$, telle que la somme partielle de la série de Fourier dépasse d’un facteur constant $\frac{G(\pi)}{G(+\infty)}$ la valeur de la limite $s(0^+)$. Pour raisons de symétrie, la même chose se produit en 0^- avec la suite $s_n(-\frac{\pi}{n})$. Nous avons donc montré l’existence des limites sup et inf de l’équation (3.3). \circ

Exercice 5 On peut préciser un peu plus le résultat précédent en donnant le comportement asymptotique de $s_n(x)$ au voisinage de 0, ce qui permet de tracer les oscillations de s_n au voisinage de la discontinuité. Montrer que pour $|x| \leq 1$ et uniformément en x ,

$$s_n(x) = \int_0^x \frac{\sin(nt)}{t} dt - \frac{x}{2} + O\left(x, \frac{1}{n}\right).$$

Numériquement, les constantes positives c et c' sont de l'ordre de 0,18. Plus précisément, la somme partielle s_n de la série de Fourier de f présente des oscillations, maximales aux points $\frac{k\pi}{n}$. Les oscillations de cette approximation ont donc une fréquence de plus en plus élevée avec l'ordre d'approximation n , mais l'erreur reste proportionnelle au saut de la fonction f . Ce résultat se généralise au cas d'une fonction C^1 sur $[0, 2\pi]$, mais pas 2π périodique. Pour ce faire, on soustrait à la fonction f une fonction en "dents de scie" $\lambda s + \mu = \tilde{s}$, où λ et μ ont été choisis de manière à la rendre Lipschitzienne et on applique à la différence $f - \tilde{s}$ le principe de localisation. Il y a donc convergence uniforme de la série de Fourier de $f - \tilde{s}$ vers $f - \tilde{s}$, alors que la série de Fourier de \tilde{s} présente le phénomène de Gibbs. Le développement de Fourier de f présente donc aussi le phénomène de Gibbs.

Nous illustrons, à la figure 3.1, le phénomène dans le cas de la fonction 2π -périodique, impaire, et valant 1 sur l'intervalle $]0, \pi]$. Nous montrons les sommes partielles de sa série de Fourier. Remarquons en particulier le fait que l'erreur maximum ne varie pas avec le nombre de coefficients de l'approximation. En revanche, la fréquence de ces oscillations augmente avec l'ordre d'approximation. Nous présentons ensuite une illustration du phénomène de Gibbs dans le cas des images numériques : partant d'une image, nous calculons sa série de Fourier (en fait une approximation finie de cette série présentée au paragraphe suivant : la transformée de Fourier discrète), mettons les hautes fréquences à zéro, puis calculons l'image dont la série de Fourier est celle ainsi obtenue (anticipant sur les définitions et notations du paragraphe suivant sur la transformée de Fourier discrète, nous multiplions l'image \tilde{u}_{mn} par la fonction indicatrice d'un carré centré sur $\tilde{u}_{0,0}$, puis appliquons la TFD inverse). Nous montrons le résultat figure 3.2, où l'image originale est placée à gauche. Le résultat, image obtenue après troncature des hautes fréquences, à droite, présente de très nombreuses oscillations.

Ce phénomène apparaît également lorsque le spectre est utilisé à des fins de manipulation d'image, comme nous le verrons au chapitre suivant.

3.5 Note historique

3.5.1 Gammes, harmoniques

L'audition humaine va de 25 Hz à 20000 Hz (chez l'enfant). Le piano (voir le site

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Fréquencesdestouchesdupiano>) de 27,5 Hz à 4186 Hz, note la plus aigüe, pour 88 touches.

Sur les harmoniques et la gamme naturelle :

Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Gamme_naturelle

Un harmonique est l'élément de décomposition primaire d'une fonction périodique exprimé dans la base de Hilbert.

En d'autres termes, un harmonique correspond à une fonction trigonométrique sinusoïdale (sinus ou cosinus) dont la fréquence est un multiple de la fréquence de la fonction périodique décomposée. La somme infinie de tous les harmoniques d'une fonction périodique reconstitue la fonction.

Comme un signal périodique peut se décomposer en une somme de sinus et cosinus dont les fréquences sont des multiples de la fréquence du signal (dite fréquence fondamentale), le << poids >> de certains harmoniques dans la décomposition spectrale d'un son correspond au module de leur coefficient harmonique dans le plan complexe.

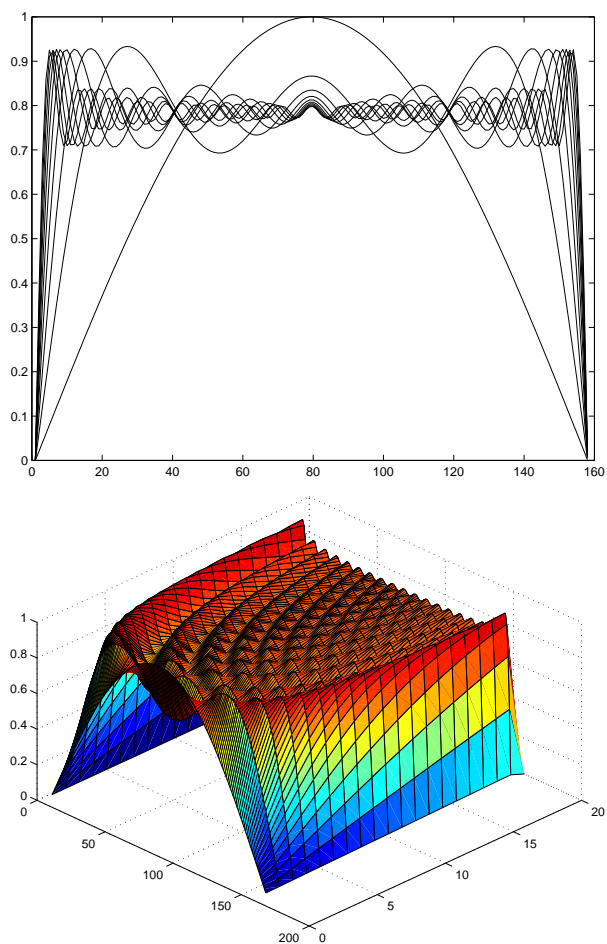


FIGURE 3.1 – Sommes partielles de la série de Fourier de la fonction 2π -périodique, impaire, valant 1 sur $]0, \pi]$. Haut : les approximations sont représentées sur le même graphe, sur l'intervalle $]0, \pi]$. Bas : les différentes approximations sont tracées selon un troisième axe (nombre de termes entre 1 et 20). On remarque que l'erreur maximale d'approximation ne varie pas avec le nombre de termes, tandis que la fréquence des oscillations augmente.



FIGURE 3.2 – Illustration de l'effet de Gibbs. Gauche : l'image originale ; droite : l'image après que l'on ait tronqué ses hautes fréquences, et sur laquelle sont visibles de nombreuses oscillations. L'image de droite est obtenue en ne conservant que les fréquences dont le module est inférieur au quart de la fréquence maximale. Le phénomène est particulièrement visible le long des frontières du domaine de l'image (voir en particulier le côté droit) et le long des discontinuités de l'image. Remarquons que l'image est également devenue floue par suppression des hautes fréquences.

Le son le plus simple acoustiquement parlant n'a qu'un harmonique, la fréquence fondamentale, les autres harmoniques ayant un module nul. C'est donc une sinusoïde, mais sa phase dépend de la répartition entre la partie réelle (cosinus) et imaginaire (sinus) de l'harmonique, autrement dit de son argument complexe.

Il y d'abord la gamme musicale fondée sur le choix d'harmoniques simples du son fondamental (ou tonique). Du fait de cette définition, on parle aussi de gamme des physiciens.

Il ne fait pas de doute que les phénomènes de consonance ont été identifiés par les premiers musiciens avant que les mathématiciens n'en élaborent une théorie. Les premières gammes naturelles, créées de façon empirique, ont donc certainement précédé de très longtemps la gamme pythagoricienne, édifice algébrique assez complexe.

La gamme pythagoricienne est construite à partir d'un harmonique particulier, la quinte, puis par des montées successives de quintes le nombre de fois nécessaires pour parcourir une octave complète.

Il est à remarquer que les sons obtenus par cette méthode sont des harmoniques de plus en plus complexes du son fondamental. On a vu aussi que cette méthode ne permet pas de retrouver directement la quarte qui est pourtant un harmonique très simple ($4/3$) de celle-ci (et complément obligatoire de la quinte).

La gamme pythagoricienne, d'ailleurs, résultat de spéculations théoriques remarquables, n'est pas sans défauts :

* le problème du comma, résolu faute de mieux par la << quinte du Loup >>, interdit certaines combinaisons de notes et certaines modulations ; * certains intervalles très intuitifs, et particulièrement la tierce majeure (DO-MI) ne sont pas générés de façon parfaite, et sonnent, en réalité, assez faux.

D'où les tentatives des théoriciens pour mettre en uvre d'autres méthodes, basées sur d'autres considérations.

Les sons harmoniques ou partiels

Un son musical invariable continu résulte de la superposition (ou combinaison) d'un son simple et de ses sons harmoniques dont les fréquences sont des multiples entiers de sa propre fréquence. On appelle le seconde harmonique le son de fréquence double, troisième le son de fréquence triple etc. On appelle sons partiels des sons plus aigus que l'on peut entendre ou extraire par analyse lorsqu'un instrument émet un son, et qui sont très proches des sons harmoniques.

Si l'on part du DO 0 en prenant sa fréquence comme unité :

- partiel 1 : fréquence 1 (=DO 0)
- partiel 2 : fréquence 2 (=DO 1)
- partiel 3 : fréquence 3 (=SOL 1)
- partiel 4 : fréquence 4 (=DO 2)
- partiel 5 : fréquence 5 (=MI 2, tierce pure)
- partiel 6 : fréquence 6 (=SOL 2)
- partiel 7 : fréquence 7
- partiel 8 : fréquence 8 (=DO 3)
- partiel 9 : fréquence 9 (=RE 3)

- partiel 10 : fréquence 10 (=MI 3, tierce pure)
- partiel 11 : fréquence 11
- partiel 12 : fréquence 12 (=SOL 3)
- partiel 13 : fréquence 13
- partiel 14 : fréquence 14
- partiel 15 : fréquence 15
- partiel 16 : fréquence 16 (=DO 4)
- etc.

Les noms des notes ci-dessus correspondent aux hauteurs définies dans la gamme de Pythagore sauf pour les MI. Comme on le voit, la note SOL est un harmonique de la note DO, mais pas de celle qui la précède dans son octave : DO 0 pour SOL 1, DO 1 pour SOL 2 etc. Donc l'intervalle de quinte (rapport $3/2$) relie deux notes DO 1 et SOL 1 par exemple dont la plus aiguë n'est pas un harmonique de la plus grave ; cependant les deux sont des harmoniques d'une même troisième note plus grave. C'est donc par un abus de langage, qu'autorise le principe de l'équivalence des octaves, que l'on peut énoncer que SOL est un harmonique de DO. C'est aussi par commodité que, de même, on considèrera dans ce qui suit comme en rapport harmonique des sons dont les fréquences relatives sont en rapport rationnel l'une par rapport à l'autre : il existe alors une note suffisamment grave (mais peut-être inaudible !) dont elles sont toutes deux de vrais partiels.

3.5.2 Séries trigonométriques

NOTE HISTORIQUE (WIKIPEDIA)

Les premières considérations sur les séries trigonométriques apparaissent vers 1400 en Inde, chez Madhava, chef de file de l'école du Kerala[1]. En Occident, elles apparaissent au XVIIe siècle chez James Gregory, au début du XVIIIe chez Brook Taylor. C'est l'ouvrage de ce dernier, *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, paru en 1715, qui donne le coup d'envoi à l'étude systématique des cordes vibrantes et de la propagation du son, thème de recherche majeur pendant tout le siècle.

Une controverse éclate dans les années 1750 entre d'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli sur le problème des cordes vibrantes. D'Alembert détermine l'équation d'onde et ses solutions analytiques. Bernoulli les obtient également, sous forme de décomposition en série trigonométrique. La controverse porte sur la nécessité de concilier ces points de vue avec les questions de régularité des solutions. Selon J.-P. Kahane[2], elle aura un rôle majeur dans la genèse des séries de Fourier.

Bernoulli avait introduit des séries trigonométriques dans le problème des cordes vibrantes pour superposer des solutions élémentaires. Le trait de génie de Joseph Fourier est de considérer cette décomposition comme un outil systématique d'analyse. Il en fait usage en 1822 pour résoudre l'équation de la chaleur dans son ouvrage *Théorie analytique de la chaleur*.

Fourier énoncé qu'une fonction arbitraire peut être décomposée sous forme de série trigonométrique, et qu'il est facile de prouver la convergence de celle-ci.

Dans un article de 1829, Dirichlet donne un premier énoncé correct, et correctement démontré de convergence, mais, faute d'une théorie de l'intégration adaptée, il se limite à une classe très particulière de fonctions.

Avancée conjointe des séries de Fourier et de l'analyse réelle

Le Mémoire sur les séries trigonométriques de Riemann, publié en 1867, constitue une avancée décisive. L'auteur lève un obstacle majeur en définissant pour la première fois une théorie de l'intégration satisfaisante. Il démontre notamment que les coefficients de Fourier ont une limite nulle à l'infini, et un résultat de convergence connu comme le théorème de sommabilité de Riemann.

Georg Cantor publie une série d'articles sur les séries trigonométriques entre 1870 et 1872, où il démontre son théorème d'unicité. Cantor raffine ses résultats en recherchant des "ensembles d'unicité", pour lesquels son théorème reste vérifié. C'est l'origine de l'introduction de la théorie des ensembles.

En 1873 Du Bois-Reymond donne le premier exemple de fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge en un point. Le dernier quart du XIXe siècle voit relativement peu d'avancées dans le domaine des séries de Fourier ou de l'analyse réelle en général, alors que l'analyse complexe connaît une progression rapide.

Dans un note de 1900[3], Fejér démontre son théorème de convergence uniforme utilisant le procédé de sommation de Cesàro. Surtout, il dégage un principe nouveau : l'association systématique entre régularisation au moyen d'un << noyau >> et procédé de sommation pour la série de Fourier.

3.6 Exercices

Exercice 6

1) Soit $(s_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que $s_n \rightarrow s$. Montrer que

$$\frac{1}{n+1} \sum_0^n s_j \rightarrow s.$$

2) Montrer qu'il existe $(s_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que $(s_n)_n$ ne converge pas et

$$\frac{1}{n+1} \sum_0^n s_j \text{ converge.}$$

Exercice 7

On note $\mathcal{C}(\Pi) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), 2\pi\text{-périodiques}\}$, que l'on munit de $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$. On notera $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$. Soit $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, on définit les coefficients de Fourier de f par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On note

$$S_n(f, t) = \sum_{-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ et}$$

$$\sigma_n(f, t) = \frac{1}{n+1} \sum_0^n S_j(f, t).$$

1) On pose $D_N(t) = \sum_{-N}^N e^{ikt}$ et $K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_0^N D_j(t)$, pour $N \in \mathbb{N}$.

Montrer que

$$D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad t \neq 0, \quad D_N(0) = 2N + 1,$$

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2, \quad t \neq 0, \quad K_N(0) = N + 1.$$

2) Vérifier que $K_N(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|K_N\|_1 = 1$ et que $\forall \delta > 0$, $K_N \rightarrow 0$ uniformément sur $\delta \leq |t| \leq \pi$.

3) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, $\sigma_n(f) \rightarrow f$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$. (Remarque que $\sigma_n(f, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t-x) dx = K_n \star f(t) = f \star K_n(t)$.)

4) On appelle polynôme trigonométrique, toute fonction de la forme $\sum_{-n}^n a_k e^{ikt}$.

En déduire que les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\Pi)$ et que si $f, g \in \mathcal{C}(\Pi)$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ alors $f = g$.

5) Théorème de Du Bois-Reymond :

$\exists f \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\limsup |S_n(f, 0)| = +\infty$.

Pour démontrer ce résultat, on définit $\Lambda_n : \mathcal{C}(\Pi) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\Lambda_n(f) = S_n(f, 0)$.

a) Vérifier que $\Lambda_n \in (\mathcal{C}(\Pi))'$.

b) Montrer que $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$.

c) Montrer que $\|D_n\|_1 \rightarrow +\infty$ (par exemple : $\|D_n\|_1$ est plus grand que la somme partielle d'une série divergente.)

d) En déduire que $\exists f \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\sup_n |S_n(f, 0)| = +\infty$.

6) Soit $f \in L^1(-\pi, \pi)$ telle que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p(x) dx = 0$ pour tout polynôme p trigonométrique, vérifier que $f = 0$ p.p.

7) Soit $f \in L^1(-\pi, \pi)$, on note $c(f) = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Vérifier que

$$c(f) \in C_0(\mathbb{Z}) = \{c = (c_n)_n : c_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \pm\infty\}.$$

Montrer que l'application $T : L^1(-\pi, \pi) \rightarrow C_0(\mathbb{Z})$ définie par $T(f) = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est linéaire continue injective mais non surjective.

Chapitre 4

Transformées de Fourier bidimensionnelles

4.1 Base de Fourier sur un carré

Dans ce chapitre, on va d'abord généraliser les séries de Fourier à des fonctions définies sur le carré $[0, 2\pi]^2$, puis à des fonctions périodiques sur un réseau de \mathbb{R}^2 . Tous les énoncés se généralisent sans changement de démonstration à la dimension N . Nous traitons le cas $N = 2$ pour éviter des indices de sommation inutiles. On pose $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ et on note $k \cdot x = k_1 x_1 + k_2 x_2$ leur produit scalaire.

Lemme 4.1 *Les fonctions séparables, c'est-à-dire de la forme $w(x) = u(x_1)v(x_2)$ avec $u, v \in L^2(0, 2\pi)$ forment un système total de $L^2([0, 2\pi]^2)$.*

Démonstration Les fonctions caractéristiques de rectangles sont séparables et elles forment un système total de $L^2([0, 2\pi]^2)$. \circ

Théorème 4.1 *Les fonctions $e_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ik \cdot x}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, forment une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi]^2)$ et on a donc pour toute fonction $u \in L^2([0, 2\pi]^2)$,*

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k(u) e^{ik \cdot x}, \text{ avec } c_k(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0, 2\pi]^2} u(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad (4.1)$$

la convergence de la série se vérifiant au sens de L^2 .

Démonstration On vérifie facilement que e_k est un système orthonormé. Pour montrer qu'il est total, il suffit de montrer, par le lemme 4.1, que les e_k engendrent les fonctions séparables. Mais si $w(x) = u(x_1)v(x_2) \in L^2([0, 2\pi]^2)$ est une telle fonction, par une application directe du théorème de Fubini, $u(x_1)$ et $v(x_2)$ sont dans $L^2(0, 2\pi)$. Les fonctions u et v sont donc sommes au sens L^2 de leurs séries de Fourier :

$$\begin{aligned} u(x_1) &= \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} c_{k_1} e^{ik_1 x_1}, \quad c_{k_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} u(x_1) e^{-ik_1 x_1}; \\ v(x_2) &= \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_2} e^{ik_2 x_2}, \quad c_{k_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} v(x_2) e^{-ik_2 x_2}; \end{aligned}$$

En multipliant simplement les relations précédentes, on obtient une série double convergente dans $L^2([0, 2\pi]^2)$, ce qui donne (4.1) dans le cas d'une fonction séparable $w(x) = u(x_1)v(x_2)$ avec $c_k(w) = c_{k_1}(u)c_{k_2}(v)$. Il en résulte que le système $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi]^2)$ et (4.1) est donc valide. \circ

4.2 Base de Fourier sur un réseau

Définition 4.1 Un sous-ensemble Γ de \mathbb{R}^2 est appelé un réseau s'il existe une base (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 telle que les éléments de Γ soient exactement les vecteurs dont les composantes dans cette base sont entières : $\gamma = x_1e_1 + x_2e_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. On dit alors que (e_1, e_2) est une base du réseau Γ . On dit qu'une fonction f définie dans \mathbb{R}^2 est Γ -périodique si on a $f(x + \gamma) = f(x)$ pour tout γ dans Γ .

Remarque 4.1 Tout changement de base

$$\tilde{e}_1 = ae_1 + be_2, \tilde{e}_2 = ce_1 + de_2 \text{ vérifiant } |ad - bc| = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

est licite et nous donne une nouvelle base du réseau. Réciproquement, si $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \in \Gamma$ est une autre base du réseau, on est assuré de l'existence de $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ vérifiant (4.2), car la matrice de changement de base doit être inversible et d'inverse à coefficients entiers, ce qui impose que son déterminant vaille $+1$ ou -1 .

Définition 4.2 et Proposition On considère l'ensemble Γ^* des $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait

$$k \cdot \gamma \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Alors Γ^* est un réseau, appelé réseau réciproque de Γ , et dont une base peut être définie de la manière suivante : Si (e_1, e_2) est une base de Γ , on appelle base réciproque de (e_1, e_2) l'unique système (e_1^*, e_2^*) vérifiant

$$e_i \cdot e_j^* = 2\pi\delta_{ij}. \quad (4.3)$$

Alors (e_1^*, e_2^*) engendrent Γ^* .

Démonstration Si $k \in \mathbb{R}^2$ appartient à Γ^* , on note (k_1, k_2) ses composantes dans la base réciproque (e_1^*, e_2^*) d'une base (e_1, e_2) de Γ . On a, en utilisant les relations de réciprocité (4.3), $(k, e_1) = 2\pi k_1$ et $(k, e_2) = 2\pi k_2$ et comme k est dans Γ^* , on en déduit que $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, si k est dans le réseau engendré par (e_1^*, e_2^*) , on a $k = k_1e_1^* + k_2e_2^*$. Si $\gamma = x_1e_1 + x_2e_2 \in \Gamma$, on a par les relations de réciprocité (4.3),

$$k \cdot \gamma = 2\pi k_1 x_1 + 2\pi k_2 x_2 \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

\circ

Corollaire 4.1 Soit Γ un réseau de \mathbb{R}^2 et Γ^* son réseau réciproque. Alors la fonction de deux variables $x \rightarrow e^{ik \cdot x}$ est Γ -périodique si et seulement si $k \in \Gamma^*$.

Démonstration Comme $e^{ik \cdot (x+\gamma)} = e^{ik \cdot x} e^{ik \cdot \gamma}$, la Γ -périodicité équivaut à $e^{ik \cdot \gamma} = 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit $k \cdot \gamma \in 2\pi\mathbb{Z}$, et donc à $k \in \Gamma^*$. \circ

Définition 4.3 (mailles d'un réseau) Soit Γ un réseau et (e_j) une base de celui-ci. On appelle maille de Γ pour la base (e_j) un parallépipède

$$M = \left\{ \sum_1^2 x_j e_j, a_j \leq x_j < a_j + 1 \right\}, \quad (4.4)$$

où les a_j appartiennent à \mathbb{R} . Lorsque γ parcourt Γ , les translatés $M + \gamma$ de la maille M sont deux à deux disjoints et recouvrent \mathbb{R}^2 .

Théorème 4.2 Soient M et M' deux mailles d'un réseau Γ , relatives à deux bases (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) . Alors, pour toute fonction localement sommable et Γ -périodique, les intégrales de f sur M et M' sont égales. En particulier, M et M' ont la même surface.

Démonstration Le second énoncé découle du premier en prenant $f = 1$. Considérons les ensembles $A_\gamma = M' \cap (M + \gamma)$. L'ensemble M' étant borné, l'ensemble $\Gamma_0 \subset \Gamma$ constitué des γ tels que $A_\gamma \neq \emptyset$ est fini. Les A_γ sont disjoints et recouvrent M' . Notons B_γ le translaté $A_\gamma - \gamma$. Les B_γ sont contenus dans M . Montrons qu'ils sont disjoints : si on avait $x \in B_\gamma \cap B_{\gamma'}$, on aurait dans une même maille M' deux points $x + \gamma$ et $x + \gamma'$ dont la différence est un vecteur du réseau ; cela est interdit par (4.4). Montrons que la réunion des B_γ est M : si x appartient à M , il appartient aussi, comme tout point de \mathbb{R}^2 , à un certain translaté M'_{γ_0} de la maille M' par un élément du réseau ; cela signifie que $x + \gamma_0 \in A_{\gamma_0}$ et donc que $x \in B_{\gamma_0}$.

En conclusion, nous avons écrit M' comme réunion disjointe d'un nombre fini d'ensembles A_γ , $\gamma \in \Gamma_0$ et M comme réunion disjointe des translatés $B_\gamma = A_\gamma - \gamma$. On a donc, pour f localement sommable et Γ -périodique,

$$\begin{aligned} \int_{M'} f(x) dx &= \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \int_{A_\gamma} f(x) dx = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \int_{B_\gamma} f(y + \gamma) dy = \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \int_{B_\gamma} f(y) dy = \int_M f(y) dy. \end{aligned}$$

\circ

Corollaire 4.2 On appelle plus généralement cellule de Γ un sous-ensemble borné D de \mathbb{R}^2 tel que les translatés $D + \gamma$, $\gamma \in \Gamma$, soient deux à deux disjoints et recouvrent \mathbb{R}^2 . Alors l'intégrale sur D d'une fonction f localement sommable et Γ -périodique ne dépend pas de D et est égale à l'intégrale de f sur une maille du réseau.

Démonstration Il suffit de reprendre la démonstration précédente en remplaçant M par D . \circ

Théorème 4.3 Notons L_Γ^2 l'espace des fonctions localement de carré sommable et Γ -périodiques muni du produit scalaire

$$(f, g) = \frac{1}{S} \int_M \overline{f(x)} g(x) dx,$$

où M est une cellule quelconque du réseau et S sa surface. Alors L_Γ^2 est un espace de Hilbert, et les fonctions $x \rightarrow e^{ik \cdot x}$, $k \in \Gamma^*$ en constituent une base hilbertienne. Toute fonction $f \in L_\Gamma^2$ peut donc se décomposer d'une manière unique sous la forme

$$f = \sum_{k \in \Gamma^*} c_k(f) e^{ik \cdot x}, \text{ avec } c_k(f) = \frac{1}{S} \int_M e^{-ik \cdot x} f(x) dx.$$

Démonstration L'espace L_Γ^2 est isométrique à $L^2(M)$ et est donc un espace de Hilbert. Soit (e_1, e_2) une base du réseau Γ et choisissons la maille $M = \{x_1 e_1 + x_2 e_2, 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$. On considère l'isomorphisme I de $L^2(M)$ dans $L^2([0, 1]^2)$ défini par $I f(x_1, x_2) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2)$. Comme toute fonction de $L^2([0, 1]^2)$ est décomposable en série double de Fourier (théorème 4.1), on peut écrire

$$I f(x_1, x_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1 k_2} e^{2i\pi(k_1 x_1 + k_2 x_2)}.$$

Posons $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$; on a donc

$$f(x) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1 k_2} e^{2i\pi(k_1 x_1 + k_2 x_2)}.$$

En utilisant la définition de la base duale (e_1^*, e_2^*) , on a $e_1^* \cdot x = 2\pi x_1$, $e_2^* \cdot x = 2\pi x_2$ et $k = k_1 e_1^* + k_2 e_2^* \in \Gamma^*$. Donc

$$f(x) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1 k_2} e^{i(k_1 e_1^* + k_2 e_2^*) \cdot x} = \sum_{k \in \Gamma^*} c_k(f) e^{ik \cdot x}.$$

De plus (théorème 4.1),

$$c_k(f) = c_{k_1 k_2} = \int_{[0, 1]^2} f(x_1 e_1 + x_2 e_2) e^{-2i\pi(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

On fait le changement de variable $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, qui applique $[0, 1]^2$ sur M et dont le jacobien est le rapport des aires, c'est-à-dire S . Donc, pour tout $k \in \Gamma^*$,

$$c_k(f) = \int_S f(x) e^{-ik \cdot x} \frac{dx}{S}.$$

◻

On note L_Γ^1 l'ensemble des fonctions Γ -périodiques et localement intégrables.

Définition 4.4 et Proposition Soit Γ un réseau de \mathbb{R}^2 , D une cellule du réseau et u, v deux fonctions de L_Γ^1 . On définit la convolée Γ -périodique de u et v par

$$u * v(x) = \int_D u(x - y) v(y) dy. \quad (4.5)$$

Alors $u * v$ ne dépend pas du choix de la cellule D et appartient aussi à L_Γ^1 .

Démonstration C'est une conséquence immédiate du corollaire 4.2. ◻

Proposition 4.1 *La convolution Γ -périodique jouit des propriétés de la convolution sur \mathbb{R}^2 : commutativité, associativité. Si $f, g \in L^2_\Gamma$, alors leur convolée est continue et Γ -périodique et on a*

$$\forall k \in \Gamma^*, \quad c_k(f * g) = S c_k(f) c_k(g). \quad (4.6)$$

Démonstration Les démonstrations sont strictement les mêmes qu'en dimension 1 grâce au théorème 4.3 et au corollaire 4.2. ◻

Chapitre 5

Le cas discret

5.1 Transformée de Fourier Discrète, applications

5.1.1 La dimension 1

La transformée de Fourier discrète est un moyen de calculer les coefficients de Fourier d'une fonction a -périodique u à partir de ses N échantillons $u(\frac{ka}{N})$, $k = 0, \dots, N-1$. Cela n'est possible que si la fonction présente un nombre de fréquences inférieur ou égal à N . Pour coller à la pratique numérique, nous supposons toujours dans ce chapitre que N est pair. En général, N est une puissance de 2. Tous les résultats énoncés (sauf ceux du paragraphe 5.1.4 relatifs à la transformée de Fourier rapide) s'adaptent toutefois sans difficulté au cas N impair. Soit $u(x)$ une fonction réelle ou complexe de période a , et N un entier pair. On cherche un polynôme trigonométrique de la forme

$$P(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{a}\right), \quad (5.1)$$

qui soit égal à u aux points $\frac{ka}{N}$ pour $k = 0, \dots, N-1$. On dira dans la suite que P est de degré $\frac{N}{2}$. Le but est donc d'interpoler les échantillons $u(\frac{ka}{N}) = u_k$.

Pourquoi choisir un polynôme trigonométrique? La raison est physique : tous les dispositifs d'acquisition de signaux (sons) ou images ont une *bande passante*, c'est-à-dire un intervalle de fréquences captées par le dispositif d'enregistrement ; les autres fréquences sont perdues ou tellement atténuées qu'on les néglige : on suppose donc ici que la "bande passante" est contenue dans l'intervalle $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$. Il n'y a par contre aucune raison de supposer que le signal ou l'image soit périodique, et en plus d'une période qui coïncide avec la fenêtre d'observation $[0, a]$ comme nous sommes en train de le supposer pour P . Cette hypothèse est donc imposée à la donnée par une périodisation abusive, et provoque une distorsion près des bords de l'image que l'on peut voir et évaluer : c'est le phénomène de Gibbs. Si la fonction u dont on possède les N échantillons n'avait pas une bande de fréquence contenue dans $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$, son interpolation par un polynôme trigonométrique de degré $\frac{N}{2}$ provoque une autre distorsion, très grave, que nous allons évaluer précisément dans ce chapitre : l'aliasage. On va commencer par calculer les coefficients de P .

Exercice 1 On pose $\omega_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$, racine N -ième de l'unité. Montrer que

$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^k = 0$, puis que $\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kl} = 0$ pour $l \neq 0$ modulo N et finalement que pour tout k_0 , $\sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} \omega_N^{kl} = 0$ pour tout $l \neq 0$ modulo N .

Définition 5.1 On pose $u_k = u\left(\frac{ka}{N}\right)$ et, pour $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$,

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl}. \quad (5.2)$$

Les N coefficients \tilde{u}_n sont appelés transformée de Fourier discrète (TFD) des N échantillons u_k . On appelle transformée de Fourier discrète inverse l'application de \mathbb{C}^N dans lui-même définie par

$$u_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{kn}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (5.3)$$

Proposition 5.1 Les coefficients (\tilde{u}_n) définis par (5.2) sont les uniques coefficients tels que le polynôme trigonométrique (5.1) vérifie $P\left(\frac{ka}{N}\right) = u_k$, pour tout $k = 0, \dots, N-1$. En d'autres termes, la transformée de Fourier discrète composée avec son inverse donne bien l'identité.

Démonstration Pour $k = 0, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{ka}{N}\right) &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl} \right) \omega_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \left(\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \omega_N^{nk-nl} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} N \delta(k-l) u_l = u_k, \end{aligned}$$

où on a noté δ la fonction définie sur les entiers, valant 1 en 0, et 0 ailleurs. L'unicité provient du fait que toute application linéaire surjective de \mathbb{C}^N dans lui-même est aussi injective. \circ

Corollaire 5.1 Si u est un polynôme trigonométrique $u(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{a}\right)$, les coefficients \tilde{u}_n sont obtenus à partir des échantillons de u par la formule (5.2). Ce sont les coefficients de Fourier de u .

Exercice 2 On note u un vecteur de \mathbb{C}^N et $\text{TFD}(u) = \tilde{u}$ sa transformée de Fourier discrète. Vérifier que \sqrt{N} TFD est unitaire et calculer TFD^{-1} grâce à la formule $\text{TFD}^{-1} = N {}^t\overline{\text{TFD}}$.

On rappelle d'autre part que si $u \in L^2(0, a)$, les coefficients de la série de Fourier de u sont définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par

$$c_n(u) = \frac{1}{a} \int_0^a u(x) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{a}\right). \quad (5.4)$$

PSfrag replacements

u
 u_k échantillonnage
 \hat{u}_k
 TFD
 Série de Fourier
 échantillonnage

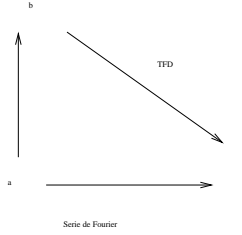


FIGURE 5.1 – La TFD après échantillonnage calcule bien les coefficients de Fourier si la fonction u est un polynôme trigonométrique (corollaire 5.1)

Les coefficients \tilde{u}_n de la transformée de Fourier discrète sont approchés par les termes de la TFD de (u_k) au sens suivant :

Proposition 5.2 *Soit u continue et a -périodique. Alors les \tilde{u}_n sont des approximations des $c_n(u)$ par la formule des trapèzes, pour $n = \frac{-N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.*

Démonstration Il suffit d'écrire l'approximation de l'intégrale (5.4) par la méthode des trapèzes en tenant compte du fait que $u(a) = u(0)$ pour une fonction a -périodique. ◦

Proposition 5.3 *On suppose que les échantillons u_k sont réels. Alors \tilde{u}_0 et $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}}$ sont réels, et pour $k = 1 \dots \frac{N}{2} - 1$, $\tilde{u}_k = \overline{\tilde{u}_{-k}}$.*

Démonstration $\tilde{u}_0 = \frac{1}{N} \sum_k u_k$, et $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum (-1)^k u_k$; ces deux coefficients sont donc réels. D'autre part

$$\tilde{u}_{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \overline{\omega_N^{-nk}} = \overline{\tilde{u}_n}.$$

◦

Remarquons le rôle particulier joué par le terme $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}}$, qui n'a pas de terme conjugué lui correspondant.

Proposition 5.4 *si u est un polynôme trigonométrique réel dont les fréquences sont parmi $-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$, le terme $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}}$ est nul.*

Démonstration En effet, en regroupant les termes conjugués, on a, pour le polynôme trigonométrique P dont les coefficients sont les \tilde{u}_n :

$$P(x) = \tilde{u}_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} (\tilde{u}_n e^{\frac{2in\pi x}{a}} + \tilde{u}_{-n} e^{-\frac{2in\pi x}{a}}) + \tilde{u}_{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{iN\pi x}{a}}.$$

Tous les termes de la somme sont réels sauf le dernier, qui ne l'est que si $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}} = 0$. ◦

La Figure 5.2 montre un exemple de signal (représentant le son A) et le module de sa TFD.

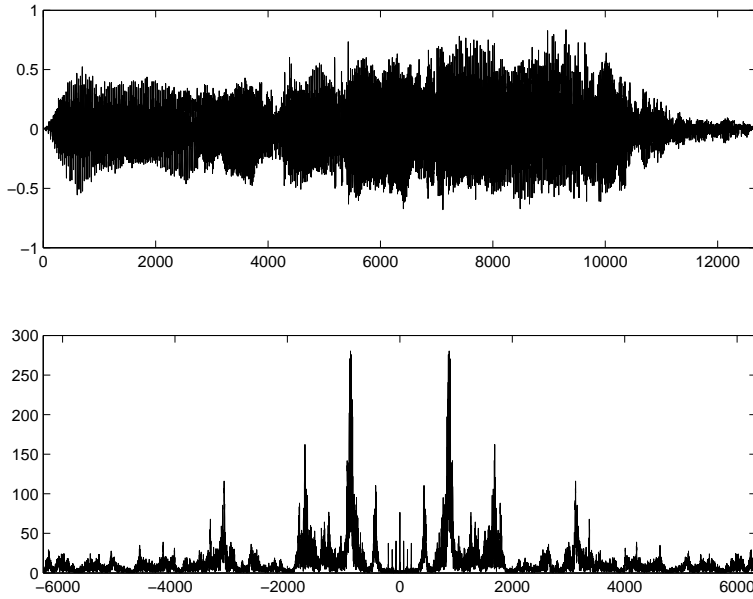


FIGURE 5.2 – Haut : un signal correspondant à la voyelle "Ah" (le signal représente la pression de l'air en fonction du temps); bas : module de la TFD (coefficients $|\tilde{u}|$, voir le texte). On remarque que le module du spectre est symétrique, et qu'il existe trois pics importants correspondant aux fréquences dominantes.

5.1.2 La dimension 2

On considère un réel a , une fonction u de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , telle que $u(x+a, y+a) = u(x, y)$. On fixe à nouveau un entier N , et l'on pose $u_{k,l} = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$. On définit la TFD des $u_{k,l}$ comme la suite des coefficients, pour $m, n \in \{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$,

$$\tilde{u}_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} u_{k,l} \omega_N^{-mk} \omega_N^{-nl}. \quad (5.5)$$

Exercice 3 Montrer que la transformation ainsi définie est "séparable", c'est-à-dire que le passage des $u_{k,l}$ aux $\tilde{u}_{m,n}$ s'effectue par deux TFDs à une dimension successives.

De même qu'en dimension 1, nous avons la propriété d'interpolation suivante :

Proposition 5.5 Soient les coefficients $\tilde{u}_{m,n}$ définis, pour $m, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$, par (5.5). Considérons le polynôme trigonométrique

$$P(x, y) = \sum_{m,n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_{m,n} \exp\left(\frac{2i\pi mx}{a}\right) \exp\left(\frac{2i\pi ny}{a}\right).$$

Les coefficients $\tilde{u}_{m,n}$ sont les seuls nombres complexes tels que, pour tout $k, l \in \{0, \dots, N-1\}$, on ait $P\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right) = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$. Par conséquent, la transformée discrète inverse de $u_{k,l} \rightarrow \tilde{u}_{m,n}$ est donnée par le calcul du polynôme aux

échantillons $(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N})$, $0 \leq k, l \leq N-1$:

$$u(k, l) = P\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right) = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_{m,n} \omega_N^{km+ln}.$$

Exercice 4 Montrer la proposition précédente. Le calcul est exactement le même qu'en dimension 1. De même qu'en dimension 1, nous pouvons identifier un certain nombre de symétries des $\tilde{u}_{m,n}$ si l'image est à valeurs réelles. On suppose à nouveau que N est pair. Montrer également la proposition suivante.

Proposition 5.6 *Supposons que les échantillons $u_{k,l}$ soient réels. Alors les coefficients $\tilde{u}_{0,0}$, $\tilde{u}_{0,-\frac{N}{2}}$, $\tilde{u}_{-\frac{N}{2},0}$, et $\tilde{u}_{-\frac{N}{2},-\frac{N}{2}}$ sont réels; de plus*

$$\forall m, n \in \left\{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\} \quad \tilde{u}_{m,n} = \overline{\tilde{u}_{-m,-n}}$$

Exercice 5 A nouveau, comme en dimension 1, les coefficients $(\tilde{u}_{m,n})$ correspondent aux fréquences de l'image u , ordonnées des négatives aux positives. Plus précisément, si $u \in L^1$ et que l'on définit les coefficients de la série de Fourier de u par

$$c_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0, 2\pi]^2} u(x, y) \exp\left(\frac{-2i\pi mx}{a}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi ny}{a}\right),$$

alors, pour $m, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ les $\tilde{u}_{m,n}$ sont des approximations des $c_{m,n}$ par la méthode des trapèzes.

La figure 5.3 présente une image et le logarithme du module de sa transformée de Fourier discrète (le logarithme est utilisé car le module des TFD des images usuelles décroît très vite lorsque l'on s'éloigne des basses fréquences).

5.1.3 Le phénomène du repliement de spectre ou aliasage

Le but de ce paragraphe est de calculer les perturbations auxquelles est exposée la transformée de Fourier discrète d'un signal lorsque celui-ci est sous-échantillonné. On vient de voir que la transformée de Fourier discrète calculait exactement les coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique de degré $\frac{N}{2}$, $P(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{a}\right)$, dont on connaissait N échantillons $u\left(\frac{ka}{N}\right)$, $N = 0, \dots, N-1$. Dans cette section, on considère une fonction $u \in L^2(0, a)$ et sa série de Fourier

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{\frac{2in\pi x}{a}}.$$

Dans toute la suite, on supposera que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(u)| < +\infty$, ce qui implique que u est continue et a -périodique. Cette hypothèse n'est pas irréaliste. En effet, étant donné un signal v régulier (C^2 par exemple) sur $[0, a/2]$, on peut le rendre pair en posant $u(-x) = \tilde{v}(x)$ pour $x \in [-a/2, 0]$, $u(x) = v(x)$ sur $[0, a]$. On voit que la a -périodisée de cette extension u reste Lipschitz et C^2 par morceaux et on peut en déduire (exercice!) que la série des coefficients de Fourier de u est convergente. On suppose également, ce qui est réaliste, qu'un signal u n'est en fin de compte connu que par ses échantillons sur $[0, a]$, $u(0), \dots, u\left(\frac{N-1}{N}a\right)$.



FIGURE 5.3 – Gauche : une image numérique de taille 256×256 ; droite : application d'un changement de contraste logarithmique $s \rightarrow C + D \log s$ au module de sa TFD. (Les constantes C et D sont choisies pour que l'image résultante ait ses valeurs entre 0 et 255). Le spectre décroît rapidement aux hautes fréquences (rappelons que l'image étant bornée, son spectre est dans L^2). C'est la grande vitesse de décroissance du spectre qui rend nécessaire l'utilisation du logarithme pour la visualisation. La symétrie centrale du module de la TFD est visible. Les lignes blanches horizontale et verticale correspondent aux bords verticaux et horizontaux de l'image, respectivement. En effet, l'image étant implicitement périodisée elle présente un contraste brusque entre bord haut et bord bas d'une part, coté droit et coté gauche d'autre part. Remarquer également les lignes obliques qui correspondent aux bords obliques de l'image (voir en particulier les dalles sur le sol).

Théorème 5.1 Soit u définie sur $[0, a]$, vérifiant $\sum_n |c_n(u)| < +\infty$. Alors la transformée de Fourier discrète de u est la N -périodisée de la suite des coefficients de Fourier de u :

$$\tilde{u}_n = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{n+qN}(u), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (5.6)$$

Démonstration On rappelle la notation $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ et $(\omega_N)^N = 1$. Comme

$$u(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(u) e^{\frac{2im\pi x}{a}},$$

on a

$$u\left(\frac{ka}{N}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(u) \omega_N^{mk}.$$

On pose pour $m \in \mathbb{Z}$, $m = qN + n$, $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$. En regroupant les termes de la série de Fourier on obtient

$$u\left(\frac{ka}{N}\right) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left(\sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{n+qN}(u) \right) \omega_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Mais on a aussi (formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète) :

$$u\left(\frac{ka}{N}\right) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Ces deux dernières formules définissent toutes deux la transformée de Fourier discrète et par identification on obtient la formule de "repliement de spectre" (5.6). ◦

On a le résultat analogue en deux dimensions :

Théorème 5.2 Soit u définie sur $[0, a]^2$, vérifiant $\sum_n |c_{m,n}(u)| < +\infty$. Alors la transformée de Fourier discrète de u est la (N, N) -périodisée de la suite des coefficients de Fourier de u :

$$\tilde{u}_{m,n} = \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} c_{m+pN,n+qN}(u), \quad m, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (5.7)$$

Exercice 6 Montrer le théorème 5.2.

Ce théorème va nous permettre d'interpréter les effets de moiré visibles dans beaucoup d'images digitales ou de films digitalisés (DVD). Ces effets de moiré sont dus à un "repliement de spectre", ou "aliasage". Le repliement de spectre provient d'un sous-échantillonnage abusif. Le terme aliasage se réfère à la présence des coefficients parasites $c_{m+pN,n+qN}$, pour $(p, q) \neq (0, 0)$ dans le calcul du coefficient de la fréquence (m, n) , $\tilde{u}_{m,n}$. Quand la transformée de Fourier discrète fait correctement son travail, qui est de retrouver le coefficient $c_{m,n}$ de la fréquence (m, n) de u , on doit avoir $\tilde{u}_{m,n} = c_{m,n}$. Les coefficients $c_{m+pN,n+qN}$ qui s'y ajoutent dans (5.7) sont des répliques, ou "alias" de coefficients correspondant aux fréquences plus grandes $(m + pN, n + qN)$,

$(p, q) \neq (0, 0)$. D'où le terme d'aliasage. Dans une expérience sur ordinateur, les signaux et images sont toujours déjà échantillonnés. Voyons donc maintenant comment interpréter l'expérience pratique suivante : un signal est donné par ses échantillons, et on le sous-échantillonne.

Définition 5.2 Soit un signal échantillonné (u_k) , $k = 0, \dots, N-1$, et soit p un entier divisant N . On définit l'opérateur "sous-échantillonnage d'ordre p " comme suit :

$$S_p : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N/p}$$

$$(u_k)_{k=0, \dots, N-1} \longrightarrow (v_k) = (u_{kp})_{k=0, \dots, N/p}.$$

Le signal (v_k) est dit sous-échantillonné d'un facteur p .

Nous commençons par le cas, technologiquement classique, où $p = 2$.

Corollaire 5.2 Soit $(v_k) = S_2((u_k))$ (on suppose que $\frac{N}{2}$ est pair). Alors (\tilde{v}_n) , la transformée de Fourier Discrète de (v_k) , s'écrit, pour $n = -\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1$,

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-\frac{N}{2}} + \tilde{u}_{n+\frac{N}{2}}, \quad (5.8)$$

le deuxième terme étant par ailleurs nul si $n < 0$ et le troisième étant nul si $n \geq 0$.

Démonstration Appliquons le théorème 5.1 à l'unique polynôme trigonométrique P à N coefficients qui a pour échantillons les u_k . Alors par définition de la transformée de Fourier discrète, $\tilde{u}_n = c_n(P)$. On a donc pour $\frac{N}{4} \leq n \leq \frac{N}{4} - 1$,

$$\tilde{v}_n = \sum_{q \in \mathbb{Z}} c_{n+q\frac{N}{2}}(P) = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-\frac{N}{2}} + \tilde{u}_{n+\frac{N}{2}}.$$

Remarquons que si $n \geq 0$ cela donne $\tilde{v}_n = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-\frac{N}{2}}$, l'autre coefficient étant nul. De même, si $n < 0$, on obtient $\tilde{v}_n = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+\frac{N}{2}}$. ◦

Cette proposition indique que le spectre du signal sous-échantillonné d'un facteur deux s'obtient en superposant à lui-même le spectre du signal original avec un décalage de $\frac{N}{2}$. On dit qu'il y a repliement de spectre. Ainsi, le spectre du signal sous-échantillonné contient généralement des informations non présentes dans le spectre du signal de départ, ce qui se traduit sur le signal sous-échantillonné par l'apparition de structures périodiques n'ayant pas de lien direct avec le contenu du signal. Ceci est particulièrement frappant dans le cas des signaux bi-dimensionnels, pour lesquels on a un résultat identique à celui de la proposition 5.2.

Corollaire 5.3 Soit $(v_{k,l}) = S_2((u_{k,l}))$ la sous-échantillonnée d'un facteur 2 d'une image discrète. (on suppose que $\frac{N}{2}$ est pair). Alors $(\tilde{v}_{m,n})$, la transformée de Fourier Discrète de $(v_{k,l})$, s'écrit, pour $m, n = -\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1$,

$$\tilde{v}_{m,n} = \tilde{u}_{m,n} + \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{0,1,-1\}} \tilde{u}_{m+\varepsilon_1\frac{N}{2}, n+\varepsilon_2\frac{N}{2}}. \quad (5.9)$$

Exercice 7 Montrer le corollaire 5.3. Parmi les neuf termes de la somme de droite de (5.9), il y a en général quatre termes non nuls : lesquels ? Faire un dessin.

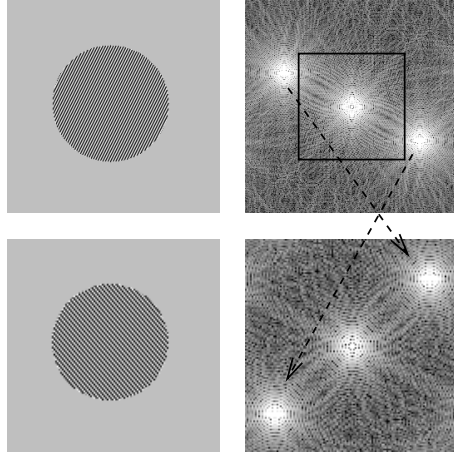


FIGURE 5.4 – Exemple de repliement avec une image synthétique. En haut à gauche : image originale, à droite son spectre. En bas à gauche : l'image sous-échantillonnée d'un facteur deux dans chaque direction, à droite le spectre correspondant. Le spectre de l'image sous-échantillonnée est obtenu en périodisant le spectre de l'image originale avec pour période le carré visible en surimpression.

Pour illustrer ce résultat, nous montrons deux exemples d'images sous-échantillonnées aux figures 5.1.3 (image synthétique) et 5.1.3, exemple où l'apparition de structures périodiques est due à la superposition, lors du sous-échantillonnage, des hautes fréquences de l'image. La manipulation numérique à faire pour créer des effets de moiré dans une image est aussi simple que son interprétation est subtile : il suffit de prendre "un point sur deux" de l'image. L'interprétation de l'opération se fait en Fourier : on a créé de basses fréquences parasites en c_n qui correspondent au "repliement" de hautes fréquences $c_{n+\frac{N}{2}}$. D'où l'apparition de sinusoides qui n'ont rien à voir avec le signal original et qui créent des effets de moiré.

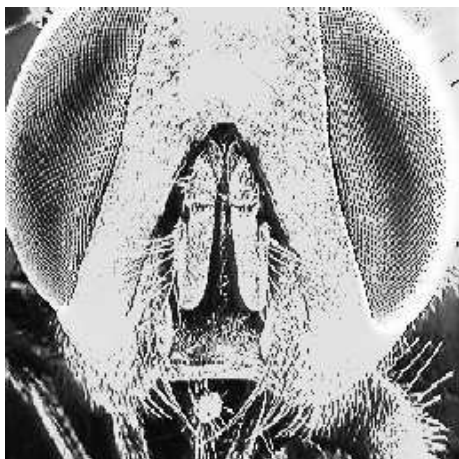
Le résultat de la proposition 5.2 se généralise dans le cas d'un sous-échantillonnage d'ordre plus élevé, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5.7 Soit $(v_k) = S_p((u_k))$ (on suppose que $N = pM$, pour un certain entier M). Alors (\tilde{v}_k) , la transformée de Fourier discrète de (v_k) , s'écrit, pour $k = 1 \dots M - 1$,

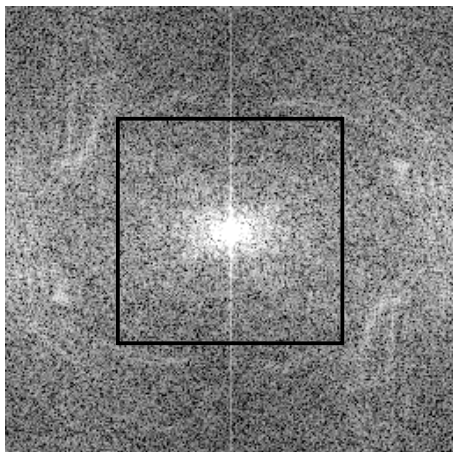
$$\tilde{v}_k = \sum_{a=-p+1}^{p-1} \tilde{u}_{k+\frac{aN}{p}}. \quad (5.10)$$

Démonstration Appliquer de nouveau le théorème 5.1 à l'unique polynôme trigonométrique à N coefficients qui a pour échantillons les u_k . Ce polynôme vérifie $c_n(P) = \tilde{u}_n$. \circ

On peut comparer les propositions 5.2 et 5.7 et le corollaire 5.3 aux théorèmes 5.1 et 5.2. Ces théorèmes nous donnent les conditions générales de Shannon et Whittaker pour qu'un signal ou une image soient correctement échantillonnés : ces conditions sont que le spectre soit borné (nombre fini N ou N^2 de coefficients de Fourier) et que l'on dispose d'au moins N (ou N^2) échantillons. Les



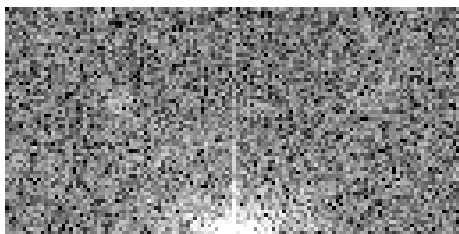
(a) Image originale



(b) Sa TFD, non nulle en dehors du carré visible en surimpression

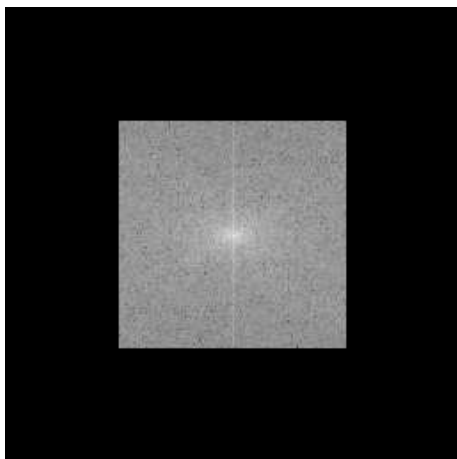


(c) Image sous-échantillonnée d'un facteur 2

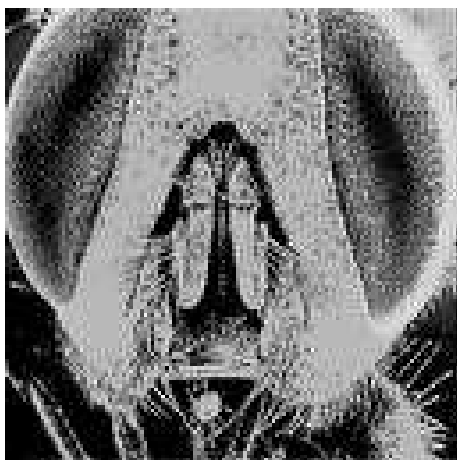




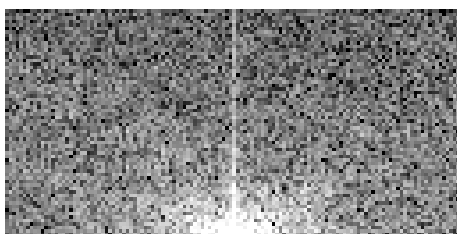
(a) Image obtenue par TFD inverse de b



(b) Image obtenue en mettant à zéro les hautes fréquences de 5.1.3-a



(c) Sous-échantillonnage : le repliement a disparu



propositions 5.2 et 5.7 sont plus pratiques : elles ne donnent aucune hypothèse sur le signal ou l'image qui ont été échantillonnés et ont l'avantage de s'appliquer donc à un signal ou une image discrets, quelconques, qu'ils soient ou non issus d'un bon échantillonnage.

5.1.4 La transformée de Fourier rapide

Comme nous l'avons vu plus haut, le calcul des coefficients de Fourier \tilde{u}_n revient à l'évaluation d'un certain polynôme aux racines N -ièmes de l'unité. Dans le cas général, l'évaluation classique (ex. méthode de Hörner) d'un polynôme de degré $N-1$ en un point prend $\mathcal{O}(N)$ opérations. Donc si l'on répète cela pour les N racines de l'unité on devra effectuer $\mathcal{O}(N^2)$ opérations. L'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide (TFR) permet de résoudre le problème en $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations. Appelons "calcul d'ordre N " l'évaluation d'un polynôme de degré $N-1$ aux racines N -ièmes de l'unité. Et soit $T(N)$ le nombre d'opérations (additions et multiplications) demandées par ce calcul.

On se place dans le cas $N = 2^n$ et soit un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k.$$

On pose

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k} X^k,$$

$$R(X) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k+1} X^k.$$

Alors

$$P(\omega_N^k) = Q\left((\omega_N^k)^2\right) + \omega_N^k R\left((\omega_N^k)^2\right). \quad (5.11)$$

Or, si N est pair les $(\omega_N^k)^2$ sont exactement les racines d'ordre $\frac{N}{2}$ de l'unité. Il suffit donc d'évaluer les deux polynômes Q et R aux racines d'ordre $\frac{N}{2}$ de l'unité ce qui est un problème d'ordre $\frac{N}{2}$. On a donc, en tenant compte des additions et multiplications demandées par (5.11),

$$T(N) = 2T\left(\frac{N}{2}\right) + 2N.$$

On en tire aisément $T(N) = \mathcal{O}(N \log(N))$. ◦

Exercice 8 Démontrer la relation $T(N) = \mathcal{O}(N \log(N))$.

Remarque 5.1 Les programmes usuels de calcul numérique ne calculent pas les coefficients \tilde{u}_n , mais les coefficients \hat{u}_n , définis par la formule suivante, pour $n = 0, \dots, N-1$:

$$\hat{u}_n = \begin{cases} \tilde{u}_n & \text{si } n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ \tilde{u}_{n-N} & \text{si } n = \frac{N}{2}, \dots, N \end{cases}$$

5.1.5 L'utilisation de la transformée de Fourier discrète pour définir zoom, translations et rotations des images

Le zoom Nous présentons une méthode d'interpolation reposant sur une extension de la TFD d'un signal ou d'une image. Nous détaillons la méthode, dite du "prolongement par des zéros ("zéro-padding"), en une dimension, le principe se généralisant sans mal pour une image. Comme précédemment, considérons des échantillons u_k , k variant de 0 à $N-1$, et $\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega_N^{-kn}$. On suppose que N est pair et que l'on veut zoomer d'un facteur 2, c'est à dire que l'on veut construire un signal de taille deux fois plus grande (avec deux fois plus d'échantillons) que le signal de départ. On définit un nouveau signal v , de taille $2N$ comme étant la TFD inverse de \tilde{v} , donné par

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n \text{ si } -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \quad \tilde{v}_n = 0 \text{ si } n \in [-N, -\frac{N}{2} - 1] \cup [\frac{N}{2}, N - 1]. \quad (5.12)$$

Proposition 5.8 *Le signal v dont la TFD est donnée par la formule (5.12) vérifie $v_{2k} = u_k$, pour $k = 0, \dots, N-1$.*

Démonstration On a

$$v_{2k} = \sum_{-N}^{N-1} \tilde{v}_n \omega_{2N}^{2nk} = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{nk} = u_k.$$

En effet, $\omega_{2N}^{2nk} = \omega_N^{nk}$. ◦

Remarque 5.2 *Ce résultat est évident sans démonstration : en effet, on peut considérer l'unique polynôme trigonométrique de degré $\frac{N}{2}$ passant par les échantillons u_k . Les échantillons v_k s'interprètent immédiatement comme des échantillons de ce même polynôme.*

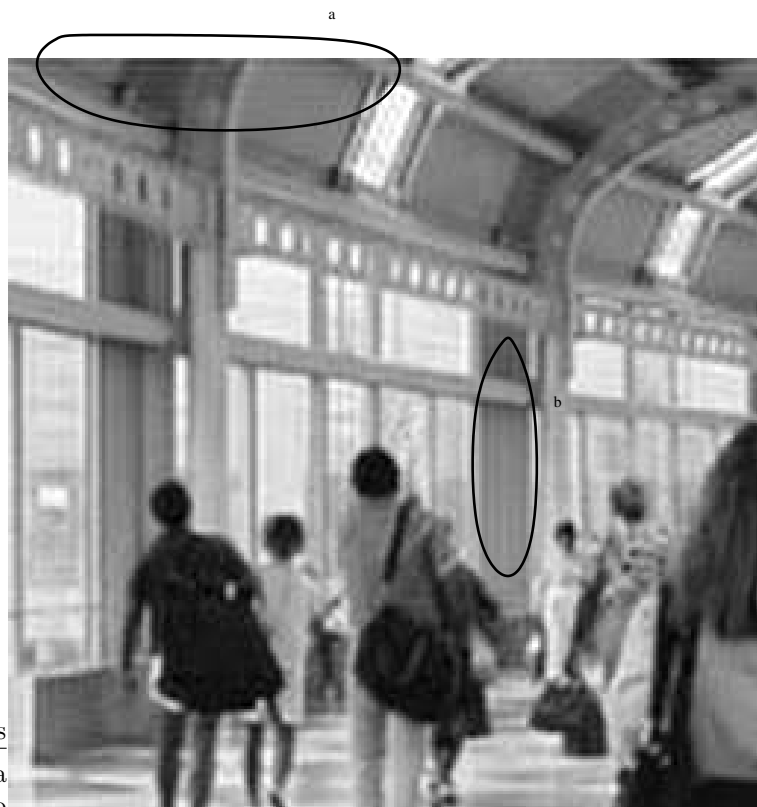
Remarque 5.3 *On remarquera que les nouveaux échantillons obtenus par cette méthode peuvent être complexes, même lorsque le signal original est réel (ceci étant dû au terme d'aliasage $u_{-\frac{N}{2}}$). Aussi, on ne retient que la partie réelle à des effets de visualisation.*

La méthode se généralise aux cas des images. Nous considérons une image numérique $(u_{k,l})$, et nous définissons une image zoomée $(v_{i,j})_{i,j=0, \dots, 2N-1}$ comme étant la transformée de Fourier discrète inverse de $\tilde{v}_{i,j}$ définie pour $i, j = -N, \dots, N-1$ par

$$\tilde{v}_{m,n} = \tilde{u}_{m,n} \text{ si } -\frac{N}{2} \leq m, n \leq \frac{N}{2} - 1, \quad \tilde{v}_{m,n} = 0 \text{ sinon.} \quad (5.13)$$

Exercice 9 Ecrire l'équivalent de la proposition 5.8 et la montrer en dimension 2.

La figure 5.7 montre la partie réelle d'une partie de l'image 5.3 zoomée par zéro-padding, et la compare celle obtenue par réplique des pixels (chaque pixel est remplacé par quatre pixels de la même valeur). On remarque que le zoom par TFD produit une image bien plus régulière, et évite l'effet "marche d'escalier"



PSfrag replacements

a
b



PSfrag replacements

a
b

FIGURE 5.7 – Zoom sur une partie de l’image 5.3. Haut : zoom par TFD (zéro-padding), bas : zoom par réplication des pixels. Le zoom par TFD est obtenu en prolongeant par des zéros le spectre de l’image initiale. Celui par réplication des pixels en remplaçant chaque pixel par quatre pixels de la même valeur. Remarquons tout d’abord la plus grande régularité du zoom par TFD, qui supprime les effets de “blocs” très visibles sur le zoom par réplication. En contrepartie, le phénomène de Gibbs (voir paragraphe 3.4) est très visible sur le zoom par TFD, puisque l’on a mis à zéro brutalement des coefficients de la TFD. Ce phénomène est particulièrement visible le long des frontières de l’image, qui correspondent à des discontinuités puisque l’image est périodisée (par exemple zone a). On observe aussi le phénomène de Gibbs le long des contours des objets (par exemple zone b).

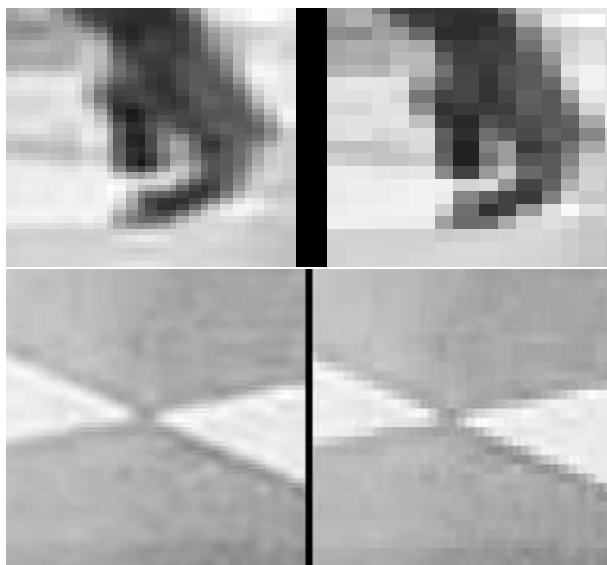


FIGURE 5.8 – détails après zoom, à gauche par TFD, à droite par réplique des pixels.

visible sur l'image zoomée par réplique. La figure 5.8 illustre ce point sur un détail. Une autre remarque concerne l'effet de Gibbs (cf. paragraphe 3.4). Ce phénomène produit des rebonds le long de la frontière du domaine de l'image. En effet, et comme nous l'avons déjà mentionné, le calcul des coefficients de Fourier de l'image (dont les coefficients de la TFD sont une approximation) suppose l'image périodique, ce qui fait apparaître des discontinuités le long des frontières de son domaine de définition. Le phénomène de Gibbs est également visible le long des discontinuités dans l'image, les contours. Le phénomène est mis en évidence sur la figure 5.7. Expliquons pourquoi le phénomène apparaît dans le cas du zoom : une nouvelle image $v_{k,l}$ de taille $2N \times 2N$ est obtenue en utilisant les valeurs prises par le polynôme $P(x)$ entre les points dont on dispose au départ. Cette utilisation de P fait apparaître des oscillations du polynôme trigonométrique qui étaient invisibles sur les échantillons de départ $(u_{k,l})$. Comme nous l'avons déjà évoqué, les oscillations aux frontières du domaine de l'image peuvent être supprimées par utilisation de la transformée en cosinus. En revanche, le problème subsistera le long des discontinuités présentes à l'intérieur de l'image, à moins de faire un "filtre anti-aliasage". Ce filtre consiste à atténuer les fréquences près du bord, pour que leur transition à zéro soit moins brutale.

La translation La méthode présentée au paragraphe précédent permet de définir une translation d'une quantité $1/2$ (ou $a/(2N)$) pour revenir à notre définition première du signal u , en ne gardant que les points d'indice impair du signal zoomé v . Plus généralement, nous pouvons définir une translation d'un signal d'une quantité $0 < \alpha < 1$. Comme d'habitude, l'opération de translation sur la fonction u dont nous connaissons les échantillons u_k se fait sous l'hypothèse que celle-ci est un polynôme trigonométrique. En d'autres termes, on translate le polynôme d'interpolation, la "vraie" fonction u étant inconnue

en dehors des échantillons. Le polynôme d'interpolation est

$$P(x) = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n e^{\frac{2i\pi n x}{a}}.$$

En translatant de α , on obtient

$$\tau_\alpha P(x) = P(x - \alpha) = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n e^{-\frac{2i\pi n \alpha}{a}} e^{\frac{2i\pi n x}{a}}.$$

On a donc :

Proposition 5.9 *La TFD (\tilde{v}_n) de $P(x - \alpha)$ s'obtient à partir de la TFD de $P(x)$, \tilde{u}_n , par*

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n e^{-\frac{2i\pi n \alpha}{a}}.$$

Cette méthode de translation se généralise sans mal au cas des images, en remarquant qu'une translation à deux dimensions peut se décomposer en deux translations, une selon les lignes et une selon les colonnes.

Exercice 10 Donner les formules de la translation par TFD en dimension 2.

La rotation Décrivons maintenant une méthode pour implémenter une rotation discrète, due à L. Yaroslavsky. En bref, cette méthode réduit une rotation à des translations en ligne ou en colonne de l'image. Commençons par remarquer que

$$R(-\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tan(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := T(\theta)S(\theta)T(\theta) \quad (5.14)$$

(sauf si $\theta = \pi$ auquel cas il suffit de retourner l'image).

Une rotation d'angle θ de l'image discrète $u(i, j)$ consiste à calculer $u(R(-\theta)(i, j))$ que l'on notera $(R(-\theta)u)(i, j)$. Mais on a $R(-\theta)u = T(\theta)S(\theta)T(\theta)u$. Donc il suffit d'expliquer comment calculer $T(\theta)u$ et $S(\theta)u$. Or ces deux opérations ont la même structure, à savoir une translation ligne par ligne ou une translation colonne par colonne. Traitons par exemple le cas de $T(\theta)$. On a $(T(\theta)u)(i, j) = u(i + j \tan(\frac{\theta}{2}), j)$. Donc partant de la matrice $u_{i,j}$, on translate sa première ligne de $\tan(\frac{\theta}{2})$, la deuxième de $2 \tan(\frac{\theta}{2})$, etc. Appliquer $S(\theta)$ revient à faire une opération similaire sur les colonnes. Enfin on réapplique $T(\theta)$ et on fait donc à nouveau une translation sur les lignes. Or comme on vient de le voir ces translations ligne à ligne ou colonne à colonne se font en temps $N \log N$ en utilisant la TFD à une dimension.

La figure 5.9 montre une image après une rotation de $\pi/4$ par la méthode décrite ci-dessus. Puis, pour illustrer la stabilité de la méthode, nous montrons figure 5.10 le résultat de l'application successive de douze rotations de $\pi/4$, et, à titre de comparaison, le résultat de ces douze rotations successives implémentés par interpolation bilinéaire (les valeurs aux nouveaux points sont des combinaisons linéaires des quatre points à coordonnées entières les plus proches). Cette figure illustre clairement la supériorité de la méthode par FFT dans le cas de rotations multiples.

Remarque 5.4 *Du fait que l'on manipule des fonctions périodiques, une translation conduirait à faire sortir une partie de l'image par un bord pour la faire*



FIGURE 5.9 – Rotation de $\pi/4$ par TFD. La rotation est implémentée en remarquant qu'elle peut se décomposer en trois transformations consistant en des translations selon les lignes ou les colonnes de l'image (formule 5.14). Chacune de ces transformations est ensuite effectuée grâce à une TFD sur la ligne ou colonne considérée, en utilisant la méthode présentée au paragraphe précédent.

entrer par l'autre. Ce qui conduirait à l'apparition, sur les bords de l'image d'un certain nombre de détails qui sont en fait mal placés. On se débarrasse facilement de ce problème en insérant l'image dans un cadre deux fois plus grand...

Remarque 5.5 La méthode de rotation n'est pas parfaite. En effet, l'image u continue associée à $u(i, j)$ est dans l'interpolation supposée implicitement N -périodique, ce qui revient à dire qu'elle est de la forme (pour une image carrée)

$$u(x, y) = \sum_{k, l=0}^{N-1} c_{i, j} e^{2i \frac{\pi}{N} (kx + ly)}.$$

Mais, si on lui applique une "translation" suivant l'axe des x de valeur λy , la formule devient

$$u_1(x, y) = \sum_{k, l=0}^{N-1} c_{i, j} e^{2i \frac{\pi}{N} (kx + (l - \lambda k)y)}.$$

La fonction u_1 n'est pas (pour $\lambda \notin \mathbb{Z}$) N -périodique en y . Or, après la première translation on ne dispose plus que des échantillons du signal u_1 sur une grille carrée $N \times N$. D'après la théorie de Shannon un tel ensemble de données ne permet pas de capturer toute l'information sur u_1 (à la seconde étape on effectue des translations suivant y qui est justement l'axe qui pose problème). On rencontre encore ce problème à la troisième translation. Le seul moyen d'avoir une rotation exacte serait d'évaluer u aux points de l'image de $[0, N-1] \times [0, N-1]$ par une rotation d'angle $-\theta$, mais cette méthode est en N^4 ce qui la rend inopérante...



FIGURE 5.10 – Bas : après douze rotations successives de $\pi/4$ par TFD ; haut : même expérience en utilisant une interpolation bilinéaire (la valeur en un nouveau point (x, y) est obtenue par combinaisons linéaires des valeurs aux quatre points à coordonnées entières de l'image originale les plus proches de (x, y)).

5.1.6 Importances relatives de la phase et du module de la TFD pour une image

Nous nous intéressons à la pertinence visuelle des caractéristiques de la transformée de Fourier discrète dans le cas des images, et plus particulièrement à la phase et au module de la TFD, au moyen de deux exemples. Tout d'abord nous montrons, figure 5.11, deux images A et B, ainsi que les images obtenues en échangeant les phases de leurs TFD. Nous remarquons grâce à cette expérience qu'une part très importante de l'information géométrique d'une image est contenue dans la phase de sa TFD. Rappelons que si l'on translate une fonction, les coefficients de sa série de Fourier sont multipliés par des exponentielles complexes de module 1, et que par conséquent la phase de la TFD contient en en sens des informations sur le placement des constituants de l'image.

Dans la figure 5.12, nous montrons deux images de textures, qui visuellement semblent invariantes par translation, ainsi que les deux images obtenues à partir de ces textures en ne conservant que le module de leur TFD, et en tirant au hasard les phases (selon une loi uniforme). On voit cette fois que le module de la TFD contient l'information. Cette propriété est caractéristique des textures homogènes du type présenté figure 5.12, et l'on peut même donner une définition des "microtextures" comme images caractérisées uniquement par le module de leur transformée de Fourier.

5.2 Lien avec la théorie de Shannon

Théorème 5.3 (de Shannon pour les polynômes trigonométriques) *Soit un signal trigonométrique*

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi\lambda_n t}.$$

On a encore la formule de Shannon

$$\forall a \in \left]0, \frac{1}{2\lambda_c}\right[, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)},$$

avec $\lambda_c = \max\{|\lambda_n|\}$. La convergence est ponctuelle.

Remarque 5.6 *Ce théorème complète le théorème de Shannon pour un signal qui est ni périodique ni dans L^2 .*

Démonstration

il suffit de démontrer le résultat dans le cas d'une seule onde. Soit donc

$$f(t) = e^{2i\pi\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit g périodique de période $\frac{1}{a}$ et égale à f sur $(-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$. les coefficients de Fourier de f sont

$$c_n = \frac{a \sin \frac{\pi}{a}(\lambda - na)}{\pi(\lambda - na)}.$$

Donc

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{a}(\lambda - na)}{\frac{\pi}{a}(\lambda - na)} e^{2i\pi n a t}.$$



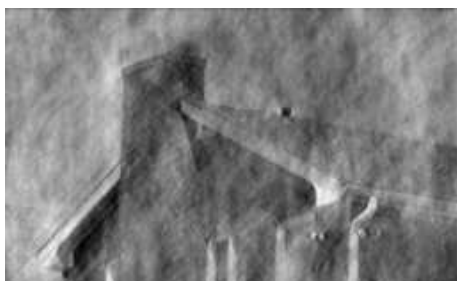
(a) Image A



(b) Image A



(c) Module de la TF de A et phase de B



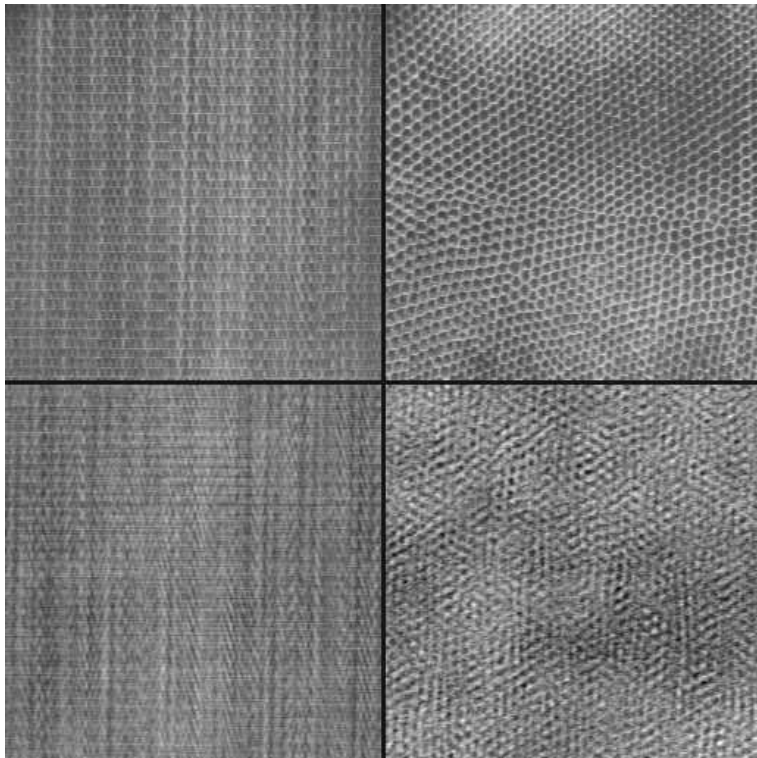


FIGURE 5.12 – Haut : deux images de textures ; bas : les deux images après remplacement des phases de leurs TFD par des phases aléatoires. Une information essentielle sur la texture est donc présente dans le module des coefficients de Fourier de l'image. Pour la texture de gauche, il semble que la plupart de l'information soit contenue dans le module de la TFD. A droite, quelques aspects de la texture sont perdus. Nous renvoyons le lecteur intéressé à un article (en anglais) sur une méthode de synthèse de texture par modification de la phase : [Van Wijk]

Comme f est C^1 sur $]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$, Cette égalité est ponctuelle pour $t \in]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$ (principe de localisation). D'où

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad e^{2i\pi\lambda t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi n a t} \frac{\sin \frac{\pi}{a}(\lambda - na)}{\frac{\pi}{a}(\lambda - na)}, \quad |t| < \frac{1}{2a}.$$

En intervertissant λ et t , on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{2i\pi\lambda t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi n a \lambda} \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)}, \quad |\lambda| < \frac{1}{2a}.$$

Chapitre 6

Séries de Fourier et espaces de Sobolev

6.1 Distributions sur \mathbb{R} .

Un exemple clé, l'intégration par parties.

Prenons une fonction u qui est C^k sur \mathbb{R} et une autre fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ que l'on s'habitue à appeler "fonction test". On peut intégrer par parties

$$\int u^{(k)}(x)\varphi(x)dx = (-1)^k \int u(x)\varphi^{(k)}(x)dx.$$

Si $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, le membre de droite garde un sens. On peut donc considérer l'application linéaire

$$\varphi \rightarrow (-1)^k \int u(x)\varphi^{(k)}(x)dx = l_k(\varphi)$$

comme une généralisation de la dérivée k -ième de u . Cette dérivée n'est donc plus une fonction, c'est une forme linéaire ayant la notable propriété de continuité

$$|l(\varphi)| \leq C \max |\varphi^{(k)}(x)|,$$

où C dépend de u et du support de φ . Dans toute la suite, I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} , borné ou pas. On note $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions réelles \mathcal{C}^∞ à support compact dans I , encore appelées fonctions test.

Définition 6.1 On appelle distribution dans I toute forme linéaire u sur $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ ayant la propriété de continuité suivante : Pour tout intervalle compact $J \subset I$ il existe un entier p et une constante C tels que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ à support inclus dans J , on ait

$$| \langle u, \varphi \rangle | \leq C \max_{i \leq p} \max_{x \in J} |\varphi^{(i)}(x)|. \quad (6.1)$$

Cette relation exprime que la forme linéaire u agit continûment sur φ et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à p . Aussi, il ne faut pas se surprendre si beaucoup d'exemples de distributions sont des formules explicites où $u(\varphi)$ dépend de φ et de ses dérivées, mais toujours jusqu'à un ordre fini. Si $u \in L_{loc}^1(I)$ est une fonction intégrable sur tout borné de I , on voit immédiatement que l'on peut lui associer une distribution \tilde{u} dans I en posant, pour φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(I)$,

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \int_I u(x)\varphi(x)dx.$$

Exercice 1 Montrer en utilisant le corollaire ?? page ?? que si deux distributions \tilde{u} et \tilde{v} dans \mathbb{R} sont associées à des fonctions u et v appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et si elles sont deux distributions égales, alors $u = v$ p.p.

Grâce à ce résultat d'unicité, nous considérerons les fonctions $u \in L^1_{loc}$ comme des distributions et identifierons u et \tilde{u} .

Exercice 2 Montrer que $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ est une distribution dans \mathbb{R} , appelée masse de Dirac en x . Montrer qu'il en est de même pour le "peigne de Dirac" $u = \sum_n \delta_{2n\pi}$ et pour $\langle \delta_x^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(x)$.

Définition 6.2 Soient $(u_n)_n$ une suite de distributions sur I et u une distribution sur I . On dit que u_n converge vers u au sens des distributions si pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, la suite $\langle u_n, \varphi \rangle$ converge vers $\langle u, \varphi \rangle$.

On admettra le théorème suivant, qui est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus :

Théorème 6.1 si u_n est une suite de distributions dans I telle que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\langle u_n, \varphi \rangle$ converge vers une valeur que l'on note $\langle u, \varphi \rangle$, alors u est aussi une distribution dans I .

Voir l'exercice 8 à la fin de ce chapitre. On dit que u_n tend vers u dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si elle tend vers u dans $L^1(B)$ pour tout borélien borné de \mathbb{R}^N .

Exercice 3 Montrer que si $u_n \in L^1_{loc}$ converge vers u dans L^1_{loc} , alors aussi $u_n \rightarrow u$ au sens des distributions.

Définition 6.3 et proposition : "On a toujours le droit de dériver une distribution". Si u est une distribution dans I , alors on appelle dérivée k -ième de u la distribution dans I définie par $\langle u^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle u, \varphi^{(k)} \rangle$. Si u est \mathcal{C}^k dans I , alors sa dérivée classique notée $\{u\}^{(k)}$ coïncide avec sa dérivée au sens des distributions, $u^{(k)}$.

Démonstration Si u est \mathcal{C}^k dans I , elle-même et toutes ses dérivées jusqu'à la k -ième $\{u\}^{(k)}$ sont dans $L^1_{loc}(I)$, et donc sont des distributions. On a $\langle \{u\}^{(k)}, \varphi \rangle = \int_I \{u\}^{(k)}(x) \varphi(x) dx$ et en intégrant par parties k fois, on obtient

$$\langle \{u\}^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \int_I u(x) \varphi^{(k)}(x) dx = \langle u^{(k)}, \varphi \rangle .$$

◊

Théorème 6.2 "On a toujours le droit de dériver un passage à la limite" Si $u_n \rightarrow u$ au sens des distributions, alors $u'_n \rightarrow u'$ au sens des distributions.

La démonstration est évidente. L'énoncé qui précède est aussi là pour nous montrer que nous risquons des excès de fatigue à écrire trop souvent "au sens des distributions". L'usage est d'écrire à la place "dans \mathcal{D}' ", car les distributions apparaissent comme des éléments du dual de $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c^\infty$. La notation \mathcal{D} ne sera pas utilisée mais on utilisera \mathcal{D}' .

Exercice 4 On appelle ordre d'une distribution u sur un compact K le plus petit entier p tel que la relation (6.1) soit vraie (pour une constante arbitraire C).

- 1) Montrer que l'ordre de $u \in L^1_{loc}(I)$ est zéro sur tout compact.
- 2) On considère une mesure bornée μ , c'est-à-dire une forme linéaire continue sur $C_b(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues bornées muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que μ est une distribution et que son ordre est zéro.
- 3) Montrer que si l'ordre d'une distribution sur K est p , alors l'ordre de u' est inférieur ou égal à $p + 1$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.

Théorème 6.3 (formule des sauts) Soit f une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux sur I et $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite discrète de ses sauts. On désigne par $\{f\}'$ la dérivée ponctuelle de f et par $f(a_n^\pm)$ les limites à gauche et à droite de f en a_n . Alors la dérivée distributionnelle f' de f est donnée par

$$f' = \{f\}' + \sum_n (f(a_n^+) - f(a_n^-)) \delta_{a_n}.$$

Démonstration Prendre φ dans \mathcal{C}_c^∞ et intégrer par parties $\langle f', \varphi \rangle = - \int f \varphi'$. ◦

Que se passe-t-il quand la dérivée au sens des distributions d'une fonction est nulle ?

Lemme 6.1 Soit $f \in L^1(I)$ telle que $f' = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I), \int_I f(x) \varphi'(x) dx = 0. \quad (6.2)$$

Alors il existe une constante C telle que $f = C$ presque partout.

Démonstration Voir l'exercice 9 à la fin de ce chapitre. ◦

Proposition 6.1 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique et telle que $f \in L^2(0, 2\pi)$. On a le droit de dériver la série de Fourier de f autant de fois que l'on veut et on a donc

$$f^{(p)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (ik)^p c_k(f) e^{ikt}, \quad (6.3)$$

cette égalité étant valide comme égalité de deux distributions dans \mathbb{R} .

Remarque 6.1 L'égalité est aussi valide comme égalité de deux distributions dans $]0, 2\pi[$ ou en fait dans tout intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Démonstration On remarque d'abord que si I est un ouvert et u une fonction dans $L^2(I)$, dans L^1 , ou dans L^p_{loc} , alors elle est une distribution dans I , car toute fonction de $L^1_{loc}(I)$ est une distribution dans I . De plus, si une suite de fonctions u_n converge dans l'un des ces espaces, elle converge aussi au sens des distributions dans I . Si $f \in L^2(0, 2\pi)$ et est 2π -périodique, elle est une distribution qui est la somme (au sens L^2_{loc} et donc au sens des distributions dans \mathbb{R}) de la série $\sum_k c_k(f)e^{ikt}$. Soient $s_{n,m}(f) = \sum_{-m}^n c_k(f)e^{ikt}$ les sommes partielles de la série de Fourier. Comme $s_{n,m}(f)$ tend vers f au sens des distributions quand n et m tendent vers l'infini, $s_{n,m}(f)^{(p)}$ tend vers $f^{(p)}$ au sens des distributions par le théorème 6.2. Dérivant terme à terme $s_{n,m}(f)$ (définition 6.3), on obtient

$$f^{(p)} = \sum_k (ik)^p c_k(f)e^{ikt},$$

la convergence de la série se faisant au sens des distributions dans \mathbb{R} . ◦

Exercice 5 Montrer que si u est une distribution et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, alors fu définie par

$$\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle$$

est bien une distribution

Exercice 6 Dérivée de la masse de Dirac
Démontrer que $x\delta'_0 = -\delta_0$.

Solution On calcule

$$\begin{aligned} \langle x\delta'_0, \varphi \rangle &= \langle \delta'_0, x\varphi \rangle = - \langle \delta_0, (x\varphi)' \rangle = - \langle \delta_0, \varphi + x\varphi' \rangle = \\ &= -\varphi(0) = \langle -\delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

◦

Proposition 6.2 (*Peigne de Dirac et formule sommatoire de Poisson*). On pose

$$\langle \tilde{\delta}, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2n\pi).$$

On l'appelle la "2π-périodisée" de la masse de Dirac, ou "peigne de Dirac". Alors $2\pi\tilde{\delta}' - 1 = s'$ est la dérivée de la fonction "en dents de scie", 2π-périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $s(x) = \pi - x$ et on a

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{inx},$$

ce qui se traduit pour $\varphi \in C_c^\infty$ par la formule sommatoire de Poisson,

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \varphi(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \hat{\varphi}(p).$$

(On note $\hat{\varphi}(p) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ipx} dx$.)

Démonstration Par intégration par parties, pour $n \neq 0$, $c_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x)e^{inx} dx = \frac{1}{in}$. Donc le développement en série de Fourier de s est

$$s = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{in} e^{inx},$$

la convergence se faisant au sens L_{loc}^2 , donc aussi au sens L_{loc}^1 et donc aussi au sens des distributions. On dérive terme à terme cette dernière formule (au sens des distributions, formule (6.3)) et on obtient donc

$$s' = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{inx}.$$

La formule des sauts (théorème 6.3) nous donne $s' = -1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi \delta_{2\pi n}$, les sauts de s aux points $2\pi n$ étant de $+2\pi$ et s étant \mathcal{C}^1 aux autres points et de dérivée ponctuelle égale à -1 . On obtient donc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi \delta_{2\pi n} = 1 + \sum_{n \neq 0} e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx},$$

soit la formule annoncée,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx}.$$

La formule de Poisson s'obtient en appliquant cette dernière formule à une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ arbitraire. \circ

6.2 Espaces de Sobolev périodiques $H_{per}^m(0, 2\pi)$

Définition 6.4 On appelle espace de Sobolev périodique d'ordre $m \geq 1$ et on note $H_{per}^m(0, 2\pi)$ l'ensemble des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} , appartenant à $L^2(0, 2\pi)$ et telles que leurs dérivées au sens des distributions d'ordre $1, \dots, m$ appartiennent aussi à $L^2(0, 2\pi)$. On le munit de la norme

$$\|u\|_{H_{per}^m} = \left(\sum_{n \leq m} \|u^{(n)}\|_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

associée au produit hermitien

$$(u, v)_{H_{per}^m} = \sum_{n \leq m} \int_{[0, 2\pi]} u^{(n)}(x) \overline{v^{(n)}(x)} dx.$$

Les espaces $H_{per}^m(0, 2\pi)$ sont particulièrement faciles à étudier grâce au fait qu'ils sont caractérisés par le comportement de leur série de Fourier. Dans toute la suite de ce chapitre, on note $I =]0, 2\pi[$.

Proposition 6.3 Si $u \in H_{per}^m$, alors pour tout $n \leq m$, les coefficients de $u^{(n)}$ vérifient

$$c_k(u^{(n)}) = (ik)^n c_k(u).$$

Démonstration En effet, on a vu que si $u \in L^2(I)$, alors on peut écrire

$$u = \sum_k c_k(u) e^{ikt},$$

où les $c_k(u)$ sont les coefficients de Fourier de u , et cette égalité est valable dans $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ à condition de périodiser u . En conséquence,

$$u^{(n)} = \sum_k c_k(u) (ik)^n e^{ikt},$$

la convergence se faisant au sens des distributions dans \mathbb{R} . Comme on a supposé que $u^{(n)}$ est dans $L^2(I)$, $u^{(n)}$ admet un développement en série de Fourier dont les coefficients $(c_k(u^{(n)}))_k$ appartiennent à $L^2(\mathbb{Z})$. Par unicité du développement de Fourier pour une distribution (qui sera montrée plus tard : théorème ??), on a

$$c_k(u) (ik)^n = c_k(u^{(n)}).$$

◊

Proposition 6.4 *Les fonctions de H^m_{per} appartiennent à C^{m-1} . En particulier, les fonctions de $H^1_{per}(I)$ sont continues.*

Démonstration Prenons $n = 1$. Alors $c_k(u) = \frac{1}{ik} c_k(u')$ est le produit de deux séries appartenant à $l^2(\mathbb{Z})$. Donc $c_k(u) \in l^1$ et donc la série $\sum_k c_k e^{ikt}$ converge uniformément sur \mathbb{R} . La limite est donc continue et donc u est continue (ou, pour être exact, u est égale presque partout à une fonction continue et est donc continue). On peut alors raisonner par récurrence, en remarquant que si u est dans H^m_{per} , alors $u^{(m-1)}$ est dans H^1_{per} . ◊

Proposition 6.5 *Les espaces $H^m_{per}(0, 2\pi)$ sont des espaces de Hilbert et leur norme peut s'écrire*

$$\|u\|_{H^m_{per}}^2 = \sum_{n \leq m} \|u^{(n)}\|_{L^2}^2 = \sum_k |c_k(u)|^2 (1 + |k|^2 + \dots + |k|^{2m}).$$

Une norme hilbertienne équivalente est $\|u\|_{H^m_{per}}^2 = \sum_k |c_k(u)|^2 (1 + |k|^{2m})$.

Démonstration L'application $u \in H^m_{per} \rightarrow (c_k(u)(1 + |k|^2 + \dots + |k|^{2m})^{\frac{1}{2}})$ est une isométrie de $H^m_{per}(0, 2\pi)$ sur $l^2(\mathbb{Z})$ qui est un espace de Hilbert. H^m_{per} est donc aussi un espace de Hilbert. L'équivalence des normes est immédiate. ◊

Théorème 6.4 (première application) *On considère le problème de l'élastique chargé,*

$$-u'' = f, \quad u(0) = v(2\pi) = 0, \quad (6.4)$$

où $f \in L^2([0, 2\pi])$. Alors il existe une unique $u \in L^2([0, 2\pi])$ solution (au sens des distributions !) de (6.4). Cette solution appartient en fait à $H^2_{per}([-2\pi, 2\pi])$ (fonctions 4π périodiques).

Démonstration Pour avoir de manière naturelle les conditions aux limites $u(0) = u(2\pi) = 0$, il est convenable d'utiliser la base en sinus ($\sin(\frac{kt}{2})$), $k \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que cela revient à étendre u et f en des fonctions impaires sur $[-2\pi, 2\pi]$. Leur série de Fourier sur $[-2\pi, 2\pi]$ donne par un simple réarrangement une décomposition de u et f sur la base en sinus. On développe u et f dans cette base de Fourier et on identifie les coefficients de Fourier à droite et à gauche de l'équation, comme on le peut en vertu de l'unicité des coefficients de Fourier d'une distribution. (Cette unicité entraîne immédiatement l'unicité des coefficients sur la base en sinus, puisque les coefficients en sinus de u ne sont autres que les coefficients de Fourier classiques sur $[-2\pi, 2\pi]$ de u prolongée en une fonction impaire). On pose donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $c_k(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin \frac{kt}{2} dt$ et on a $u = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} c_k(u) \sin \frac{kt}{2}$ et une relation du même type pour f . L'équation (6.4) est alors équivalente à

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k^2 c_k(u) = c_k(f), \text{ soit}$$

$$c_k(u) = \frac{c_k(f)}{k^2}.$$

Donc $u = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{c_k(f)}{k^2} \sin \frac{k}{2} t$, qui appartient bien à H_{per}^2 . Remarquer que u n'est pas nécessairement \mathcal{C}^2 et que donc l'équation n'a pas de sens classique! Par contre, comme $u \in H_{per}^2$, u est \mathcal{C}^1 . Comme u est impaire, on a bien $u(0) = u(2\pi) = 0$. \circ

Exemple de fonction continue et juste en dehors de H_{per}^1 Afin de donner une idée concrète du type de fonction appartenant à l'espace H_{per}^1 , nous allons donner plusieurs exemples de fonctions dont le module des coefficients de Fourier décroît à une vitesse donnée, ce qui caractérise leur appartenance à ces espaces. Dans le cas de la dimension 1, nous montrons, figure 6.1, trois exemples de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dont les coefficients vérifient $|c_k(f)| = (|k| + 1)^{-\alpha}$, avec respectivement $\alpha = 1,01$, $\alpha = 1,5$, $\alpha = 2$. Remarquons qu'une fonction avec de tels coefficients est continue si $\alpha > 1$, car alors la série $\sum |c_k|$ converge, et qu'il y a donc convergence uniforme de la série de Fourier. D'autre part, la fonction est dans H_{per}^1 dès que $\alpha > \frac{3}{2}$, en vertu de la proposition 6.5, et n'y appartient pas dans le cas contraire. Dans le cas des fonctions de la figure 6.1, seule la dernière fonction est dans H_1 , la deuxième étant "juste en dehors" de cet espace. Numériquement, ces fonctions sont discrètes, c'est à dire que leurs valeurs ne sont connues qu'en un nombre fini de points, et sont obtenues par Transformée de Fourier Discrète inverse (voir le paragraphe 5.1). Un signal dont les termes décroissent en k^α est généré, puis ses termes sont multipliés par des phases (nombres complexes de module 1) aléatoires (uniformément tirées pour les expériences présentées) respectant les propriétés de symétrie des transformées de Fourier des signaux réels (voir le paragraphe 5.1). Les fonctions sont alors obtenues par transformée de Fourier inverse.

Pour illustrer l'appartenance aux espaces H_{per}^1 dans le cas de fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , nous généralisons les définitions et propriétés précédentes. Une fonction u de \mathbb{R}^2 est dite 2π -périodique si elle est 2π -périodique en chacune de ses variables.

Définition 6.5 On appelle espace de Sobolev périodique d'ordre 1 et on note $H_{per}^1(I^2)$ l'ensemble des fonctions u , 2π périodiques sur \mathbb{R}^2 , appartenant à $L^2(I^2)$ et telles que leurs dérivées (au sens des distributions) d'ordre 1,

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$$

appartiennent à $L^2(I^2)$. On note ces deux dérivées respectivement u_x et u_y . On munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{H_{per}^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|u_y\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

associée au produit hermitien

$$(u, v)_{H_{per}^1} = \int_{[0, 2\pi]^2} (u(x, y)\bar{v}(x, y) + u_x(x, y)\bar{v}_x(x, y) + u_y(x, y)\bar{v}_y(x, y)) dx dy.$$

On a alors l'équivalent de la proposition 6.5 (la preuve est identique à celle de la dimension 1) :

Proposition 6.6 Les espaces $H_{per}^m([0, 2\pi]^2)$ sont des espaces de Hilbert et leur norme peut s'écrire

$$\|u\|_{H_{per}^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|u_y\|_{L^2}^2 = \sum_{i,j} |c_{i,j}(u)|^2 (1 + i^2 + j^2).$$

En particulier, si une fonction u de $L^2(I^2)$ a les coefficients $c_{i,j}$ de sa série de Fourier tels que la série $\sum_{i,j} |c_{i,j}(u)|^2 (1 + i^2 + j^2)$ diverge, elle n'est pas dans H_{per}^1 . La figure 6.2 présente plusieurs exemples de fonctions u dont les coefficients de Fourier vérifient $|c_{i,j}| = \frac{1}{1+(i^2+j^2)^{\alpha/2}}$. Ces fonctions sont continues (leur série de Fourier converge uniformément) si $\alpha > 1$, et ces fonctions ne sont pas dans l'espace H_{per}^1 si $\alpha < 1.5$, d'après la proposition 6.6. Comme en dimension 1, ces images sont obtenues par Transformation de Fourier Discrète inverse, en imposant le module des coefficients de la transformée, et en tirant des phases aléatoires.

6.3 Exercices

Exercice 7

1) Les applications suivantes définissent-elles des distributions sur \mathbb{R} ?

$$\varphi \rightarrow \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(n), \quad \varphi \rightarrow \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(0).$$

2) Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, montrer que $T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi$ est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et qu'il n'existe pas $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $\delta_0 = T_f$.

Définition : Les distributions du type T_f sont appelées "fonctions".

Rappel :

Pour K compact de \mathbb{R} , on note $\mathcal{C}_{c,K}^\infty(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } \varphi \in K\}$ qui est naturellement muni de la topologie définie par la famille de semi-normes $p_j(\varphi) = \sup_{m \leq j} \sup_K |\varphi^m(x)|$. On rappelle qu'une partie U de $\mathcal{C}_{c,K}^\infty(\mathbb{R})$ est ouverte si ou bien $U = \emptyset$ ou bien $\forall \varphi \in U, \exists j, r$ tels que la boule $B_j(\varphi, r) = \{\psi \in \mathcal{C}_{c,K}^\infty(\mathbb{R}), p_j(\varphi - \psi) < r\} \subset U$. (on pourra vérifier que l'on définit bien ainsi une topologie.)

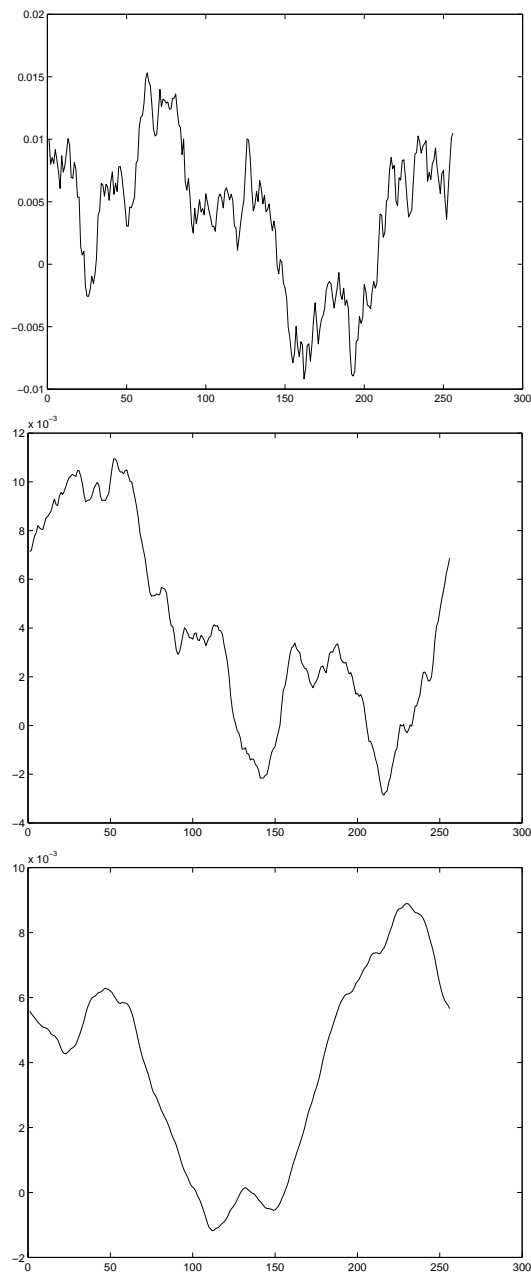


FIGURE 6.1 – Fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont les coefficients de Fourier vérifient $|c_k(f)| = (k + 1)^{-\alpha}$. Les arguments des $c_k(f)$ sont des variables aléatoires indépendamment et uniformément distribués sur $[0, 2\pi]$. Haut : $\alpha = 1$, la fonction est en dehors de H_{per}^1 , milieu : $\alpha = 1,5$, et la fonction est donc “juste” en dehors de l’espace H_{per}^1 , bas : $\alpha = 2$, la fonction est dans H_{per}^1 .

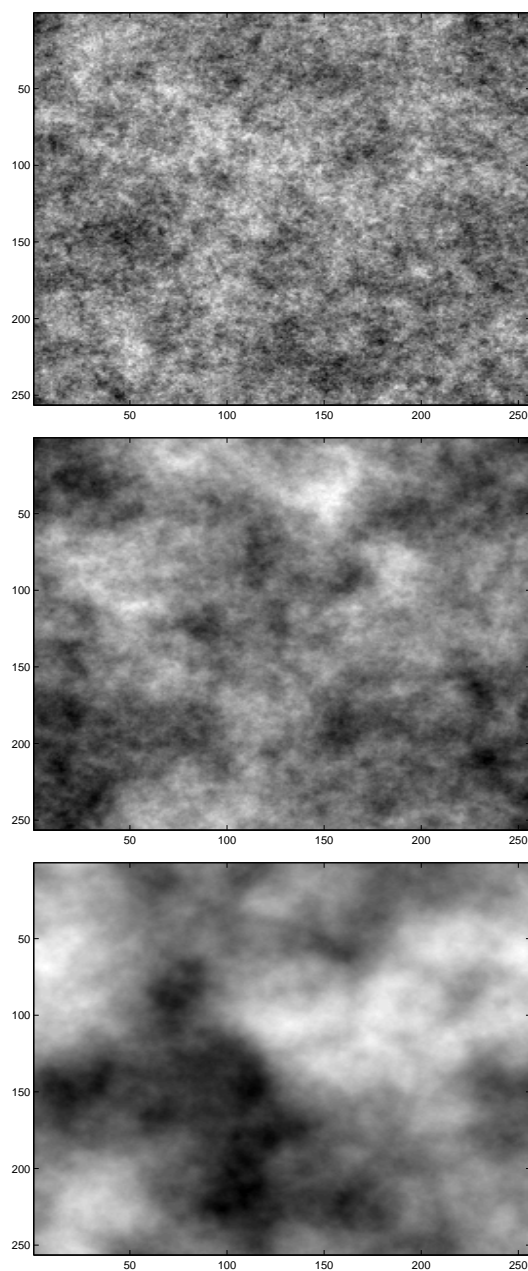


FIGURE 6.2 – fonctions continues dont les coefficients de Fourier vérifient $|c_{i,j}| = (1 + i^2 + j^2)^{-\alpha/2}$. Les arguments des $c_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendamment et uniformément distribuées sur $[0, 2\pi]$. Haut : $\alpha = 1$, la fonction est en dehors de H_{per}^1 , milieu : $\alpha = 1.5$, et la fonction est donc “juste” en dehors de l’espace H_{per}^1 , bas : $\alpha = 2$, la fonction est dans H_{per}^1 .

Exercice 8

Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ la suite $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge vers une limite que l'on note $\langle T, \varphi \rangle$, on veut montrer que la forme linéaire T est une distribution.

Avec les notations du rappel, on pose $E = \mathcal{C}_{c,K}^\infty(\mathbb{R})$ et

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \inf(1, p_n(f - g)).$$

1) Vérifier que d est une distance sur E . Montrer que sur E , la topologie de la distance d est équivalente à la topologie définie par la famille de semi-normes $(p_n)_n$.

2) Vérifier que (E, d) est complet. On pose $F_k = \{\varphi \in E : \forall n, |\langle T_n, \varphi \rangle| \leq k\}$. Montrer que $\exists k_0, i_0, \varphi, r$ tels que $B_{i_0}(\varphi, r) \subset F_{k_0}$. En déduire que T est continue sur E et donc que T est bien une distribution.

Remarque : On peut remplacer \mathbb{R} par un ouvert quelconque de \mathbb{R}^N .

Exercice 9

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\theta_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que $\int_I \theta_0 = 1$.

a) Vérifier que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, $\exists(\lambda, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_c^\infty(I)$ tel que $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$.

b) En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' = 0$ alors T est une fonction constante.

c) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' \in \mathcal{C}^\infty(I)$, montrer que $T \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exercice 10

Soit ψ solution de $\sum_{j=0}^k a_j \psi^{(j)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, où $a_j \in \mathbb{R}$ et $a_k \neq 0$,

satisfaisant

$$\psi(0) = \psi'(0) = \dots = \psi^{(k-2)}(0) = 0 \text{ et } \psi^{(k-1)}(0) = \frac{1}{a_k}.$$

1) Soit $Y =]\mathbb{R}^+, \infty[$, on pose $E = T_Y \psi$. Vérifier que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer

$$\sum_{j=0}^k a_j E^{(j)}.$$

2) Donner une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $E'' + E' + E = \delta_0$.

Chapitre 7

Espaces de Sobolev sur l'intervalle

Dans toute la suite, $I =]a, b[$ représente un intervalle ouvert de \mathbb{R} , borné ou non.

Définition 7.1 On appelle espace de Sobolev d'ordre $m \geq 1$ et d'exposant $+\infty \geq p \geq 1$ sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$ l'ensemble des fonctions de $L^p(I)$ telles que leurs dérivées au sens des distributions d'ordre $1, \dots, m$ appartiennent à $L^p(I)$. On note cet espace $W^{m,p}(I)$ et on le munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{n \leq m} \|u^{(n)}\|_{L^p}.$$

Si $p = 2$, on note $H^m = W^{m,2}$ et on prend pour norme

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{n \leq m} \|u^{(n)}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

associée au produit hermitien

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{n \leq m} \int_I u^{(n)}(x) \overline{v^{(n)}(x)} dx.$$

Exercice 1 1) Quand $p = 2$, on vient de définir deux normes différentes sur $W^{m,2} = H^m$. Montrer qu'elles sont équivalentes. 2) Montrer que si $I \subset J$, alors $W^{n,p}(J) \subset W^{n,p}(I)$.

Une fonction u appartient donc à $W^{1,p}(I)$ si $u \in L^p(I)$ et si sa dérivée au sens des distributions dans I est dans L^p . Cela veut dire

$$\exists v (= u') \in L^p, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \int_I v(x) \varphi(x) dx = - \int_I u(x) \varphi'(x) dx.$$

Théorème 7.1 Si $u \in W^{1,p}(I)$, il existe $\tilde{u} \in C^0(I)$ (c'est-à-dire continue dans I) telle que $u = \tilde{u}$ presque partout dans I et

$$\forall x, y \in I, \int_x^y u'(t) dt = \tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) \quad (7.1)$$

Remarque 7.1 Bien entendu, on identifiera u et \tilde{u} et on dira simplement que u est continue, conformément à la convention suivante : si une fonction localement intégrable est égale presque partout à une fonction continue, on l'identifie à ce représentant continu. Cela ne conduit à aucune ambiguïté, puisque deux fonctions continues égales presque partout sur un intervalle sont identiques sur cet intervalle.

Démonstration L'énoncé porte sur un intervalle borné $[x, y]$. On peut donc supposer sans perte de généralité que I est borné (si $I \subset J$, $W^{1,p}(J) \subset W^{1,p}(I)$, voir l'exercice 1). I étant donc supposé borné, $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ est dense dans $L^1(I)$ (Corollaire ??). On peut choisir une suite $v_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ qui converge vers u' dans $L^1(I)$. On pose pour a fixé dans I , $u_\varepsilon(x) = \int_a^x v_\varepsilon(t) dt$. La suite u_ε converge uniformément vers une fonction w continue sur I . Alors d'une part, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, par intégration par parties et par définition de la dérivée au sens des distributions :

$$\int_I u_\varepsilon \varphi' = - \int v_\varepsilon \varphi \rightarrow - \int u' \varphi = \int u \varphi'$$

$$\text{et d'autre part } \int_I u_\varepsilon \varphi' \rightarrow \int w \varphi'.$$

$$\text{Donc } \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \int (w - u) \varphi' = 0,$$

ce qui prouve par le lemme 6.1 que $w - u$ est égale presque partout à une constante C . On conclut en posant $\tilde{u} = w - C$. \circ

Corollaire 7.1 Si $u \in W^{1,p}(I)$, il existe une suite $w_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ convergeant vers u uniformément et dans $W^{1,p}(K)$ sur tout intervalle compact $K \subset I$.

Démonstration Il suffit de reprendre la démonstration précédente en rappelant que \mathcal{C}_0^∞ est aussi dense dans $L^p(I)$. Donc on peut prendre $v_\varepsilon \rightarrow u'$ dans $L^p(I)$. Cela implique que $u_\varepsilon(x) = \int_a^x v_\varepsilon(t) dt$ tend vers $u(x) - u(a)$ uniformément sur tout compact (et donc aussi dans L^p de tout compact inclus dans I). On conclut en posant $w_\varepsilon = u_\varepsilon + u(a)$. \circ

Proposition 7.1 Si $p < \infty$, alors toute fonction $u \in W^{1,p}$ se prolonge en une fonction continue sur la fermeture \bar{I} . Si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, on a de plus $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$.

Démonstration Si $p < \infty$ et si I est borné, on déduit immédiatement de la relation

$|u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |u'(t)| dt$ que $u(x)$ est une suite de Cauchy quand x tend vers a ou b et on peut donc définir u comme une fonction continue sur $[a, b]$. Si I est non borné et $u \in W^{1,1}(I)$, on déduit par la même inégalité que $u(x)$ a une limite quand $x \rightarrow +\infty$ (par exemple). Cette limite ne peut être que zéro, puisque u est intégrable. Prenons maintenant $p > 1$. Supposons un instant que u soit C^1 . On peut alors écrire, par l'inégalité de Hölder,

$$|u|^p(x) - |u|^p(y) = p \int_x^y u' |u|^{p-2} u dx \leq p \left(\int_x^y |u'|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^y |u|^p \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (7.2)$$

ce qui implique encore que $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$. Prenons maintenant u dans $W^{1,p}$. Par le corollaire 7.1 on peut considérer u_ε , suite de fonctions C^∞ approximant u dans $W^{1,p}([x, y])$ et uniformément. L'inégalité (7.2) s'applique à u_ε et, par passage à la limite à droite et à gauche, aussi à u . \circ

Définition 7.2 Si $I =]a, b[$ et que a ou b est fini, on note $W_0^{1,p}(I)$ le sous-espace des fonctions $u \in W^{1,p}(I)$ telles que $u(a) = u(b) = 0$. Cette définition a un sens grâce à la proposition précédente : on prend pour $u(a)$ et $u(b)$ les valeurs limites du représentant continu de u . Dans le cas particulier où $p = 2$, on note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

Remarque 7.2 Rappelons qu'en vertu de la proposition 7.1, si I est non borné, $u(x)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow \infty$.

Théorème 7.2 $C_c^\infty(I)$ est dense dans $W_0^{1,p}(I)$. En particulier, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ et $C_0^\infty(I)$ est dense dans $H_0^1(I)$.

Démonstration Etape 1 Regardons d'abord le cas où $I = [a, b]$ est un intervalle borné de \mathbb{R} . Soit $u \in W_0^{1,p}(I)$ et $g_\varepsilon \in C_c^\infty(I)$ telle que $g_\varepsilon \rightarrow u'$ dans $L^p(I)$. Comme $\int_I u'(x)dx = 0$, il en résulte que $\int_I g_\varepsilon(x)dx \rightarrow 0$. Fixons $\varphi \in C_0^\infty(I)$ telle que $\int \varphi(x)dx = 1$. Alors aussi

$$v_\varepsilon = g_\varepsilon - \varphi \int_I g_\varepsilon \rightarrow u'$$

et on a maintenant $\int_I v_\varepsilon = 0$. On voit immédiatement que sa primitive $u_\varepsilon(x) = \int_a^x v_\varepsilon(x)dx$ est dans $C_c^\infty(I)$ et par la relation (7.1) on déduit que u_ε converge uniformément (et donc dans $W^{1,p}$) vers u_0 .

Etape 2 Considérons maintenant I non borné et traitons sans perte de généralité le cas $I =]0, +\infty[$. Grâce à l'étape 1, il suffit que nous montrions que toute fonction $u \in W^{1,p}(]0, +\infty[)$ est approchable par des fonctions u_n dans $W^{1,p}(]0, n[)$. Pour cela, on considère une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(x)| \leq 1$ et à support dans $] -1, 1[$ et on pose simplement $u_n = u\varphi(\frac{x}{n})$. Par le théorème de Lebesgue, $u_n \rightarrow u$ dans L^p ($|u|^p$ est chapeau intégrable) et on a aussi $u'_n \rightarrow u'$ dans L^p . En effet,

$$u'_n = \frac{1}{n}\varphi'(\frac{x}{n})u + u'\varphi(\frac{x}{n}).$$

Or, le premier terme tend vers 0 dans L^p , φ' étant bornée, et le second terme tend vers u' , à nouveau par le théorème de Lebesgue. On conclut que u_n tend vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. \circ

Lemme 7.1 Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné. On considère pour $u \in W_0^{1,p}(I)$ la seminorme $|u|_{W_0^{1,p}} = (\int_I |u'|^p)^{\frac{1}{p}}$. Cette norme est en fait une norme équivalente à $\|u\|_{W^{1,p}}$ pour $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Démonstration On a évidemment $|u|_{W_0^{1,p}} \leq \|u\|_{W^{1,p}}$. Par la relation (7.1) et l'inégalité de Hölder, on a pour tout $x \in [a, b]$,

$$|u(x)| = \left| \int_a^x u'(t)dt \right| \leq (b-a)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b |u'|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En intégrant encore une fois cette inégalité élevée à la puissance p ,

$$\int_a^b |u|^p \leq (b-a)^{\frac{p}{p'}+1} \int_a^b |u'|^p = (b-a)^p \int_a^b |u'|^p.$$

On conclut aisément. ◦

7.1 Les espaces $W^{1,p}(I)$ comme espaces de Banach

Théorème 7.3 $W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Démonstration Soit u_n une suite de Cauchy dans $W^{1,p}$. Comme $L^p(I)$ est complet, il existe $(u, g) \in (L^p(I))^2$ tels que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^p, \quad u'_n \rightarrow g \text{ dans } L^p.$$

Mais $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(I)$ implique $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(I)$. Donc aussi $u'_n \rightarrow u'$ dans \mathcal{D}' . Les deux distributions u' et g sont donc égales et donc $u \in W^{1,p}(I)$. On conclut que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}$. ◦

La démonstration précédente nous invite à regarder $W^{1,p}$ comme un sous-espace fermé de $L^p(I) \times L^p(I)$.

Exercice 2 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Alors le dual topologique de $E \times F$ est $E' \times F'$ et la dualité s'exprime sous la forme $(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$, où $x \in E$, $y \in F$, $f \in E'$, $g \in F'$.

Théorème 7.4 (Dual de $W^{1,p}(I)$) Si $1 \leq p < \infty$, toute forme linéaire f sur $W^{1,p}(I)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(u) = \int_I gu + \int_I hu', \quad \text{où } g, h \in L^{p'}. \quad (7.3)$$

Réciproquement on peut associer à tout couple $g, h \in L^{p'}(I)$ une forme linéaire sur $W^{1,p}(I)$ par la formule (7.3).

Remarque 7.3 Le dual de $W^{1,p}$ est souvent noté $W^{-1,p'}$. Pourquoi ?

Démonstration On a $f(u) \leq C(\|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p})$. On considère le plongement $u \in W^{1,p} \rightarrow J(u) = (u, u') \in (L^p)^2$. Donc $f = f \circ J^{-1}$ vérifie, sur l'image $J(W^{1,p})$,

$$|\tilde{f}(v, w)| \leq C(\|v\|_{L^p} + \|w\|_{L^p}).$$

Par le théorème de Hahn-Banach (cf chapitre ??), on peut étendre \tilde{f} à $(L^p)^2$. Comme $L^{p'}$ est le dual de L^p , l'exercice qui précède montre qu'il existe donc des fonctions $g, h \in (L^p)' = L^{p'}$ telles que $\tilde{f}(v, w) = \int gv + \int hw$. Donc $f(u) = \int gu + \int hu'$. La réciproque est immédiate. Remarquer que $\|f\|_{(W^{1,p})'} = \max(\|g\|_{L^{p'}}, \|h\|_{L^{p'}})$. ◦

Remarque 7.4 La formule (7.3) appliquée avec $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ montre que la restriction \tilde{f} de f à $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ est une distribution sur I et que l'on a $\tilde{f} = g - h'$. On peut donc considérer, en identifiant f et \tilde{f} , les éléments de $W^{1,p}$ comme des distributions et on écrit donc

$$(W^{1,p}(I))' = \{g - h', g, h \in L^p(I)\}.$$

Exercice 3 1) Soit $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq +\infty$, où I est un intervalle de \mathbb{R} borné ou non borné. Montrer qu'il existe une constante C que l'on précisera telle que $|u(x)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$.

2) En déduire qu'une somme finie de masses de Dirac dans I appartient à $W^{-1,p}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

3) Trouver $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ telles que $\delta = f' + g$ et en déduire à nouveau le résultat du 2) pour $1 \leq p < \infty$.

Corollaire 7.2 $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Démonstration En effet, le plongement de $W^{1,p}$ dans $(L^p)^2$ en fait un sous-espace fermé d'un espace réflexif si $1 < p < \infty$ et séparable si $1 \leq p < \infty$. \circ

7.2 Une application : l'élastique chargé

L'introduction de $W_0^{1,p}$ et de sa norme et la description du dual de $W^{1,p}$ nous permettent d'introduire un nouveau point de vue sur l'équation de la corde élastique chargée considérée dans le théorème 6.4.

Théorème 7.5 (Le point de vue variationnel) Soit $f \in W^{-1,2} = (W^{1,2})'$. La solution de l'équation (6.4) se caractérise comme l'unique minimum de la fonction continue sur $H_0^1(I) = W_0^{1,2}$ définie par

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_I u'(x)^2 - \langle f, u \rangle.$$

De plus, u est solution, au sens des distributions, de

$$-u'' = f, \quad u \in W_0^{1,2}(I).$$

(On a posé $I = [0, 2\pi]$ et le problème peut bien-sûr se résoudre pour un intervalle borné quelconque I).

La fonction u représente le déplacement vertical d'un élastique tendu de même longueur au repos que I . La condition $u \in W_0^{1,2}$ traduit le fait que les extrémités de l'élastique sont fixées. Dans l'énergie précédente, le premier terme est l'énergie élastique (linéarisée) et le second terme est l'énergie potentielle associée à la charge f . Remarquons que $W^{-1,2}$ contient des masses de Dirac : le théorème montre donc que l'on peut pendre des masses ponctuelles à un fil.

Démonstration On considère la forme bilinéaire sur $H_0^1([0, 2\pi])$,

$$a(u, v) = \int_I u'(x)v'(x)dx.$$

Comme $a(u, u) = |u|_{H_0^1}^2$ est coercive par le lemme 7.1, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram (théorème ??) et il existe un unique minimum de $\frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle$, qui satisfait de plus

$$\forall v \in H_0^1(I), \int_I u'(x)v'(x)dx = \langle f, v \rangle.$$

Comme $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ est contenu dans $H_0^1(I)$, on a aussi

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \int_I u'(x)\varphi'(x)dx = \langle f, \varphi \rangle$$

$$\text{et donc } \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty, \langle -u'', \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

ce qui veut dire que u vérifie l'équation $-u'' = f$ au sens des distributions. \circ

Exercice 4 Montrer que toute fonction de $W^{1,p}([a, b])$ peut se prolonger en une fonction Pu de $W^{1,p}(\mathbb{R})$. On symétrisera $u \in W^{1,p}([a, b])$ en posant par exemple $Pu(a-x) = u(a+x)$ si $0 \leq x \leq b-a$, on périodisera ensuite la fonction obtenue (période $2(b-a)$) et on la multipliera finalement par une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur I . On vérifiera que le prolongement $P : u \rightarrow Pu$ ainsi obtenu est une application continue de $W^{1,p}(I)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Dans le cas où $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, il suffit bien-sûr de faire une symétrisation par rapport à la borne finie de l'intervalle.

Exercice 5 . Dédurre de l'exercice précédent et du théorème 7.2 que si $I =]a, b[$ est un intervalle borné, alors les fonctions \mathcal{C}^∞ sont denses dans $W^{1,p}(I)$.

Exercice 6 (Inégalité de Poincaré) Si $u \in W_0^{1,p}([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, alors

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq (1 + b - a)\|u'\|_{L^p}.$$

Marche à suivre : utiliser l'inégalité de Hölder et le fait que u est une primitive de u' .

Exercice 7 Soit $u \in L^p(I)$, $1 < p \leq +\infty$. Alors (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii), où

(i) $u \in W^{1,p}$.

(ii) $\exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I), |\int_I u\varphi'| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)}$,

(iii) $\exists C, \forall \omega \subset\subset I, \forall h, |h| \leq \text{distance}(\omega, I^C), \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|$.

7.3 Exercices

Exercice 8

1) Montrer que l'injection $H^1(0, 1) \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ est compacte.

2) Montrer que $\forall u, v \in H^1(0, 1)$,

$$\int_0^1 u'v + \int_0^1 uv' = u(1)v(1) - u(0)v(0).$$

(On pourra d'abord le démontrer pour des fonctions de $H_0^1(0, 1)$ en utilisant la densité de fonctions régulières.)

Exercice 9 Soit $f \in L^2(0, 1)$ et $a(u, v) = \int_0^1 u'v' + (\int_0^1 u)(\int_0^1 v)$.

1) Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1(0, 1)$ tel que $a(u, v) = \int_0^1 fv$, $\forall v \in H^1(0, 1)$.

2) Vérifier que $u \in H^2(0, 1)$ et interpréter le problème différentiel résolu (c'est-à-dire trouver l'équation différentielle et les conditions aux limites satisfaites par u).

Exercice 10 Soit $V = \{u \in H^1(0, 1) : u(\frac{1}{2}) = 0\}$.

1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(0, 1)$ et que $v \rightarrow \|v'\|_{L^2}$ est une norme sur V équivalente à la norme usuelle de H^1 .

2) Montrer qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $\int_0^1 u'v' = v(0)$ pour tout $v \in V$.

3) Interpréter le problème résolu, déterminer explicitement u et calculer u'' au sens des distributions. $u \in H^2(0, 1)$??

Exercice 11

Vérifier que $v \rightarrow \|v'\|_{L^2}$ est une norme sur $H^1(0, +\infty)$. Est-elle équivalente à $\|v\|_{H^1}$?

Exercice 12

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ t.q. } f' \in L^\infty(\mathbb{R})\}$. Soient $f \in E$ et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Si $|I| = +\infty$, on suppose de plus que $f(0) = 0$. Enfin, soit $u \in H^1(I)$.

1) Montrer que $f(u) \in L^2(I)$.

2) Soit $u_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(I)$.

a) Vérifier que $f(u_n) \rightarrow f(u)$ dans $L^2(I)$.

b) Soient $\alpha_n = f'(u_n)(u'_n - u')$ et $\beta_n = (f'(u_n) - f'(u))u'$. Vérifier que $\alpha_n \rightarrow 0$ dans $L^2(I)$ et qu'il existe une sous-suite $(\beta_{n_k})_k$ telle que $\beta_{n_k} \rightarrow 0$ dans $L^2(I)$.

c) Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, on a

$$\int_I f(u)\varphi' = - \int_I f'(u)u'\varphi.$$

En déduire que $f(u) \in H^1(I)$ et que $(f(u))' = f'(u)u'$.

3) Soit $\varepsilon > 0$, on note $f_\varepsilon(t) = \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$ si $t > 0$ et $f_\varepsilon \equiv 0$ ailleurs. Vérifier que $f_\varepsilon \in E$ et que $f_\varepsilon(u) \rightarrow u^+$ dans $L^2(I)$.

4) En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans

$$\int_I f_\varepsilon(u)\varphi' = - \int_I f'_\varepsilon(u)u'\varphi,$$

où $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, montrer que $u^+ \in H^1(I)$ et que $(u^+)' = 1_{[u>0]}u'$.

5) En déduire que $|u| \in H^1(I)$.

Exercice 13

Soit N une norme dérivant d'un produit scalaire, montrer que N^2 est strictement convexe c'est-à-dire $\forall u \neq v, \forall t \in]0, 1[, N^2(tu + (1-t)v) < tN^2(u) + (1-t)N^2(v)$. (une norme est-elle strictement convexe?)

Exercice 14 On note $H_0^1(0, 1) = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$.

1) Vérifier que $\|u\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u'\|_2$ si $u \in H_0^1(0, 1)$ et en déduire que $H_0^1(0, 1)$ muni de $\|u'\|_2$ est un Hilbert.

2) Soit $f \in L^2(0, 1)$. Pour $v \in H^1(0, 1)$ on définit

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 |v|^4 - \int_0^1 fv.$$

Vérifier que $F(v)$ a bien un sens si $u \in H^1(0, 1)$ et que $\exists C$ tel que $\forall v \in H_0^1(0, 1)$, $F(v) \geq C$.

Montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(0, 1)$ tel que $F(u) = \inf_{v \in H_0^1(0, 1)} F(v)$ (\star).

3) Montrer que si u est solution de (\star) alors

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3v = \int_0^1 fv, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

(Ecrire $F(u + tv) \geq F(u)$, $\forall t > 0$ et $\forall v \in H_0^1(0, 1)$.)

4) En déduire que u satisfait : $-u'' + u^3 = f$ p.p. ($\star\star$) et que $u \in H^2(0, 1)$.

5) Réciproquement : montrer que si $u \in H^2 \cap H_0^1(0, 1)$ vérifie ($\star\star$) alors u est solution de (\star).

6) Montrer que si $f \geq 0$ p.p. alors u solution de (\star) est telle que $u \geq 0$ p.p.

Exercice 15 Sur l'espace de Sobolev $H^1(0, 1)$, on considère la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv - \left(\int_0^1 u \right) \left(\int_0^1 v \right).$$

Pour $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 1$, on note $V = \{u \in H : u(0) = ku(1)\}$.

1) Vérifier que V est un sous-espace fermé de $H^1(0, 1)$.

2) Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $\forall v \in V$, $|v(0)| \leq C_1 \|v'\|_2$ puis qu'il existe une constante C telle que $\forall v \in V$, $\|v\|_\infty \leq C \|v'\|_2$.

3) En déduire que $a(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur V et que la norme associée (notée $\|\cdot\|_a$) est équivalente sur V à la norme de $H^1(0, 1)$.

4) Soit $f \in L^2(0, 1)$, montrer qu'il existe un unique $u \in V$ tel que

$$(\star) \quad a(u, v) = \int_0^1 fv, \quad \forall v \in V.$$

5) Caractériser la solution de (\star) par l'équation différentielle qu'elle satisfait ainsi que les conditions aux limites.

(Vérifier que $u \in H^2(0, 1)$ pour intégrer par parties.)

6) Soit $(k_n)_n \subset \mathbb{R}$ une suite de réels telle que $\forall n$, $k_n \neq 1$ et $k_n \rightarrow k$ où $k \in \mathbb{R}$ avec $k \neq 1$.

On note $V_n = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = k_n v(1)\}$ et u_n l'unique solution dans V_n de

$$(\star)_n \quad a(u_n, v) = \int_0^1 fv, \quad \forall v \in V_n.$$

Prouver que $(u_n)_n$ est bornée dans $H^1(0, 1)$.

7) En déduire que l'on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge faiblement dans $H^1(0, 1)$ et uniformément dans $\mathcal{C}([0, 1])$ vers une limite notée u_\star . Vérifier que $u_\star \in V$.

8) Soit $v \in V$, on définit

$$v_n(t) = v(t) + \frac{k - k_n}{k_n - 1} v(1).$$

Montrer que $v_n \in V_n$ et que $v_n \rightarrow v$ dans $H^1(0, 1)$.

Utiliser ce fait pour passer à la limite dans $(\star)_n$ et conclure que $u = u_\star$.

- 9) En développant $a(u_{n_k} - u, u_{n_k} - u)$, montrer que $\|u_{n_k} - u\|_{H^1} \rightarrow 0$.
- 10) Montrer qu'en fait, toute la suite $(u_n)_n$ converge vers u dans $H^1(0, 1)$.
- 11) On désigne par T l'opérateur : $f \in L^2(0, 1) \mapsto T(f) = u \in L^2(0, 1)$, u étant la solution de (\star) .
Montrer que $\forall f, g \in L^2(0, 1)$, $\int_0^1 f T(g) = \int_0^1 g T(f)$ et que T est un opérateur compact de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$.

Chapitre 8

Vérification des acquis

Voici une série d'exercices et de petits problèmes qui vous permettront de vérifier vos acquis. Contrairement aux autres exercices, il ne sera pas donné de corrigé. Un étudiant ayant bien assimilé le contenu de ce cours doit pouvoir les faire tous.

Exercice 1 Topologies, distances, normes On dit que deux distances d_1 et d_2 sur un espace métrique sont équivalentes si $\exists C_1, \exists C_2, C_1 d_1 \leq d_2 \leq C_2 d_1$. Soit E un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur E définissant la même topologie sur E .

- 1) Qu'est que cela veut dire ?
- 2) Peut-on en déduire que d_1 et d_2 sont équivalentes ? Justifier votre réponse (preuve ou contreexemple).
- 3) Même question quand $d_1(x, y) = \|x - y\|$ et $d_2(x, y) = |x - y|$ sont deux normes sur \mathbb{R}^N .
- 4) Même question quand d_1 et d_2 dérivent de deux normes, en dimension infinie. Indication : considérer pour E un espace vectoriel de fonctions, par exemple \mathcal{C}_c^∞ , et les normes sur E induites par L^p et L^q , $1 \leq p < q < \infty$.

Exercice 2 Produit de fonctions L^p et L^q . Soient $1 \leq p < q \leq \infty$.

- 1) Donner un exemple de fonction $u \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $u \notin L^q(\mathbb{R})$.
- 2) Donner un exemple de fonction $u \in L^q(\mathbb{R})$ telle que $u \notin L^p(\mathbb{R})$.
- 3) Soient $0 \leq \alpha \leq \beta$ tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \leq 1$. Montrer que $fg \in L^r(\mathbb{R})$ (où $1 \leq r \leq +\infty$ est à préciser).

Exercice 3 Calcul de limites faibles

- 1) La suite $u_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1]} \sin nx$ converge-t-elle faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ et si oui, quelle est sa limite faible ? Cette suite converge-t-elle fortement ?
- 2) Mêmes questions pour $u_n(x) = \sin^2(nx) \mathbb{1}_{[0,1]}$.

Exercice 4 Soit u_n une suite bornée de $L^p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p \leq +\infty$). On se demande si elle admet une sous-suite faiblement convergente ou faiblement-* convergente. Si oui le montrer, sinon, donner un contreexemple.

- 1) Traiter le cas $1 < p < +\infty$

- 2) Traiter le cas $p = +\infty$
- 3) Traiter le cas $p = 1$.
- 4) Montrer que $C_0^0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions réelles continues et tendant vers zéro à l'infini, est un sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R})$.
- 5) Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $C_0^0(\mathbb{R})'$ et en déduire que de toute suite bornée dans $L^1(\mathbb{R})$ on peut extraire une sous-suite (encore notée u_n) telle que $\int u_n(x)\varphi(x)$ converge pour tout $\varphi(x) \in C_0^0(\mathbb{R})$.
- 6) Regarder le cas particulier de $u_n(x) = n\mathbb{1}_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$: quelle est la limite de u_n au sens de la convergence faible-* dans $C_0^0(\mathbb{R})'$?
- 7) Dans lesquels de tous les cas précédents peut-on conclure que la suite u_n a une sous-suite qui converge au sens des distributions ?
- 8) En déduire que de toute suite bornée dans L_{loc}^1 (c'est-à-dire bornée dans $L^1(B)$ pour tout borné B), on peut extraire une sous-suite convergente au sens des distributions.

Exercice 5 On note $C_0^0(\mathbb{R}^N)$ l'espace vectoriel des fonctions continues et tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme de L^∞ , c'est-à-dire la norme de la convergence uniforme. Montrer que c'est un espace de Banach.

Exercice 6 Montrer que de toute suite bornée dans $W^{1,p}(I)$ on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact.

Exercice 7 La base en sinus et son utilisation comme base de $W_0^{1,2}(0, T)$.

1) On pose pour $T > 0$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Montrer que les fonctions $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(\frac{k\omega x}{2})$, $k = 1, 2, \dots$ forment une base hilbertienne de $L^2(0, T)$, que l'on appelle "base en sinus". Indication : prolonger une fonction $u \in L^2(0, T)$ en une fonction impaire sur $[-T, T]$. Donner la formule du développement dans cette base d'une fonction $u \in L^2(0, T)$,

$$u = \sum_k c_k(u) e^{ik\omega x/2}$$

en précisant $c_k(u)$.

2) On pose $\Delta(x) = x$ pour $x \in [0, \frac{T}{2}]$ et $\Delta(x) = T - x$ pour $x \in [\frac{T}{2}, 0]$. Donner le développement dans la base en sinus de Δ . Vérifier que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |k|^2 |c_k(\Delta)|^2 < +\infty$.

3) Montrer que $\Delta \in W_0^{1,2}(0, T)$.

4) Soit une fonction $u \in L^2(0, T)$ telle que $\sum_k |k c_k(u)|^2 < +\infty$. Montrer que $u \in H_0^1(0, T) = W_0^{1,2}(0, T)$.

5) Soit $u \in H_0^1(0, T)$. Montrer que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |k|^2 |c_k(u)|^2 < +\infty$.

6) Montrer qu'une distribution v appartient à $W^{-1,2}$ si et seulement s'il existe une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $v = \sum_k c_k e_k(x)$ avec

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{c_k}{k} \right|^2 < +\infty.$$

8) Montrer que pour toute distribution $f \in W^{-1,2}(0,T)$ il existe une unique $u \in W_0^{1,2}(0,T) = H_0^1(0,T)$ telle que $-u'' = f$. (On admettra l'unicité du développement d'une distribution sur la base e_k et on calculera les coefficients $c_k(u)$ en fonctions des $c_k(f)$.)

Exercice 8 On n'a pas besoin d'utiliser le théorème de Lax-Milgram pour résoudre le problème de l'élastique chargé. Voici un raisonnement qui permet de traiter un problème plus général : Soit I un intervalle borné, $1 < p < +\infty$ et $f \in W^{-1,p}(I) = (W^{1,p}(I))'$. On va montrer qu'il existe un unique minimum de la fonction continue sur $W_0^{1,p}(I)$ définie par

$$E(u) = \int_I |u'(x)|^p - \langle f, u \rangle.$$

De plus, u est solution, au sens des distributions, de

$$-p|u'|^{p-2}u'u'' = f, \quad u \in W_0^{1,p}(I). \quad (8.1)$$

On rappelle que dans $W_0^{1,p}$, la norme $|u|_{W_0^{1,p}} = (\int_I |u'|^p)^{\frac{1}{p}}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}$.

1) En donnant une minoration adéquate de $E(u)$, montrer que $\inf_{u \in W_0^{1,p}(I)} E(u) > -\infty$ et que $E(u) \rightarrow +\infty$ quand $|u|_{W_0^{1,p}} \rightarrow +\infty$.

2) On considère une suite minimisante u_n , c'est-à-dire une suite u_n telle que $E(u_n) \rightarrow \inf_{u \in W_0^{1,p}(I)} E(u)$. Montrer qu'il existe une sous-suite, que l'on notera encore u_n par commodité, et une fonction $u \in W^{1,p}$ telles que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } L^p(I), \quad u'_n \rightharpoonup u' \text{ dans } L^p(I).$$

(On peut utiliser le résultat de l'exercice ??.)

3) Montrer que u_n appartient en fait à $W_0^{1,p}$. Indication : on sait que $W_0^{1,p}(I)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $W^{1,p}$...

4) Montrer que $E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E(u_n)$ et conclure que u est une fonction où E atteint son minimum.

5) Montrer que u est unique si $1 < p < +\infty$. (On utilisera la stricte convexité de la fonction $r \rightarrow |r|^p$).

6) Montrer que u est solution, au sens des distributions, de l'équation (8.1). (On "perturbera" u en $u + t\varphi$, avec $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, et on exprimera que u est minimum de E .)

Exercice 9 Produit de deux fonctions de $W^{1,p}$. Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(I)$ et $(uv)' = u'v + uv'$. On dit que $W^{1,p}$ est une algèbre de fonctions.

Si $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $G(0) = 0$, alors $G(u) \in W^{1,p}(I)$ et $(G(u))' = G'(u)u'$.

Si $\eta \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ est bornée et de dérivée bornée, alors $\eta u \in W^{1,p}(I)$ et $(\eta u)' = \eta u' + \eta' u$. Indication : commencer par remarquer (exercice 4) qu'il suffit de montrer les énoncés précédents quand $I = \mathbb{R}$. Utiliser des arguments de densité : \mathcal{C}_c^∞ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 10 Montrer que, si I est borné, les inclusions suivantes sont continues et compactes :

$$W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I}), \quad 1 < p \leq +\infty,$$

$$W^{1,1}(I) \subset L^q(I), \quad 1 \leq q < \infty.$$

Pour la première, on appliquera le théorème d'Ascoli, pour la seconde le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Chapitre 9

Corrigés des exercices

9.1 Chapitre 1

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

Exercice 6

On note $\text{Intérieur}(A) = \{x \in A : \exists U \text{ ouvert tel que } x \in U \subset A\}$ et

$$\text{adh}(A) = \{x \in E : x \text{ est adhérent à } A\} = \{x \in E : \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} x \notin \text{adh}(A) &\iff \exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \emptyset, \\ &\iff x \in \text{Intérieur}(E \setminus A). \end{aligned}$$

Donc $E \setminus \text{adh}(A) = \text{Intérieur}(E \setminus A)$ d'où $\text{adh}(A)$ est fermé et par définition de \overline{A} , $\overline{A} \subset \text{adh}(A)$.

D'autre part, \overline{A} est fermé par définition donc $E \setminus \overline{A}$ est ouvert et inclus dans $\text{Intérieur}(E \setminus A) = E \setminus \text{adh}(A)$. On en déduit que $\text{adh}(A) \subset \overline{A}$, d'où $\text{adh}(A) = \overline{A}$.

Si $A = \overline{A}$ alors A est fermé par définition de \overline{A} .

Si A est fermé, $A = \overline{A}$ puisque \overline{A} est le plus petit fermé contenant A .

Exercice 7

On sait que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} . Il est facile de voir alors que \mathbb{Q}^N est dense dans \mathbb{R}^N et \mathbb{Q}^N est dénombrable.

Exercice 8

Soit E un espace topologique "grossier", c'est-à-dire que les ouverts de E sont

l'ensemble vide et E lui-même. On suppose que E contient plus d'un élément, alors il n'est pas séparé. En effet, soient $x, y \in E$, $x \neq y$. Soient $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$. Par définition des voisinages, $\exists U$ ouvert tel que $x \in U \subset V$ alors $U = E$ donc $V = E$. De même, $W = E$ et $V \cap W \neq \emptyset$.

Exercice 9

Soit x valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$. Par définition, $\forall n, \forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A_n \neq \emptyset$. Ce qui veut exactement dire que $\forall n, x \in \overline{A_n}$.

Exercice 10

Soit $f : E \rightarrow F$ continue, Soit U un ouvert de F , montrons que $f^{-1}(U)$ est ouvert dans E .

Soit $x_0 \in f^{-1}(U)$ alors comme $f(x_0) \in U$ ouvert, par continuité de f en x_0 , $\exists W \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(W) \subset U$. Alors $W \subset f^{-1} \circ f(W) \subset f^{-1}(U)$ donc $f^{-1}(U)$ est ouvert.

Supposons maintenant que l'image réciproque de tout ouvert est ouverte et montrons que f est continue.

Soit donc $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ alors $\exists U$ ouvert tel que $f(x_0) \in U \subset V$, alors $x_0 \in f^{-1}(U)$ ouvert $\subset f^{-1}(V)$. Donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$ et $f(f^{-1}(V)) \subset V$.

L'autre équivalence se déduit de la précédente par application de la formule $f^{-1}(E \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Si f est continue, la relation $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ montre que $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ d'où $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Inversement, si cette relation est vérifiée $\forall A \subset E$, montrons que $A = f^{-1}(B)$ est fermé, $\forall B$ fermé $\subset F$, d'où la continuité de f . On a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$ donc $\overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$ et $A = \overline{A}$ est fermé.

Exercice 11

On pose $A_n = \{x_k, k \geq n\}$ où $(x_n)_n \subset E$. Alors $F_n = \overline{A_n}$ est fermé et $F_{n+1} \subset F_n$. Il faut montrer que $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$. Si $\bigcap_n F_n = \emptyset$ alors E compact est la réunion des ouverts $E \setminus F_n$ donc il existe I partie finie de \mathbb{N} telle que $E = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i)$ alors $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, c'est absurde car la suite $(F_n)_n$ est décroissante.

Exercice 12

Soient E un espace topologique compact et F un espace topologique séparé. Enfin soit $f : E \rightarrow F$ une application continue. On veut montrer que $f(E)$ est compact.

D'abord $f(E)$ est séparé car F l'est. Supposons maintenant que $f(E) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ où chaque U_i est un ouvert de F . Comme f est continue, $f^{-1}(U_i)$ est ouvert dans E et $E \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$. Puisque E est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini : $\exists J$ fini $\subset I$ tel que $E \subset \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$. Alors $f(E) \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. D'où $f(E)$ est compact.

Rappel : on a toujours $f(f^{-1}(A)) \subset A$ et $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Exercice 13**Exercice 14**

1) Si $x \neq y$, $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$ avec $r = \frac{d(x, y)}{4}$.

2) $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in A \text{ tel que } d(x, y_\varepsilon) \leq \varepsilon, \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \\ &\iff x \in \overline{A}. \end{aligned}$$

Si $d(x, A) = 0$ alors pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in A$ tel que $d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}$ donc il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x$.

Si il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x$ alors $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \in V$ donc $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$ et $x \in \overline{A}$.

Exercice 15

Pour le sens direct, voir la proposition 1.2.

Soit maintenant f continue séquentiellement et supposons que f n'est pas continue en $x \in E$, alors $\exists \varepsilon > 0$ telque $\forall \eta > 0$, $\exists x_\eta$ telque $d(x, x_\eta) \leq \eta$ et $d(f(x), f(x_\eta)) > \varepsilon$. On choisit $\eta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe une suite $(x_n)_n \subset E$ telle que $d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}$ et $d(f(x), f(x_n)) > \varepsilon$. Alors la suite $(x_n)_n$ converge vers $x \in E$ et la suite $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$, c'est absurde.

Exercice 16

On suppose qu'il existe une suite $(x_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} \rightarrow x$ alors x est valeur d'adhérence de la suite $(x_{n_k})_k$ et donc de la suite $(x_n)_n$.

Si x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n$, $\exists i \geq n$ tel que $d(x, x_i) \leq \varepsilon$. En choisissant par exemple $\varepsilon = \frac{1}{k}$, on construit une suite $(n_k)_k$ strictement croissante telle que $d(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{k}$. La suite $(x_{n_k})_k$ tend alors vers x .

Exercice 17 ***** TICHONOV DENOMBRABLE *****

Exercice 18 les compacts de \mathbb{R}^N

Exercice 19

Comme f est continue, $\forall x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha_x > 0$ tel que $d(x, y) < \alpha_x \implies d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors $E \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{\alpha_x}{2})$ et E est compact.

Donc $E \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \frac{\alpha_{x_i}}{2})$. On pose $\delta = \frac{1}{4} \min(\alpha_{x_1}, \dots, \alpha_{x_N}) > 0$.

Si y et z sont tels que $d(y, z) < \delta$, $\exists i \leq N$, tel que $y \in B(x_i, \frac{\alpha_{x_i}}{2})$ et $d(z, x_i) < \delta + \frac{\alpha_{x_i}}{2} < \alpha_{x_i}$. Donc $\exists i \leq N$ tel que $y, z \in B(x_i, \alpha_{x_i})$. Alors

$$d(f(y), f(z)) \leq d(f(y), f(x_i)) + d(f(x_i), f(z)) < \varepsilon.$$

Donc f est uniformément continue.

Exercice 20 min atteint

Exercice 21

Le sens direct est immédiat : si on a une suite $(x_n)_n$ de points de A , c'est aussi une suite de \overline{A} donc elle admet une sous-suite convergente (voir théorème 1.3). Pour l'autre sens, on se donne $(x_n)_n$ une suite de \overline{A} et on veut montrer qu'elle admet une sous-suite convergente. Comme $x_n \in \overline{A}$ pour tout n , il existe $y_n \in A$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ par exemple. Par hypothèse, $(y_n)_n$ a une sous-suite $(y_{n_k})_{n_k}$ convergente dans E . On en déduit facilement que $(x_{n_k})_{n_k}$ converge vers la même limite.

Exercice 22

On note S l'ensemble des applications surjectives c de $[0, 1]$ sur C l'arc rectifiable et de constante de Lipschitz k_c , on a $l(C) = \inf_{c \in S} k_c$.

Soit $(c_n)_n \subset S$ telle que $(k_{c_n})_n$ soit une suite minimisante (par exemple : $l(C) \leq k_{c_n} \leq l(C) + \frac{1}{n}$).

On note $A = \{c_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{C}[0, 1]$. On va appliquer le théorème d'Ascoli à l'ensemble A .

1) A est équicontinue :

On remarque que $\|c_n(t) - c_n(s)\| \leq k_{c_n}|t - s| \leq (l(C) + 1)|t - s|$ et ceci pour tous t et s dans $[0, 1]$. Donc A est équicontinue.

2) Montrons que la suite $(c_n(s))_n$ est bornée, $\forall s \in [0, 1]$.

C compact de \mathbb{R}^N est borné donc il existe $R > 0$ tel que $C \subset B(0, R)$. Alors $\forall s \in [0, 1], \forall c \in S, \|c(s)\| \leq R$.

Le théorème d'Ascoli donne l'existence d'une sous-suite $(c_{n_p})_p$ convergeant uniformément dans $\mathcal{C}[0, 1]$. On note c_0 la limite. On a

$$\forall p, \|c_{n_p}(s) - c_{n_p}(t)\| \leq k_{n_p}|s - t|, \quad \forall s, t \in [0, 1],$$

donc quand p tend vers l'infini, $\|c_0(s) - c_0(t)\| \leq l(C)|s - t|, \forall s, t \in [0, 1]$. Il reste à vérifier que c_0 est surjective : $c_0([0, 1]) = C$. On sait que pour tout $y \in C$ et pour tout p , il existe un s_{np} dans $[0, 1]$ tel que $y = c_{n_p}(s_{np})$. La suite $(s_{np})_p$ est dans $[0, 1]$ compact donc il existe une sous-suite encore notée $(s_{np})_p$ qui converge vers un $s \in [0, 1]$. Comme $s_{np} \rightarrow s$ et $c_{n_p} \rightarrow c_0$ uniformément, on peut passer à la limite et on obtient $y = c_0(s)$, donc c_0 est surjective et $l(C) = k_{c_0}$.

Exercice 23

On a déjà vu $(i) \Rightarrow (ii)$ dans l'exercice 11 et $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ dans l'exercice 16. Il reste à montrer $(iii) \Rightarrow (i)$.

Démontrons le point 1) par l'absurde, si pour tout $r > 0$, il existe x_r tel que, pour tout $i, B(x_r, r) \not\subset O_i$, en choisissant $r = \frac{1}{n}$, on construit une suite $(x_n)_n$ telle que $\forall i, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$. Par hypothèse, il existe une sous-suite $(x_{nk})_k$ convergeant vers un x dans E . D'autre part, il existe i tel que $x \in O_i$ ouvert donc pour un certain $N, B(x, \frac{1}{N}) \subset O_i$. Enfin, $\exists n \geq 2N$ tel que $x_n \in B(x, \frac{1}{2N})$. Alors

$$B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x_n, \frac{1}{2N}) \subset B(x, \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N}) \subset O_i,$$

ce qui est absurde.

Démontrons le point 2).

Soit $y_1 \in E, \exists i_1$ tel que $B(y_1, r) \subset O_{i_1}$. Si $E = O_{i_1}$, c'est fini.

Sinon, $\exists y_2 \in E \setminus O_{i_1}$ et $\exists i_2$ tels que $B(y_2, r) \subset O_{i_2}$. Si $E = O_{i_1} \cup O_{i_2}$, c'est fini, sinon $\exists y_3 \in E \setminus (O_{i_1} \cup O_{i_2})$ etc... Si le processus s'arrête, E est compact.

Sinon, il existe une suite $(y_n)_n$ dans E telle que $y_n \notin O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_{n-1}}$ et donc $y_n \notin B(y_1, r) \cup \dots \cup B(y_{n-1}, r)$ pour tout n . Par hypothèse, une sous-suite converge or $d(y_n, y_m) \geq r > 0$ dès que $n > m$, c'est absurde.

Exercice 24

Soit $x \in E$, comme $\overline{X} = E$, il existe une suite $(x_n)_n \subset X$ telle que $x_n \rightarrow x$. En particulier, $(x_n)_n$ est de Cauchy et comme f est uniformément continue, la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans F complet donc converge vers un élément noté $f(x)$. On définit bien ainsi une application $\tilde{f} : E \rightarrow F$. Si $x \in X$ alors $f(x_n) \rightarrow f(x)$ donc $f(x) = \tilde{f}(x)$ et \tilde{f} prolonge f .

Montrons que \tilde{f} est uniformément continue. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in X$ vérifiant $d(x, y) \leq \eta$ on ait $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Soient $x, y \in E$ tels que $d(x, y) \leq \eta/2$, il existe deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ de points de X convergeant respectivement vers x et y avec $d(x_n, y_n) \leq \eta$ pour n assez grand. Les relations $d(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon, \tilde{f}(x) = \lim f(x_n), \tilde{f}(y) =$

$\lim f(y_n)$ entraînent $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon$ puisque la distance est continue. Donc \tilde{f} est uniformément continue. Enfin, si deux applications continues coïncident sur une partie dense, elles sont égales donc \tilde{f} est unique.

Exercice 25

Pour n fixé, $E \subset \cup_{x \in E} B(x, \frac{1}{n})$ et E est compact donc $\exists k_n$ tel que $E \subset \cup_{i=1}^{k_n} B(x_i^n, \frac{1}{n})$. Soit $D = \{x_i^n, i = 1, \dots, k_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, D est bien dénombrable, vérifions que D est dense dans E . Soient $x \in E$ et $r > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < r$ et $\exists x_i^N$ tel que $x \in B(x_i^N, \frac{1}{N})$ alors $x_i^N \in B(x, r) \cap D$.

Exercice 26

1) a) Soient $n = \dim E$ et e_1, \dots, e_n une base de E . On définit pour $x = \sum_1^n x_i e_i \in$

E , la norme $\|x\|_1 = \sum_1^n |x_i|$. Soit $S_1 = \{x \in E : \|x\|_1 = 1\}$ et soit N une autre norme sur E , de $N(x) \leq (\sup_i N(e_i)) \|x\|_1$ on déduit la continuité de N sur $(S_1, \|\cdot\|_1)$ compact, donc N est bornée et atteint ses bornes. Il existe α et $\beta \geq 0$ tels que $\forall x \in S_1, \alpha \leq N(x) \leq \beta$. Comme $\alpha = N(y)$ pour un $y \in S_1, y \neq 0$ et $\alpha > 0$. Enfin, $\forall x \neq 0, \frac{x}{\|x\|_1} \in S_1$ donc $\alpha \|x\|_1 \leq N(x) \leq \beta \|x\|_1$.

b) Soit $x = \sum_1^n x_i e_i \in E$, on a $\|u(x)\|_F \leq (\sup_i \|u(e_i)\|_F) \|x\|_1$ donc u est continue.

2) a) Il est clair que N_0 et N_1 sont des normes sur E (elles le sont sur \mathbb{R} et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

On raisonne par récurrence, pour $n = 1$, on a $a_1 = -1$ et $b_1 = 1$ donc $a_1 b_1 < 0$. On suppose que $x^n \in E$ et $a_n b_n < 0$ alors $x^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{2}$ où $a_{n+1} = 2b_n - a_n$ et $b_{n+1} = a_n - b_n$ donc $a_{n+1} b_{n+1} = b_n(a_n - b_n) - (a_n - b_n)^2 < 0$.

Enfin si $(\sqrt{2}+1)^n = |a_n| + |b_n| \sqrt{2}$ alors $(\sqrt{2}+1)^{n+1} = (2|b_n| + |a_n|) + \sqrt{2}(|a_n| + |b_n|)$. Or $a_{n+1} = 2b_n - a_n$ et $a_n b_n < 0$ montre que $|a_{n+1}| = 2|b_n| + |a_n|$. De même pour $b_{n+1}, |b_{n+1}| = |a_n| + |b_n|$, donc $\forall n \geq 1, (\sqrt{2}+1)^n = |a_n| + |b_n| \sqrt{2}$.

b) D'une part, $N_0(x^n) = |\sqrt{2}-1|^n \rightarrow 0$ et d'autre part, $N_1(x^n)(1+\sqrt{2}) \geq (\sqrt{2}+1)^n = |a_n| + |b_n| \sqrt{2} \rightarrow +\infty$ donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 27

a) Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{L}(E, F)$ une suite de Cauchy alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, $\forall x \in E, \|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$. (1).

Et $\forall x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans F complet donc converge vers un élément noté $f(x)$. la fonction f est linéaire comme limite simple de fonctions linéaires. On fixe p dans (1) et on laisse $q \rightarrow \infty$, on obtient alors $\|f_p(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E, \forall x \in E$, d'où $f = f - f_p + f_p$ est continue et $\|f_p - f\| \leq \varepsilon$, dès que $p \geq N$ donc $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

b) Par hypothèse $\overline{B_E}$ est compact donc il existe $a_1, \dots, a_n \in E$ tels que $\overline{B_E} \subset \cup_1^n B(a_i, \frac{1}{2})$. Soit $V = \text{vect}\{a_1, \dots, a_n\}$, montrons que $E = V$. On raisonne par l'absurde, s'il existe $x \in E$ tel que $d(x, V) = \alpha > 0$ alors $\exists y \in V$ tel que $\alpha \leq d(x, y) \leq \frac{3}{2}\alpha$.

Soit $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \overline{B_E}$ alors pour un certain $i_0, z \in B(a_{i_0}, \frac{1}{2})$ et on a

$$\|x - y - a_{i_0}\| \|x - y\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\| \leq \frac{3}{4} \alpha$$

donc il existerait un $y_0 \in V$ tel que $d(x, y_0) < \alpha$, ce qui est absurde.

Exercice 28

- 1) $\forall x \in E$ et $\forall y \in H$, on a $|f(x)| = |f(x-y)| \leq \|f\| \|x-y\|$ d'où le résultat.
 2) $d(x, H) \leq \|x-y\| \leq \frac{|f(x)|}{|f(u)|} \|u\|$ où $u \in E \setminus H$. Comme $f \neq 0$, on peut remarquer que $\|f\| = \sup_{u \in E \setminus H} \frac{|f(u)|}{\|u\|}$.
 3) a) Soit $(x^p)_p$ une suite de Cauchy dans $E = \mathcal{C}_0$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, q \geq N, \forall n \quad |x_n^p - x_n^q| \leq \varepsilon. \quad (\star)$$

Donc $\forall n$, la suite $(x_n^p)_p$ est de Cauchy dans \mathbb{R} et converge vers un x_n . Posons $x = (x_n)_n$, alors de (\star) on déduit que $\forall n, \forall q \geq N, |x_n - x_n^q| \leq \varepsilon$ donc la suite (x^p) converge vers x en norme $\|\cdot\|_\infty$. Il reste à voir que $x \in E$. De l'inégalité précédente on tire $|x_n| \leq \varepsilon + |x_n^N|$ donc pour n assez grand $|x_n| \leq 2\varepsilon$, et $x \in E$.

b) On a facilement $|f(x)| \leq \|x\|_\infty$ et f linéaire donc $f \in E'$ et $\|f\| \leq 1$. Soit $x^N \in E$ défini par $x_n^N = 1$ si $n \leq N$ et $x_n^N = 0$ sinon, alors $|f(x^N)| = 1 - \frac{1}{2^N} \leq \|f\|$ et ceci $\forall N \geq 1$ d'où $\|f\| = 1$.

S'il existe $x = (x_n)_n \in E$ avec $\|x\| = 1$ et tel que $|f(x)| = \|f\| = 1$ alors

$$1 = |f(x)| \leq \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} |x_n| \implies \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} (1 - |x_n|) \leq 0 \implies |x_n| = 1, \forall n,$$

et $x \notin E$. Donc $\|f\|$ n'est pas atteint. Enfin $d(x, H) = \left| \sum_1^\infty \frac{x_n}{2^n} \right|$.

Exercice 29

- 1) On vérifie facilement que si $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in E$, on a $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ et

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n (k^{p-1} + \dots + k + 1) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Comme $k < 1$, la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy donc converge vers $x \in E$. De $x_{n+1} = f(x_n)$ on déduit $x = f(x)$ puisque f est continue, et x est un point fixe.

Si $d(f(a), f(b)) = d(a, b) \leq kd(a, b)$ avec $k < 1$, nécessairement $a = b$, d'où l'unicité du point fixe.

- 2) $\forall \lambda, \lambda_0$, on a

$$\begin{aligned} d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) &= d(f_\lambda(a_\lambda), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})) \\ &\leq d(f_\lambda(a_\lambda), f_\lambda(a_{\lambda_0})) + d(f_\lambda(a_{\lambda_0}), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})) \\ &\leq kd(a_\lambda, a_{\lambda_0}) + d(f_\lambda(a_{\lambda_0}), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})), \end{aligned}$$

donc

$$d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) \leq \frac{1}{1-k} d(f_\lambda(a_{\lambda_0}), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})).$$

Ce qui montre que l'application $\lambda \rightarrow a_\lambda$ est continue en λ_0 .

- 3) Soit $\varphi(x) = d(x, f(x))$, φ est continue sur E compact donc atteint son inf : $\exists x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \leq \varphi(x), \forall x \in E$. Si $\varphi(x_0) \neq 0$, on a $\varphi(f(x_0)) < \varphi(x_0)$ ce qui est absurde, donc $\varphi(x_0) = 0$ et x_0 est un point fixe de f . Si il y en a un autre, x_1 , alors $d(f(x_0), f(x_1)) = d(x_0, x_1) < d(x_0, x_1)$ donc nécessairement $x_0 = x_1$.

- 4) Soit z fixé dans C , $f_n(C) \subset C, \forall n$, car C est convexe et f_n est $\frac{n}{n+1}$ -lipschitzienne sur C . Donc, par 1), $\exists x_n \in C$ tel que $x_n = f_n(x_n), \forall n$. Maintenant C est compact donc il existe une sous-suite notée $(x_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} \rightarrow x \in C$, alors en passant à la limite dans $x_{n_k} = f_{n_k}(x_{n_k}) = \frac{1}{n_k+1}z + \frac{n_k}{n_k+1}f(x_{n_k})$, on obtient $x = f(x)$ et x est un point fixe de f .

Exercice 30

a) Il est clair que N dérive d'un produit scalaire.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|f(x)| \leq |f(0)| + (\int_0^1 f'(t)^2 dt)^{\frac{1}{2}}$. En élevant au carré et en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient facilement $|f(x)|^2 \leq 2N(f)$, $\forall x \in [0, 1]$.

c) On choisit $f_n(x) = x^n$. Alors $\forall n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \rightarrow +\infty$. Donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 31

Comme E est métrique, on va montrer que de toute suite de E , on peut extraire une sous-suite convergente. Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E . Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, E est recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$ donc l'une d'entre elles contient une infinité de x_n . On peut donc extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})_n$ telle que $d(x_{\varphi_1(n)}, x_{\varphi_1(p)}) \leq 1$. Et on recommence ce processus, pour $\varepsilon = \frac{1}{2^p}$, E est recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2^p}$ donc l'une d'entre elles contient une infinité de $x_{\varphi_{p-1}(n)}$. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi_p(n)})_n$ telle que $d(x_{\varphi_p(n)}, x_{\varphi_p(m)}) \leq \frac{1}{2^p}$. Soit $(x_{\varphi_n(n)})_n$ la suite diagonale, elle est bien extraite de $(x_n)_n$ et vérifie

$$d(x_{\varphi_n(n)}, x_{\varphi_m(m)}) \leq \frac{1}{m}, \quad \forall m, n, m \leq n.$$

Cette suite est donc de Cauchy dans E complet, elle converge, d'où E est compact.

Exercice 32

1) $T(B_E)$ est inclus dans le compact $\overline{B(0, \|T\|)} \cap \text{Im}T$ de $\text{Im}(T)$ qui est de dimension finie. Donc T est compact.

2) $T(f) \in E$ par convergence dominée par exemple. T est linéaire et $\forall x$,

$$|T(f)(x)| \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Donc T est continue sur E .

Pour montrer que T est un opérateur compact, on applique le théorème d'Ascoli à $A = T(B_E)$ dans $\mathcal{C}[0, 1]$.

L'uniforme continuité de K permet de prouver l'équicontinuité de $T(B_E)$.

En effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x, z \in [0, 1]$ et $\forall y \in [0, 1]$, on a $|x - z| \leq \eta \implies |K(x, y) - K(z, y)| \leq \varepsilon$. D'où, $\forall x, z \in [0, 1]$ tels que $|x - z| \leq \eta$, on a, $\forall f \in B_E$,

$$|T(f)(x) - T(f)(z)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |K(x, y) - K(z, y)| dy \leq \varepsilon.$$

Enfin, $\forall x \in [0, 1]$, $\{T(f)(x), f \in B_E\} \subset [-\|K\|_\infty, \|K\|_\infty]$ donc le point (ii) est vérifié.

On déduit du théorème d'Ascoli que $\overline{T(B_E)}$ est compact.

Exercice 33

1) On suppose le contraire : on note $A = \{s^k, k \in \mathbb{N}\}$. Soit s défini par $s_n = 0$ si $s_n^n = 1$ et $s_n = 1$ si $s_n^n = 0$. Alors par construction $s = (s_n)_n \notin A$ et pourtant $s \in A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ par définition. C'est absurde et A n'est pas dénombrable.

2) Soit $z = (z_n)_n \in A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, on peut construire f_z continue, affine par morceaux de telle sorte que $f_z(n) = z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq f_z(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Par construction, si $z, z' \in A$ avec $z \neq z'$, $|f_z(x) - f_{z'}(x)| \leq 1$ et $\exists n \in \mathbb{N}$ tel

que

$|f_z(n) - f_{z'}(n)| = 1$. Donc $\|f_z - f_{z'}\|_\infty = 1$.

3) On suppose qu'il existe une suite $(g_n)_n$ dense dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Alors $\forall z \in A$, $\exists n_z \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_z - g_{n_z}\|_\infty < 1/4$ par exemple.

On définit alors $i : A \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $i(z) = n_z$. Vérifions que cette application est injective : soient $z, z' \in A$ avec $z \neq z'$, alors

$$\|g_{n_z} - g_{n_{z'}}\|_\infty \geq \|f_z - f_{z'}\|_\infty - \|f_z - g_{n_z}\|_\infty - \|f_{z'} - g_{n_{z'}}\|_\infty.$$

Donc

$$\|g_{n_z} - g_{n_{z'}}\|_\infty \geq \|f_z - f_{z'}\|_\infty - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0,$$

ce qui implique que $n_z \neq n_{z'}$. D'où i est injective. Or A n'est pas dénombrable, c'est absurde. L'espace $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ n'est donc pas séparable.

Exercice 34

Préliminaire*****à faire*****

Partie I :

1) $\|x^N - x\|_p^p = \sum_{n \geq N+1} |x_n|^p \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$ comme reste d'une série convergente.

Soit $x = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in \ell^\infty$ alors $\forall N, \|x^N - x\|_\infty = 1$.

2) Soit $1 \leq p < \infty$. On pose $Q_N = \text{vect}_{\mathbb{Q}}(e_1, \dots, e_N)$. Alors $\forall N, Q_N$ est dénombrable (car isomorphe à \mathbb{Q}^N) et $D = \bigcup_N Q_N$ est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables. Vérifions que D est dense dans ℓ^p . Soit $x \in \ell^p$ et soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que $\|x^N - x\|_p \leq \varepsilon$. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , $\exists y^N \in Q_N$ tel que $\|x^N - y^N\|_p \leq \varepsilon$. On en déduit que $\|y^N - x\|_p \leq \|y^N - x^N\|_p + \|x^N - x\|_p \leq 2\varepsilon$ et donc ℓ^p est séparable.

3) Soient $x, y \in A$ avec $x \neq y$ alors $\exists i$ tel que $|x_i - y_i| = 1$. On a $\|x - y\|_\infty \geq |x_i - y_i| = 1$.

Soit D une partie dense dans ℓ^∞ alors $\forall x \in A, \exists d_x \in D$ tel que $\|x - d_x\|_\infty \leq \frac{1}{4}$ par exemple. On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} d : A &\longrightarrow D \\ x &\longmapsto d_x. \end{aligned}$$

Montrons qu'elle est injective : on a

$$\begin{aligned} \|x - y\|_\infty &\leq \|x - d_x\|_\infty + \|d_x - d_y\|_\infty + \|d_y - y\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{2} + \|d_x - d_y\|_\infty. \end{aligned}$$

Si $d_x = d_y$ alors $\|x - y\|_\infty \leq \frac{1}{2}$. Donc $x = y$. On a déjà vu que A n'est pas dénombrable donc D n'est pas dénombrable. L'espace ℓ^∞ n'est donc pas séparable.

4) Par concavité du log, on $\forall a, b \geq 0$,

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(b^{p'}) = \log a + \log b = \log(ab).$$

On applique ensuite l'exponentielle (croissante), on obtient bien l'inégalité demandée.

Soient $x \in \ell^p, y \in \ell^{p'}$ et $\lambda > 0$. Alors

$$\lambda|x_n y_n| = |\lambda x_n y_n| \leq \frac{1}{p}\lambda^p|x_n|^p + \frac{1}{p'}|y_n|^{p'}.$$

On peut ensuite sommer sur n car le terme de droite définit le terme général d'une série convergente et on a

$$\lambda \sum_n |x_n y_n| \leq \frac{1}{p} \lambda^p \sum_n |x_n|^p + \frac{1}{p'} \sum_n |y_n|^{p'}.$$

On conclut en divisant par $\lambda > 0$. Maintenant on choisit $\lambda = \frac{\|y\|_{p'}^{p'}}{\|x\|_p}$ pour x et y non nuls. En reportant dans l'inégalité ci-dessus, on a

$$\sum_n |x_n y_n| \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

Et cette inégalité reste vraie si x ou y est nul. Le cas $p = 1$ est facile.

5) f a bien un sens grâce à l'inégalité de Holder démontrée en 4). Elle est linéaire et continue car $|f(x)| \leq \sum_n |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$ d'après 4).

a) Λ est linéaire et on a déjà $\|\Lambda_y\| \leq \|y\|_{p'}$. Il faut montrer l'égalité.

Si $p = 1$, soit $\varepsilon > 0$, on fixe k tel que $|y_k| \geq \|y\|_\infty - \varepsilon$ et on prend $x = \delta_k e_k$ où $\delta_k = \text{sign}(y_k)$ alors $\Lambda_y(e_k) = |y_k|$. D'où $\|\Lambda_y\| \geq \|y\|_\infty - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc Λ est une isométrie.

Si $p > 1$, on considère $x_n = \varepsilon_n |y_n|^{\frac{p'}{p}}$ où $\varepsilon_n = \text{sign}(y_n)$. Comme $y \in \ell^{p'}$, $x \in \ell^p$ et $\|x\|_p^p = \|y\|_{p'}^{p'}$. On a

$$\Lambda_y(x) = \sum_n |y_n|^{p'} = \|y\|_{p'}^{p'} \leq \|\Lambda_y\| \|x\|_p.$$

D'où $\|\Lambda_y\| = \|y\|_{p'}$.

b) On sait déjà que Λ est linéaire continue isométrique (donc injective). Il reste à montrer la surjectivité et on aura bien un isomorphisme (Λ^{-1} est continue). Soit $f \in (\ell^p)'$, on cherche $y \in \ell^{p'}$ tel que $f = \Lambda_y$. Grâce à 1), on peut écrire tout $x \in \ell^p$ comme somme de la série $x = \sum_n x_n e_n$. Si f est linéaire et continue, on a $f(x) = \sum x_n f(e_n)$. Il est donc "naturel" de considérer $y = (y_n)_n$ avec $y_n = f(e_n)$.

Si $p = 1$, par continuité de f , $|y_n| \leq \|f\| \|e_n\|_1 \leq \|f\|$. La suite $(f(e_n))_n$ est bien dans ℓ^∞ et $f = \Lambda_y$. C'est surjectif.

Si $p > 1$, il nous faut montrer que $y \in \ell^{p'}$. Soit $N \geq 1$ et soit donc $x^N = (x_n^N)_n$ avec $x_n^N = \text{sign}(y_n) |y_n|^{\frac{p'}{p}}$ si $n \leq N$ et $x_n^N = 0$ sinon. Alors $x^N \in \ell^p$ et $\|x^N\|_p^p = \sum_1^N |f(e_n)|^{p'}$. Donc $f(x^N) = \sum_1^N |f(e_n)|^{p'} \leq \|f\| \|x^N\|_p$. On en déduit que

$$\left(\sum_1^N |f(e_n)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|f\|.$$

Et ceci quelque soit $N \geq 1$, donc $y = (f(e_n))_n \in \ell^{p'}$ et Λ est surjective.

6) En reprenant les notations et les définitions de la question 5), on considère

$$\begin{aligned} \Lambda : \ell^1 &\longrightarrow (C_0)' \\ y &\longmapsto \Lambda_y. \end{aligned}$$

D'abord $\Lambda_y \in (C_0)'$ car elle est linéaire et $|\Lambda_y(x)| \leq \|y\|_1 \|x\|_\infty$ pour tout $x \in C_0$. En particulier $\|\Lambda_y\| \leq \|y\|_1$.

On va montrer comme ci-dessus que Λ est isométrique et surjective.

Soit $x \in C_0$ défini par $x_n = \text{sign}(y_n)$ si $n \leq N$ et $x_n = 0$ sinon. Alors $\|x\| = 1$ et $\Lambda_y(x) = \sum_1^N |y_n| \leq \|\Lambda_y\|$. C'est vrai pour tout N , on en déduit que Λ est

isométrique (donc injective).

Soit maintenant $f \in (C_0)'$ et $y_n = f(e_n)$ comme tout à l'heure. On a comme en 5), $f(x) = \sum_n x_n y_n$ et il reste à vérifier que $y = (y_n)_n \in \ell^1$.

Soit x défini par $x_n = \text{sign}(y_n)$ si $n \leq N$ et $x_n = 0$, alors $f(x) = \sum_1^N |y_n| \leq \|f\|$. Et c'est vrai pour tout N , d'où $y \in \ell^1$.

Le dual de C_0 est donc (isomorphe à) ℓ^1 .

Partie II :

1) Pour montrer que ℓ^p est vectoriel et que d vérifie l'inégalité triangulaire, on a besoin de prouver une inégalité du type : $\forall x, y \geq 0, (x+y)^p \leq x^p + y^p$ ce qui équivaut à $\forall x \geq 0, (1+x)^p \leq 1 + x^p$. On pose donc $f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p$. Comme $p-1 < 0$, $f'(x) \geq 0$ si $x > 0$, donc $f(x) \geq f(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$. Il est facile de voir maintenant que ℓ^p est vectoriel et que d est une distance sur ℓ^p .

2) $d(x^N, x)$ est le reste d'une série convergente donc tend vers 0 avec N . Soit $x \in \ell^p$, comme la série $\sum_n |x_n|^p$ converge, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |x_n| \leq 1$. On en déduit alors que $|x_n| \leq |x_n|^p$ car $0 < p < 1$. Donc la série $\sum_n |x_n|$ converge, d'où $x \in \ell^1$.

3) a) On raisonne par récurrence : pour $N = 2$, c'est la définition de la convexité. On suppose c'est vrai au rang N . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1} \in [0, 1]^{N+1}$ avec $\sum_1^{N+1} \lambda_i = 1$. Soient $x_1, \dots, x_{N+1} \in A^{N+1}$. On pose $S = \sum_1^N \lambda_i$ de sorte que $S + \lambda_{N+1} = 1$ et par hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_1^N \frac{\lambda_i}{S} x_i = y \in A.$$

Alors

$$\sum_1^{N+1} \lambda_i x_i = \frac{S}{S + \lambda_{N+1}} y + \frac{\lambda_{N+1}}{S + \lambda_{N+1}} x_{N+1} \in A.$$

b) $\alpha e^n \in B(0, R)$ si $\alpha^p < R$ et $\frac{\alpha e^n}{n^\beta} \in B(0, R)$ si $\frac{\alpha^p}{n^{p\beta}} < R$. Donc $\alpha = \frac{R^{\frac{1}{p}}}{2}$ convient par exemple.

c) Si $B(0, R)$ est convexe alors d'après b), $\forall N \geq 1$,

$$x = \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \frac{\alpha e^n}{n^\beta} \in B(0, R),$$

avec $\alpha = \frac{R^{\frac{1}{p}}}{2}$. Comme $0 < p < 1$, on peut choisir $\beta = \frac{1-p}{2p} > 0$ et dans ce cas

$$\alpha^p N^{\frac{1-p}{2}} \leq \frac{\alpha^p}{N^p} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{p\beta}} < R.$$

C'est absurde pour N assez grand donc les boules ne sont pas convexes.

4) Soit $f = \Lambda_y$ défini dans l'énoncé. Comme $\ell^p \subset \ell^1$, $\forall x \in \ell^p, |f(x)| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1$ et f est bien définie. Il est facile de voir que f est linéaire. On a montré en 1) que $\forall x, y \geq 0, (x+y)^p \leq x^p + y^p$. On en déduit, par récurrence, que $\forall N \geq 2, \forall x_1, \dots, x_N \geq 0, (x_1 + \dots + x_N)^p \leq x_1^p + \dots + x_N^p$. Maintenant si $x \in \ell^p \subset \ell^1$, en considérant les sommes partielles, on voit facilement que $\|x\|_1^p \leq d(0, x)$.

D'où $\forall x \in \ell^p, |f(x)| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1 \leq \|y\|_\infty d(0, x)^{\frac{1}{p}}$. Ce qui prouve que f est continue en 0 et comme $d(0, x-y) = d(x, y)$, f est continue partout.

5) Λ est linéaire (déjà vu). Λ est injective car si $\forall x \in \ell^p, \Lambda_y(x) = 0$ alors en particulier $\Lambda_y(e^n) = y_n = 0$ pour tout n . Donc $y = 0$.
 Montrons la surjectivité, soit $f \in (\ell^p)'$, on pose $y_n = f(e^n)$. Vérifions que $y = (y_n)_n \in \ell^\infty$. On écrit la continuité de f en 0 : pour $\varepsilon = 1, \exists r > 0$ tel que $x \in B(0, r) \implies |f(x)| \leq 1$. On a vu en 3)b) que $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall n, \alpha e^n \in B(0, r)$. Alors, $|\alpha f(e^n)| \leq 1$. D'où $|f(e^n)| \leq \frac{1}{\alpha}$ pour tout n et $f = \Lambda_y$.

13.2 Chapitre 2

Exercice 1 On considère l'ensemble \mathcal{B} des systèmes libres contenant L . On vérifie immédiatement que cet ensemble est inductif. En effet, si $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ est totalement ordonné, le système $F = \bigcup_{i \in I} F_i$ est encore libre : soient en effet n vecteurs $(x_{i_1} \in F_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in F_{i_n})$ dans F . Comme \mathcal{F} est totalement ordonné, l'un des F_{i_k} contient tous les autres et donc le système $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ est un sous-système d'un système libre et donc libre. Donc F est libre et est donc un majorant de \mathcal{F} . Donc \mathcal{B} est inductif. On peut donc appliquer le lemme de Zorn et déduire que \mathcal{B} a au moins un élément maximal B . Alors B est libre, contient L , et on ne peut lui adjoindre un nouveau vecteur sans le rendre lié, ce qui veut dire qu'il est bien libre et générateur.

Exercice 2 ***** COROLLAIRE 2.1 *****

Exercice 3 ***** JAUGE CONVEXE *****

Exercice 4 ***** HAHN BANACH DIM FINIE *****

Exercice 5

- 1) On peut toujours écrire $f(x) = u(x) + iv(x)$ pour tout $x \in E$. Alors, $Re(if(x)) = -v(x) = Re(f(ix)) = u(ix)$ donc $f(x) = u(x) - iu(ix)$.
- 2) f est \mathbb{R} -linéaire puisque u l'est. On écrit pour tout $x \in E$

$$f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = if(x),$$

donc f est bien \mathbb{C} -linéaire. Enfin, pour tout $x \in E$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(x)| = e^{i\theta} f(x) = f(e^{i\theta} x) = u(e^{i\theta} x) \leq \|u\| \|x\|,$$

donc $\|f\| \leq \|u\|$. D'autre part, on a $|u(x)| \leq |f(x)|$ pour tout $x \in E$ donc $\|u\| \leq \|f\|$ d'où égalité.

Exercice 6

Les ensembles K^* et K^{**} sont fermés comme intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues, donc de $K \subset K^{**}$ on déduit $\overline{K} \subset K^{**}$. Si $\overline{K} \neq K^{**}, \exists y_0 \in K^{**} \setminus \overline{K}$ et par Hahn-Banach, $\exists f \in E', f \neq 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, y_0 \rangle, \quad \forall x \in K.$$

Comme $0 \in K$, on a $\alpha > 0$ et $\forall x \in K, \langle \frac{f}{\alpha}, x \rangle < 1$, donc $\frac{f}{\alpha} \in K^*$ or $y_0 \in K^{**}$ donc $\langle \frac{f}{\alpha}, y_0 \rangle \leq 1$, c'est absurde. D'où $K^{**} = \overline{K}$.

Exercice 7

- 1) On définit les deux formes linéaires continues suivantes

$$\begin{aligned} f_{2n} : \ell^1 &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & g_{2n} : \ell^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_{2n} & & & x &\mapsto x_{2n} - 2^{-n} x_{2n-1}. \end{aligned}$$

Alors $A_0 = \cap_n f_{2n}^{-1}(\{0\})$ et $B = \cap_n g_{2n}^{-1}(\{0\})$ sont fermés comme intersection de fermés.

Soit $e^n = (\delta_{ni})_{i \geq 1}$ où $\delta_{ni} = 1$ si $i = n$, $\delta_{ni} = 0$ sinon, alors si $F_k = \text{vect}\{e^1, \dots, e^k\}$ et si $F = \cup_k F_k$, on a $\overline{F} = \ell^1$. Donc pour montrer que $\ell^1 = \overline{A_0 + B}$, il suffit de montrer que $\forall k, F_k \subset A_0 + B$.

Soit $x \in F_k$, on définit a, b de la façon suivante,

$$\begin{cases} b_{2n} = x_{2n} & b_{2n-1} = 2^n x_{2n} \\ a_{2n-1} = x_{2n-1} - 2^n x_{2n} & a_{2n} = 0 \end{cases}$$

alors $x = a + b$ et comme $x_n = 0$ si $n > k$, $a, b \in \ell^1$ et $(a, b) \in A_0 \times B$. Donc $\ell^1 = \overline{A_0 + B}$.

2) Si $c = a + b$ alors nécessairement $a_{2n} = 0$, $b_{2n} = 2^{-n}$, $b_{2n-1} = 1$ et $a_{2n-1} = -1$ donc $a, b \notin \ell^1$ et $c \notin A_0 + B$. Il est clair alors que $A \cap B = \emptyset$.

Supposons qu'il existe $f \in (\ell^1)'$, $f \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, a \rangle \leq \alpha \leq \langle f, b \rangle, \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Comme B est vectoriel, nécessairement $\langle f, b \rangle = 0$, $\forall b \in B$. De même, de $\langle f, a_0 \rangle \leq \alpha + f(c)$, $\forall a_0 \in A_0$, on en déduit que $\langle f, a_0 \rangle = 0$, $\forall a_0 \in A_0$. Donc $f \equiv 0$ sur $A_0 + B$ dense dans ℓ^1 , par continuité on en conclut que f est identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. On ne peut donc pas séparer A et B .

Exercice 8

1) Soit $F_n = \overline{nT(B(0, 1))}$ alors F_n est fermé et $F = \cup_n F_n$ car T est surjective. Par le lemme de Baire, on sait qu'il existe n_0 tel que $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$ et donc $\text{int}(\overline{T(B(0, 1))}) \neq \emptyset$. Alors il existe $r > 0$ et $y_0 \in F$ tels que $B(y_0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))}$. Si $y_0 \in \overline{T(B(0, 1))}$ alors $-y_0$ aussi et $B(y_0, r) = y_0 + B(0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))}$ donc $B(0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))} + \overline{T(B(0, 1))} \subset 2\overline{T(B(0, 1))}$ d'où $B(0, \frac{r}{2}) \subset \overline{T(B(0, 1))}$ et $2C = \frac{r}{2}$ convient.

2) Soit $y \in B(0, C)$ fixé, on cherche $x \in B(0, 1)$ tel que $y = Tx$. On sait que $B(0, C) \subset \frac{1}{2}B(0, 2C) \subset \overline{T(\frac{1}{2}B(0, 1))}$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z_\varepsilon$, $\|z_\varepsilon\| < \frac{1}{2}$ tel que $\|y - Tz_\varepsilon\| < \varepsilon$.

On choisit $\varepsilon = \frac{C}{2}$, cela nous donne un z_1 tel que $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ et $\|y - Tz_1\| < \frac{C}{2}$.

Alors $y - Tz_1 \in B(0, \frac{C}{2}) \subset \overline{T(\frac{1}{4}B(0, 1))}$ et on recommence, pour $\varepsilon = \frac{C}{4}$, $\exists z_2$ tel que $\|z_2\| < \frac{1}{4}$ et $\|y - Tz_1 - Tz_2\| < \frac{C}{4}$, etc...

On construit ainsi une suite $(z_n)_n$ telle que $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ et $\|y - Tz_1 - \dots - Tz_n\| < \frac{C}{2^n}$, $\forall n$.

La suite $x_n = z_1 + \dots + z_n$ est de Cauchy dans E donc converge vers un $x \in E$, comme T est continue, $Tx_n \rightarrow Tx$, donc $y = Tx$. Il reste à voir que $\|x\| < 1$.

Par exemple, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\|z_1\| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$ alors

$$\|x_n\| \leq \sum_1^n \|z_k\| \leq \sum_1^n \frac{1}{2^k} - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon,$$

d'où le résultat.

Exercice 9

Par le théorème de l'application ouverte (voir exercice ??, $\exists C > 0$ tel que $B_F(0, C) \subset T(B_E(0, 1))$). Comme T est bijective, $\forall x \in E$ tel que $\|Tx\| < C$ on a $\|x\| < 1$. Donc $\|x\| \leq \frac{1}{C}\|Tx\|$ et T^{-1} est continue.

Exercice 10

On applique le résultat précédent à $id : E, \|x\|_2 \rightarrow E, \|x\|_1$.

Exercice 11

Sur E , on considère $\|x\|_1 = \|x\|_E$ et $\|x\|_2 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$. Si $(E, \|x\|_2)$ est complet, comme $\|x\|_1 \leq \|x\|_2, \forall x \in E$, en appliquant l'exercice ci-dessus, on obtient l'équivalence des normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ et donc T est continue.

Vérifions que $(E, \|x\|_2)$ est complet. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy pour $\|x\|_2$, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy pour $\|x\|_1$ donc elle converge vers un $x \in E$ au sens de la norme $\|x\|_1$. La suite $(Tx_n)_n$ est aussi de Cauchy dans F complet donc converge vers un certain $y \in F$. Or $(x_n, Tx_n)_n \in G(T)$ fermé, donc $y = Tx$ et $(E, \|x\|_2)$ est complet.

Exercice 12

On utilise le théorème du graphe fermé (voir l'exercice ?? page ??). Montrons que le graphe de T , noté $G(T)$, est fermé. Soit $(x_n, Tx_n)_n \in G(T)$ telle que $x_n \rightarrow x$ et $Tx_n \rightarrow y$, a-t'on $y = Tx$?

Soit $f \in F'$, comme $f \circ T \in E'$, on a d'une part $f(Tx_n) \rightarrow f(Tx)$ et $f(Tx_n) \rightarrow f(y)$ donc $f(Tx) = f(y)$ et ceci $\forall f \in F'$, nécessairement $Tx = y$ sinon par Hahn-Banach, on pourrait séparer strictement Tx et y par un hyperplan fermé, c'est à dire il existerait $f \in F', f \neq 0$, telle que $f(Tx) \neq f(y)$.

Exercice 13

1) Pour $y \neq x_0, \Lambda_y \in E'$ et $\|\Lambda_y\| \leq \frac{2}{|y-x_0|} \|f\|_\infty$. Soit $f \in F$ alors $|\Lambda_y(f)| < \infty, \forall y \neq x_0$ car $y \mapsto \Lambda_y(f)$ est continue sur $[0, 1]$. Comme F est un Banach, on peut appliquer Banach-Steinhaus et $\exists M > 0$ tel que $\forall f \in F, \forall y \neq x_0, |\Lambda_y(f)| \leq M \|f\|$.

2) En particulier si $f \in B_F, |\Lambda_y(f)| \leq M, \forall y \neq x_0$. Donc $|f(y) - f(x_0)| \leq M|y - x_0|, \forall y$ et $\forall f \in B_F$. Ce qui montre que B_F est équicontinue.

Soit $B_F(x) = \{f(x), f \in B_F\}$. Pour pouvoir appliquer Ascoli, il reste à vérifier que $\forall x \in [0, 1], \overline{B_F(x)}$ est compact dans \mathbb{R} , ce qui est immédiat puisque $B_F(x) \subset [-1, 1]$. D'où B_F est compact et par suite F est de dimension finie.

Exercice 14

1) On pose $G = \overset{\circ}{\bigcup}_n F_n$ et on veut montrer que $\overset{\circ}{G} = \emptyset$. G est fermé donc complet et $\forall n, F_n \cap G$ est fermé et d'intérieur vide donc le Lemme de Baire montre que $\bigcup_n (F_n \cap G)$ est d'intérieur vide. Or, $\bigcup_n (F_n \cap G) = G \cap (\bigcup_n F_n) = G$, d'où $\overset{\circ}{G} = \emptyset$ et $\bigcup_{n \geq 1} \overset{\circ}{F}_n$ est dense (et ouvert comme union d'ouverts).

2) $\forall n, \delta, F_{n,\delta}$ est fermé comme intersection de fermés (f_i et f_j sont continues $\forall i, j$). Comme f_n converge simplement sur \mathbb{R} vers $f, \mathbb{R} = \bigcup F_{n,\delta}$. Donc la question précédente montre que $U_\delta = \bigcup_n \overset{\circ}{F}_{n,\delta}$ est un ouvert dense de \mathbb{R} . Le Lemme de Baire assure alors que $U = \bigcap_{k \geq 1} U_{\frac{1}{k}}$ est dense dans \mathbb{R} .

Soit $x_0 \in U$, montrons que f est continue en x_0 .

$x_0 \in U \implies \forall k \geq 1, \exists n$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{F}_{n, \frac{1}{k}}$ donc $\exists V_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V_1 \subset \overset{\circ}{F}_{n, \frac{1}{k}}$. En particulier $\forall x \in V_1, |f_i(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \forall i \geq n$. On fait tendre i vers $+\infty$, on obtient $\forall x \in V_1, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$. On écrit ensuite que f_n est continue en $x_0, \exists V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $\forall x \in V_2, |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{1}{k}$. Alors $\forall x \in V_1 \cap V_2,$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{3}{k}.$$

Donc on a montré que $\forall k \geq 1, \exists W (= V_1 \cap V_2) \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $\forall x \in W, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{3}{k}$, d'où f est continue sur U .

3) On pose $g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ alors $\forall n, g_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $g_n \rightarrow f'$ simplement sur \mathbb{R} . La question 2) montre alors que f' est continue sur une partie dense de \mathbb{R} .

Exercice 15

1) On note $a_x : y \mapsto a(x, y), a_y : x \mapsto a(x, y)$ et $B_E = \overline{B_E(0, 1)}$. Par hypothèse, la famille $\{a_x, x \in B_E\}$ vérifie :

$\forall x \in B_E, a_x \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\forall y \in F, \exists M_y > 0, \forall x \in B_E, \|a_x(y)\| \leq M_y$. Donc $\sup_{x \in B_E} \|a_x(y)\| \leq M_y < \infty, \forall y \in F$. On peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus et $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in B_E, \forall y \in F, \|a_x(y)\| \leq M\|y\|$. D'où la continuité de a .

2) Comme $|a(p, q)| \leq \|p\|_\infty \|q\|_1$ ou $\|q\|_\infty \|p\|_1, a$ est séparément continue.

Si a est continue, $\exists M > 0, \forall p, q, |\int_0^1 p(t)q(t)dt| \leq M \|p\|_1 \|q\|_1$. En choisissant par exemple dans cette inégalité, $p(x) = x^n$ et $q = p'$, on obtient $\frac{1}{2} \leq \frac{M}{n+1}$, ce qui est absurde pour n assez grand.

13.3 Chapitre 3

Exercice 1

***** BOSSE ROULANTE *****

Exercice 2

***** RIEMANN LEBESGUE *****

Exercice 3

Soient E l'espace de Banach de dimension finie en question et $E' = (f_i)_{i \in I}$ son dual topologique.

On note \overline{S}^w la fermeture de $S(0, 1) = \{x, \|x\| = 1\}$ pour la topologie faible et $\overline{B}(0, 1)$ la boule unité fermée pour la topologie forte. On va commencer par montrer que la boule ouverte (fort) $B(0, 1) \subset \overline{S}^w$. Soit $x_0 \in B(0, 1)$, les ensembles $V(x_0, J, \varepsilon) = \{y \in E, | \langle f_i, x_0 - y \rangle | < \varepsilon, \forall i \in J\}$ où $J \in P.F.I$ et $\varepsilon > 0$ constituent une base de voisinages (ouverts) faibles de x_0 dans E . Montrons que $V(x_0, J, \varepsilon) \cap S(0, 1) \neq \emptyset$.

On choisit $y_0 \in E, y_0 \neq 0$ tel que $\langle f_i, y_0 \rangle = 0$ pour tout i dans J (c'est possible sinon l'application $F : E \rightarrow \mathbb{R}^J$ définie par $F(x) = (f_i(x))_{i \in J}$ est linéaire et injective donc $\dim E < \infty$, c'est absurde). Alors pour tout $t \in \mathbb{R}, x_0 + ty_0 \in V(x_0, J, \varepsilon)$. On veut trouver t tel que $\|x_0 + ty_0\| = 1$. Posons $g(t) = \|x_0 + ty_0\|$ alors g est continue sur $\mathbb{R}, g(0) < 1$ et $g(t) \rightarrow +\infty$ quand t tend vers l'infini, donc il existe $t_0 > 0$ tel que $g(t_0) = 1$ et $x_0 + ty_0 \in S(0, 1) \cap V(x_0, J, \varepsilon)$. D'où $B(0, 1) \subset \overline{S}^w$.

On a donc $S(0, 1) \subset \overline{B}(0, 1) = B(0, 1) \cup S(0, 1) \subset \overline{S}^w$. Enfin $\overline{B}(0, 1)$ est un convexe fermé fort donc fermé faible, d'où $\overline{S}^w = \overline{B}(0, 1)$.

Exercice 4 ***** DEMI ESPACE COMPLEXE *****

Exercice 5

1) Montrons d'abord que si $\forall x \neq 0, \exists p$ semi-norme telle que $p(x) \neq 0$ alors (E, \mathcal{P}) est séparé. Soit donc $x \neq 0$, et p telle que $p(x) \neq 0$ alors si $r = \frac{1}{2}p(x)$ on a $B(x, r) \cap B(0, r) = \emptyset$ et on sépare 0 et x . Si $x \neq y$, on peut écrire $y = x + z$ avec $z \neq 0$ et on a $B(x, r) \cap B(x + z, r) = \emptyset$. (la réciproque est vraie).

Utilisons ce critère, soit donc $x \neq 0$, par Hahn-Banach, $\exists f \in E'$, $f \neq 0$ telle que $f(x) > 0 = f(0)$ donc $p_f(x) \neq 0$ et la topologie faible est séparée.

2) Soit U un ouvert faible non vide, pour montrer qu'il est un ouvert fort, il faut montrer que $\forall x \in U$, $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Soit donc $x_0 \in U$ par hypothèse, $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists J \in P.F.I.$ tels que $V(x_0, J, \varepsilon) \subset U$. Cherchons r tel que $B(x_0, r) \subset V(x_0, J, \varepsilon)$. On a

$$| \langle f_i, x - x_0 \rangle | < \|f_i\| \|x - x_0\| \leq (\sup_J \|f_i\|) \|x - x_0\|.$$

Cela suggère de choisir $r < \frac{\varepsilon}{\sup_J \|f_i\|}$, ce qui donne le résultat. (Si $\forall i$, $f_i \equiv 0$, alors $E = V(x_0, J, \varepsilon)$ est bien un ouvert fort.)

3) Si $f \in (E_w)'$ alors $\forall U$ ouvert de \mathbb{R} , $f^{-1}(U)$ est un ouvert faible et la question précédente montre que $f \in E'$.

Si $f \in E'$, soit $x_0 \in E$, montrons que f est continue faiblement en x_0 , c'est à dire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que $x \in V \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Il est clair que $V = V(x_0, f, \varepsilon)$ convient.

4) On suppose $\dim E < \infty$. D'après la question 2), il reste à montrer que U ouvert fort est un ouvert faible. Soit $x_0 \in U$ supposé non vide, alors $\exists r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$. On va montrer que $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists J \in P.F.I.$ tels que $V(x_0, J, \varepsilon) \subset B(x_0, r)$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E telle que $\forall i$ $\|e_i\| = 1$. Tout x de E s'écrit $x = \sum_1^n x_i e_i$, soit $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_i$ alors $f_i \in E'$ et on a

$$\|x - x_0\| \leq \sum_1^n |x_i - x_{0i}| = \sum_1^n | \langle f_i, x - x_0 \rangle |.$$

D'où si $x \in V = V(x_0, \{1, \dots, n\}, \varepsilon)$ alors $\|x - x_0\| < n\varepsilon$, on choisit donc $\varepsilon \leq \frac{r}{n}$ et on a bien $V \subset B(x_0, r)$.

Exercice 6

On suppose que $\dim E = +\infty$ et que les applications

$$\begin{aligned} id : (E, \sigma(E, E')) &\rightarrow (E, d), \\ id : (E, d) &\rightarrow (E, \sigma(E, E')) \end{aligned}$$

sont continues.

1) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B_d(0, \frac{1}{k})$ est un voisinage de 0 pour d , donc $\exists V(0, I_k, \varepsilon_k) \subset B_d(0, \frac{1}{k})$ où $\varepsilon_k > 0$ et I_k est un ensemble fini d'indices. L'ensemble $\{f_j, j \in I_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ est dénombrable et constitue la suite cherchée.

2) L'ensemble $V = V(0, g, 1)$ est un voisinage de 0 pour la topologie faible, par hypothèse $\exists k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $B_d(0, \frac{1}{k_0}) \subset V$. Alors d'après 1),

$$\bigcap_{i \in I_{k_0}} \{x \in E : | \langle f_i, x \rangle | < \varepsilon_{k_0}\} \subset V.$$

On pose $I = I_{k_0}$ alors $\bigcap_{i \in I} \ker f_i \subset V$. Et $| \langle g, x \rangle | < 1$ sur un espace vectoriel,

donc nécessairement $g(x) = 0$, $\forall x \in \bigcap_{i \in I} \ker f_i$, par suite $\bigcap_{i \in I} \ker f_i \subset \ker g$.

3) Pour simplifier les notations, on notera $I = \{1, 2, \dots, k\}$, et soit

$$\begin{aligned} F : E &\longrightarrow \mathbb{R}^{k+1} \\ x &\longmapsto (g(x), f_1(x), \dots, f_k(x)). \end{aligned}$$

$\text{Im}F$ est convexe fermé (car vectoriel de dimension finie) et $e_1 = (1, 0 \dots 0) \notin \text{Im}F$ car $\bigcap_{i \in I} \ker f_i \subset \ker g$. D'après le théorème d'Hahn-Banach ??, $\exists h \in (\mathbb{R}^{k+1})'$, $h \neq 0$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $h(F(x)) < \alpha < h(e_1)$, $\forall x \in E$. Comme $\text{Im}F$ est vectoriel, on en déduit que $h(F(x)) = 0$, $\forall x \in E$ et comme $h \in (\mathbb{R}^{k+1})'$, $h \neq 0$, $\exists (\mu_0, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ tel que $h(x) = \sum_0^k \mu_i x_i$ si $x = (x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$.

D'où on obtient

$$\mu_0 g(x) + \sum_1^k \mu_i f_i(x) = 0 < \alpha < \mu_0, \quad \forall x \in E.$$

Donc $\mu_0 \neq 0$ et $g(x) = \sum(-\frac{\mu_i}{\mu_0})f_i(x)$ pour tout x . (On peut démontrer ce résultat par une preuve purement algébrique, par exemple un raisonnement par récurrence sur k .)

4) Soit $F_n = \text{vect}\{f_1, \dots, f_n\}$, d'après 2) et 3), $\forall g \in E'$, $\exists N$ tel que $g \in F_N$ donc $E' = \bigcup F_n$. Comme E' est complet, F_n fermé (car $\dim F_n < \infty$), on peut appliquer le lemme de Baire et $\exists n_0$ tel que $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Si $f \in \text{int}F_{n_0}$ alors $\exists r > 0$ tel que $B(f, r) \subset F_{n_0}$ par suite $E' = F_{n_0}$ car F_{n_0} est vectoriel et donc $\dim E' \leq n_0$.

5) On en conclut que $\dim E < \infty$, en effet soit

$$\begin{aligned} \Phi : E &\rightarrow \mathbb{R}^{n_0} \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_{n_0}(x)). \end{aligned}$$

Φ est linéaire et injective (car $\Phi(x) = 0 \implies \forall f \in E', f(x) = 0 \implies x = 0$ par Hahn-Banach) donc $\dim E \leq n_0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Exercice 7

Par l'exercice ?? page ??, si pour tout i , $\text{Re}(f_i(x)) = 0$, alors $f_i(x) = 0$ et $f(x) = 0$ par hypothèse, donc $\text{Re}(f(x)) = 0$. D'où

$$\bigcap_i \ker \text{Re}(f_i) \subset \ker \text{Re}(f).$$

Comme E peut être vu comme un espace vectoriel réel, on peut appliquer le résultat du 3) de l'exercice précédent donc, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\text{Re}(f) = \sum_i \lambda_i \text{Re}(f_i)$. De la formule ?? page ??, on en déduit que pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\text{Re}(f_j)(x) - i \text{Re}(f_j(ix))) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x).$$

Exercice 8

1) On montre que (1) \implies (2) \implies (3) \implies (1). Pour simplifier les notations on montrera que T est continue en 0, le lecteur se convaincra que la continuité de T en 0 implique la continuité de T partout.

(1) \implies (2) :

$\forall \Omega \in \mathcal{V}_w(0)$, existe-t'il $\omega \in \mathcal{V}_w(0)$ tel que $x \in \omega \implies Tx \in \Omega$? On peut toujours choisir $\Omega = \{y \in F : |\langle f_i, y \rangle| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n\}$ où $f_i \in F'$ et $\varepsilon > 0$. Maintenant,

$$\begin{aligned} Tx \in \Omega &\iff |\langle f_i, Tx \rangle| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n, \\ &\iff |\langle f_i \circ T, x \rangle| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Si $\omega = \{x \in E : |\langle f_i \circ T, x \rangle| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n\}$ où $f_i \circ T \in E'$, alors ω est bien un voisinage faible de 0 donc (2).

(2) \implies (3) :

$\forall \Omega \in \mathcal{V}_w(0)$, existe-t'il $r > 0$ tel que $x \in B(x, r) \implies Tx \in \Omega$?

On sait par hypothèse qu'il existe un voisinage faible de 0, ω , tel que $x \in \omega \implies Tx \in \Omega$ et on a vu dans l'exercice 1 ci-dessus, qu'un ouvert faible est un ouvert fort donc (3).

(3) \implies (1) :

On utilise le théorème du graphe fermé (voir l'exercice ?? page ??), soit $(x_n, y_n)_n \in G(T) = \{(x, y) \in E \times F, y = Tx\}$ telle que $x_n \rightarrow x$ et $y_n = Tx_n \rightarrow y$, a-t'on $y = Tx$?

Comme T est continue de E fort dans F faible, $Tx_n \rightarrow Tx$ et d'autre part la convergence forte impliquant la convergence faible $Tx_n \rightarrow y$, donc nécessairement $y = Tx$. D'où le graphe de T est fermé et T est continue (pour les topologies fortes).

2) Soit $T : E_w \rightarrow F$ linéaire continue. La continuité en 0 implique que $\exists \varepsilon > 0, \exists f_1, \dots, f_n \in E'$ tels que

$$|\langle f_i, x \rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n \implies \|Tx\|_F < 1.$$

Alors $\bigcap_i \ker f_i \subset \ker T$. On va montrer que $\dim(\text{Im} T) \leq n$. Soit $y_1 = Tx_1, \dots, y_{n+1} = Tx_{n+1} \in \text{Im} T$, existe-t'il $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ non tous nuls tels que $\sum_1^{n+1} \lambda_k Tx_k = 0$?

Ou encore tels que $T(\sum_1^{n+1} \lambda_k x_k) = 0$? On remarque que si il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$

non tous nuls tels que $\sum_1^{n+1} \lambda_k x_k \in \bigcap_i \ker f_i$, c'est fini. Donc on veut

$$\sum_1^{n+1} \lambda_k \langle f_i, x_k \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

C'est un système linéaire de n équations à $n + 1$ inconnues dont on sait qu'il existe des solutions non triviales, d'où le résultat.

Exercice 9

1) $\|x^N - x\|_1 =$ reste d'une série convergente.

2) f est linéaire et $|f(x)| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1$ donc $f \in (\ell^1)'$.

a) On a montré que $\|\Lambda_y\| \leq \|y\|_\infty$. On a $\Lambda_y(e^N) = y_N$ donc $\|\Lambda\| \geq \|y\|_\infty$, d'où Λ est une isométrie.

b) Λ est injective car isométrique. Montrons qu'elle est surjective. Soit $\ell \in (\ell^1)'$ alors par linéarité et continuité de ℓ , on a $\langle \ell, x \rangle = \sum_1^\infty x_n y_n$ si $x = (x_n)_n \in \ell^1$

et $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in \ell^1, |\langle \ell, x \rangle| \leq M \|x\|_1$. En particulier pour $x = e^n$, on obtient $|\langle \ell, e^n \rangle| = |y_n| \leq M$ et $y \in \ell^\infty$. Donc $\ell = \Lambda_y$ et Λ est bijective. Par l'exercice ?? page ??, on conclut que Λ est un isomorphisme d'espaces de Banach.

3) Soit $(x^n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de ℓ^1 telle que $x^n \rightarrow 0$ dans ℓ^1 faible $\iff \forall y \in \ell^\infty \langle y, x^n \rangle \rightarrow \langle y, 0 \rangle = 0 \iff \sum_1^\infty x_i^n y_i \rightarrow 0, \forall y = (y_i)_i \in \ell^\infty$.

4) Soit $(x^n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de ℓ^1 telle que $x^n \rightarrow 0$ dans ℓ^1 faible.

a) On montre facilement que d est une distance sur K .

b) On veut montrer que $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists y^1, \dots, y^n \in \ell^1$ tels que

$$V = \{g \in K : |\langle g - f, y^i \rangle| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n\} \subset \Omega.$$

On a

$$d(f, g) = \sum_1^n \frac{1}{2^i} |f_i - g_i| + \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{2^i} |f_i - g_i| \text{ et } \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{2^i} |f_i - g_i| \leq 2 \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

pour $f, g \in K$. Soient donc ε et n tels que $\varepsilon + \frac{1}{2^{n-1}} < r$ et $y^i = e^i$ pour $1 \leq i \leq n$, alors

$$\sum_1^n \frac{1}{2^i} |f_i - g_i| = \sum_1^n \frac{1}{2^i} |\langle f - g, e^i \rangle| \leq \varepsilon \sum_1^n \frac{1}{2^i} \leq \varepsilon,$$

si $g \in V$. D'où $d(f, g) \leq \varepsilon + \frac{1}{2^{n-1}} < r, \forall g \in V$ donc $V \subset \Omega$.

c) La question précédente montre que l'application $id : (K, \sigma(\ell^\infty, \ell^1)) \rightarrow (K, d)$ est continue. Or K est compacte faible \star , donc (K, d) est compact.

d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $A_n = \{f \in \ell^\infty : |\langle f, x^n \rangle| \leq \varepsilon\}$ alors A_n est fermé faible \star , et $F_k = K \cap \bigcap_{n \geq k} A_n$ est aussi fermé faible \star dans K compact

donc F_k est compact faible \star . Son image par $id : (K, \sigma(\ell^\infty, \ell^1)) \rightarrow (K, d)$ (qui est continue) est compacte donc fermée dans (K, d) .

$K = \bigcup_k F_k$ car $\langle f, x^n \rangle \rightarrow 0, \forall f \in \ell^\infty$. Enfin, (K, d) métrique compact est complet, on peut donc appliquer le lemme de Baire : il existe k_0 tel que $\text{Int} F_{k_0} \neq \emptyset$. Donc il existe $f_0 \in K, \exists \rho > 0$ tels que $K \cap B_d(f_0, \rho) \subset F_{k_0}$.

e) En choisissant f comme dans l'énoncé, on a,

$$d(f, f^0) \leq 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{N-1}} < \rho.$$

Donc $f \in F_{k_0}$ et

$$|\langle f, x^n \rangle| = \left| \sum_1^N f_0^i x_i^n + \sum_{i=N+1}^{\infty} (\pm x_i^n) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq k_0.$$

\Rightarrow

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i^n| \leq \varepsilon + \sum_1^N |f_0^i x_i^n| \leq \varepsilon + \sum_1^N |x_i^n|,$$

car $f^0 \in K$, d'où

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n| \leq \varepsilon + 2 \sum_1^N |x_i^n|, \quad \forall n \geq k_0.$$

f) i étant fixé, $x_i^n \rightarrow 0$ car $x_i^n = \langle e^i, x^n \rangle$, donc $\exists I$ tel que $\forall n \geq I, |x_i^n| \leq \frac{\varepsilon}{2^N}$. Dès que $n \geq \max(k_0, I)$, on a $\|x^n\|_1 \leq 2\varepsilon$ d'où $x^n \rightarrow 0$ dans ℓ^1 .

5) Comme ℓ^1 n'est pas de dimension finie, les topologies faibles et fortes ne sont pas équivalentes et cette application ne peut donc pas être continue.

Exercice 10

Comme A est ouvert faible \star , A est ouvert fort de E' donc par le théorème de Hahn-Banach première forme géométrique, $\exists \xi \in E'', \xi \neq 0$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle \xi, f \rangle \leq \alpha \leq \langle \xi, g \rangle \quad \forall f \in A, \forall g \in B.$$

Soit $f_0 \in A$ ouvert faible \star alors $\exists V$ voisinage faible \star de f_0 tel que $V \subset A$. On peut toujours supposer que $V = \{g \in E' : |\langle g - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, \forall i = 1, N\}$ où $\varepsilon > 0$ et $x_1, \dots, x_N \in E$.

Si $g = f_0 + u$ où $u \in \bigcap_{1 \leq i \leq N} \ker J(x_i)$ alors $g \in V \subset A$ donc $\langle \xi, u \rangle \leq$

$\alpha + \langle \xi, f_0 \rangle$ et ceci $\forall u \in \bigcap_{1 \leq i \leq N} \ker J(x_i)$ vectoriel. D'où $\langle \xi, u \rangle = 0$ et

$\bigcap_{1 \leq i \leq N} \ker J(x_i) \subset \ker \xi$. Par un même raisonnement qu'à l'exercice 2 chap. IV,

on en déduit que $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tels que $\xi = \sum_1^N \lambda_i J(x_i) = J(\sum_1^N \lambda_i x_i)$. D'où

$$x = \sum_1^N \lambda_i x_i \text{ convient } (x \neq 0 \text{ car } \xi \neq 0).$$

13.4 Chapitre 4

Exercice 1

***** FNS SCI *****

Exercice 2

En ce qui concerne A , on raisonne comme dans l'exercice ?? page ??, $A^{\perp\perp}$ est fermé et contient $\overline{\text{vect}(A)}$. Si il existe $x \in A^{\perp\perp}$ qui n'est pas dans $\overline{\text{vect}(A)}$, on sépare $\{x\}$ et $\overline{\text{vect}(A)}$ par un hyperplan fermé et on conclut comme dans l'exercice ?? du chapitre 2.

De même pour B , $B^{\perp\perp}$ est fermé et contient $\overline{\text{vect}(B)}$. Si il existe $f_0 \in B^{\perp\perp}$ qui n'est pas dans $\overline{\text{vect}(B)}$, par le théorème d'Hahn-Banach version fermé-compact, il existe $\xi \in E''$, non identiquement nulle, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\langle \xi, f_0 \rangle < \alpha < \langle \xi, f \rangle$ pour tout $f \in \overline{\text{vect}(B)}$. Comme $\overline{\text{vect}(B)}$ est vectoriel, on en déduit que $\langle \xi, f \rangle = 0$ pour tout $f \in \overline{\text{vect}(B)}$ et $\alpha < 0$. Si E est réflexif, $\exists x_0 \in E$ tel que $\langle \xi, f \rangle = \langle f, x_0 \rangle$ pour tout $f \in E'$, alors $\langle f, x_0 \rangle = 0$ pour tout $f \in B$ donc $x_0 \in B^\perp$ et $\langle f_0, x_0 \rangle = 0 < \alpha$ ce qui est absurde.

Exercice 3

$E \subset (E'_{w\star})'$:

Soit $x \in E$ alors $V = \{f \in E' : |\langle f, x \rangle| < \varepsilon\}$ est un voisinage faible- \star de 0 dans E' . Donc $f \mapsto \langle f, x \rangle$ est continue sur $E'_{w\star}$, d'où $x \cong J(x) \in (E'_{w\star})'$.

$(E'_{w\star})' \subset E$:

Soit $\varphi \in (E'_{w\star})'$ et soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists \Omega$ voisinage faible- \star de 0 dans E' tel que

$$f \in \Omega \implies |\langle \varphi, f \rangle| < \varepsilon.$$

On peut toujours choisir $\Omega = \{g \in E' : |\langle g, x_i \rangle| < \beta, i = 1, \dots, n\}$ où $\beta > 0$ et pour $i = 1, \dots, n, x_i \in E$. Mais $J(x_i) \in E''$ et

$$|\langle J(x_i), g \rangle| < \beta, \forall i = 1, \dots, n \implies |\langle \varphi, g \rangle| < \varepsilon.$$

Donc $g \in \bigcap_i \ker J(x_i) \implies |\langle \varphi, g \rangle| < \varepsilon$, d'où $\bigcap_i \ker J(x_i) \subset \ker \varphi$. D'après l'exercice 2, question 3), $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi = \sum_1^n \lambda_i J(x_i) = J(\sum_1^n \lambda_i x_i)$.

Soit $x = \sum_1^n \lambda_i x_i \in E$ alors $\varphi = J(x)$, d'où le résultat.

Exercice 4

Soit $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = x_n$ si $x = (x_n)_n$. Alors $f_n \in E'$ et $\|f_n\| = 1$. S'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{n_k}$ qui converge vers un f dans E'_{w^*} alors $\forall x \in E$, $\langle f_{n_k}, x \rangle = x_{n_k} \rightarrow \langle f, x \rangle$ quand k tend vers $+\infty$. Donc en fait il s'agit de trouver une suite de réels qui ne converge pas...c'est facile. Par exemple, soit $x = (x_n)_n$ tel que $x_{n_k} = (-1)^k$ et $x_n = 0$ ailleurs, alors $x \in \ell^\infty$ et $\langle f_{n_k}, x \rangle = (-1)^k$ ne converge pas. Donc il n'existe pas de sous-suites faiblement- \star convergentes bien que $(f_n)_n$ soit dans un compact faible- \star . Mais ce compact n'est pas métrisable, on peut en conclure par exemple que ℓ^∞ n'est pas séparable ni réflexif. En effet, ℓ^1 est séparable et si ℓ^∞ était réflexif, il serait donc aussi séparable.

Exercice 5

1) $K \subset \bigcup_{n>0} B(0, n)$ et K compact $\implies \exists N$ tel que $K \subset B(0, N)$.

2) $\forall x \in B_E$, Tx est dans un compact donc $\exists N$ tel que $Tx \in B(0, N) \implies \|Tx\| \leq N$.

3) Soit $(x_n)_n \in E$ telle que x_n converge faiblement vers $x \in E$, alors $\|x_n\|$ est bornée car E est un Banach et donc $\exists R > 0$ tel que $\forall n, x_n \in \overline{B}(0, R)$. Comme T est compacte, $(Tx_n)_n$ est dans un compact fort et il existe une sous-suite $(Tx_{n_k})_k$ qui converge fortement vers $y \in F$. D'autre part T est linéaire continue donc continue de E faible dans F faible et $Tx_{n_k} \rightarrow Tx$ d'où $y = Tx$. Tx est la seule valeur d'adhérence de la suite $(Tx_n)_n$ donc toute la suite converge vers Tx d'où (\star) .

4) Montrons que $T(B_E)$ est fermé. Soit $y_n = Tx_n \in T(B_E)$, on suppose que $Tx_n \rightarrow y$, a-t-on $y = Tx$ où $x \in B_E$?

Comme E est réflexif et que $\|x_n\| \leq 1, \forall n$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} \rightarrow x$. Alors $(\star) \implies Tx_{n_k} \rightarrow Tx$ donc $y = Tx$ et $\|x\| \leq \liminf \|x_{n_k}\| \leq 1$ et $T(B_E)$ est fermé.

Soit encore $y_n = Tx_n \in T(B_E)$, alors E réflexif $\implies x_{n_k} \rightarrow x$ et $Tx_{n_k} \rightarrow Tx$ donc Tx est valeur d'adhérence de $(y_n)_n$ et $T(B_E)$ est compact.

5) Soit $B = \{x \in \ker(Id - T) : \|x\| \leq 1\}$. Soit $(x_n)_n \in B$ alors de $\|x_n\| \leq 1$ et T compact, on déduit qu'il existe une sous-suite $x_{n_k} = Tx_{n_k}$ qui converge vers y . Il est clair que $y \in B$ donc B est compact et $\dim(\ker(Id - T)) < \infty$.

Exercice 6

On définit $J : E \rightarrow E''$ par $J(x) = J_x$ avec

$$\langle J_x, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E} \quad \forall x \in E, \forall f \in E'.$$

On a $\|J_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|$ par Hahn-Banach, donc J est linéaire isométrique.

Ici, E est réflexif donc J est surjective c'est-à-dire $J(E) = E''$.

Si $f \in E'$ alors $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|$ car J est isométrique et surjective.

Par Hahn-Banach, $\sup_{\|\xi\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle| = \max_{\|\xi\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|$ et donc $\exists x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| \leq 1$ et $\|f\| = |\langle f, x_0 \rangle|$.

Exercice 7

On peut vérifier facilement que si φ_n converge faiblement vers φ alors elle converge simplement sur $[0, 1]$ vers φ et donc nécessairement $\varphi(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$, donc φ n'est pas continue, ce qui est impossible. On peut en conclure que E n'est pas réflexif.

Exercice 8

1) $B_d(0, \frac{1}{n})$ est un voisinage de 0 dans $(B_{E'}, d)$. Par équivalence des topologies, $\exists V_n$ voisinage faible \star de 0 tel que $V_n \subset B_d(0, \frac{1}{n})$. On peut supposer que

$$V_n = \bigcap_{i \in I_n} \{f \in B_{E'} : | \langle f, x_i \rangle | < \varepsilon_n \},$$

où $\varepsilon_n > 0$, I_n est une partie finie de \mathbb{N}^* et $x_i \in E$. L'ensemble $\{x_i, i \in I_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ constitue une suite dénombrable de points de E .

2) Si $x \in X$, $\exists n$ tel que $x \in X_n$ donc $x = \sum_1^n \lambda_i x_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Comme \mathbb{Q} est

dense dans \mathbb{R} , pour $\varepsilon > 0$, $\exists r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ tels que $|r_i - \lambda_i| \leq \varepsilon$. Si $y = \sum_1^n r_i x_i$

alors $y \in Y_n \subset Y$ et on a $\|x - y\| \leq \varepsilon \sum_1^n \|x_i\|$. Donc on a montré que $\forall V \in \mathcal{V}(x)$,

$V \cap Y \neq \emptyset$. D'où $X \subset \bar{Y}$.

3) Si $\bar{X} \neq E$, $\exists x_0 \in E \setminus \bar{X}$ et par Hahn-Banach, $\exists f \in E'$, $f \neq 0$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, tels que $\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle$, $\forall x \in \bar{X}$. Comme X est vectoriel, on en déduit que $f \equiv 0$ sur X . On peut supposer que $\|f\| = 1$, alors $f \in V_n, \forall n$ donc $f \in B_d(0, \frac{1}{n}), \forall n$ d'où $f \equiv 0$ et c'est absurde.

13.5 Chapitre 5

Exercice 1

Il suffit d'appliquer le théorème de convergence monotone à la suite croissante

des sommes partielles $\sum_0^k u_n$.

Exercice 2

On écrit $f = f^+ - f^- = g^+ - h^+$ car g et h sont positives, donc $f^+ + h^+ = g^+ + f^-$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale, voir la propriété ?? page ??, on déduit que $\int f^+ + \int h^+ = \int g^+ + \int f^-$. Par définition, $\int f = \int f^+ - \int f^-$, d'où $\int f = \int g^+ - \int h^+ = \int g - \int h$.

Exercice 3

*****Norme L1 *****

Exercice 4

Pour obtenir E , on a enlevé à $[0, 1]$, un ensemble de mesure $\ell_1 + 2\ell_2 + \dots + 2^n \ell_{n+1} + \dots$. Donc $|E| = 1 - \sum_0^{+\infty} 2^n \ell_{n+1}$. Maintenant si $\ell_n = (\frac{1}{3})^n$, $|E| =$

$$1 - \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - 1 = 0.$$

Si, par exemple, on prend $\ell_n = (\frac{1}{4})^n$, $|E| = 1 - \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} > 0$.

Exercice 5

1) On pose $h_j(x) = j$ si $x \in A$ et $h_j(x) = 0$ sinon. La suite $(h_j)_j$ est positive, croissante et converge p.p. vers h . On peut donc lui appliquer le théorème de convergence monotone. Et, on obtient $\lim_j \int_{\mathbb{R}^N} h_j = \int_{\mathbb{R}^N} h$.

Or, $\int_{\mathbb{R}^N} h_j = \int_A h_j = j|A|$. Si $|A| = 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} h_j = 0$ pour tout j et $\int_{\mathbb{R}^N} h = 0$. Si $|A| > 0$, $\lim_j \int_{\mathbb{R}^N} h_j = +\infty = \int_{\mathbb{R}^N} h$.

2) Si f positive est sommable, on pose $A = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = +\infty\}$ et on définit h comme en 1). Alors $\int_{\mathbb{R}^N} h = \int_A h = \int_A f < +\infty$ car f est sommable. Donc nécessairement $|A| = 0$.

Exercice 6

Comme $[-k, k]$ est un compact, la fonction f considérée est uniformément continue sur $[-k, k]$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x - y| \leq \frac{1}{n}$, $x, y \in [-k, k] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4k}$. On recouvre $[-k, k]$ par n intervalles consécutifs de longueur $\frac{2k}{n}$. On vérifie aisément que les $2n$ rectangles $[l\frac{1}{n}, (l+1)\frac{1}{n}] \times [f((l+\frac{1}{2})\frac{k}{n}) - \frac{\varepsilon}{4k}, f((l+\frac{1}{2})\frac{k}{n}) + \frac{\varepsilon}{4k}]$, $l = -n, -(n-1), \dots, n-1$ recouvrent le graphe de f sur $[-k, k]$. Donc la mesure de ce graphe est plus petite que $2n\frac{2k}{n}\frac{\varepsilon}{4k} = \varepsilon$.

Solution plus élégante : Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = y - f(x)$. Alors $\varphi^{-1}(0) = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ et par le théorème de Fubini-Tonnelli,

$$\lambda(\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y=f(x)}(x, y) dy \right) dx = 0$$

car les singletons sont de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 7

Comme les boules sont de mesure strictement positive, on déduit que $f(x) = g(x)$ sur un ensemble dense de \mathbb{R}^N , et, par continuité, partout.

Exercice 8

Appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite $(f\mathbb{1}_{A_n})_n$.

Exercice 9

Notons $[h \leq M]$ l'ensemble $\{x, h(x) \leq M\}$. On écrit

$$\begin{aligned} \int_{A_n} h(x) &\leq \int_{A_n \cap [h(x) \leq M]} h(x) dx + \int_{A_n \cap [h(x) > M]} h(x) dx \\ &\leq M\lambda(A_n) + \int_{[h(x) > M]} h(x) dx. \end{aligned}$$

Par le théorème de la convergence dominée, on a $\int_{[h(x) > M]} h(x) dx \rightarrow 0$. En effet, $h(x)\mathbb{1}_{[h(x) > M]}$ tend vers zéro presque partout car $\lambda([h = +\infty]) = 0$ (Exercice ??) et $|h(x)|$ est chapeau intégrable. On peut donc fixer pour tout $\varepsilon > 0$, M tel que $\int_{[h(x) > M]} h(x) dx < \varepsilon$. On choisit ensuite n suffisamment grand pour que $M\lambda(A_n) < \varepsilon$ et on déduit alors de (5.1), $\int_{A_n} h(x) dx < 2\varepsilon$.

Exercice 10

On sait que $f_n(x) \rightarrow \sum_0^\infty (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ pour tout $0 \leq x < 1$. Par ailleurs, la série étant alternée, $f_0(x) = 1$ est "chapeau intégrable" pour $f_n(x) \geq 0$ sur $[0, 1]$. Par le théorème de Lebesgue, on déduit que $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x}$ dans $L^1(0, 1)$, ce qui implique que $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \text{Log}2$. En intégrant terme à terme, on obtient $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \text{Log}2$.

Exercice 11

En posant $y = nx$, on a $n \int_1^\infty f(nx)dx = \int_n^\infty f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n, +\infty[}(y)f(y)dy$. La fonction $f(y)\mathbb{1}_{[n, \infty[}(y)$ tend ponctuellement vers zéro quand $n \rightarrow \infty$ et $|f|$ en est chapeau intégrable. Donc par le théorème de Lebesgue, l'intégrale considérée tend vers zéro.

Exercice 12

Prendre par exemple $f_n(x) = 1$ si $n \leq x \leq n+1$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

Exercice 13

• On pose $f_n(x) = n$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Alors $f_n(x)$ tend vers 0 pour tout $x \in]0, 1]$. Par contre, $\int f_n = 1$ et donc f_n ne tend pas vers 0 dans L^1 .

• On considère la suite de fonctions f_n définies sur $[0, 1]$ par

$$f_1 = 1 \text{ sur } [0, 1]$$

$$f_2 = 1 \text{ sur } [0, \frac{1}{2}], 0 \text{ ailleurs}$$

$$f_3 = 1 \text{ sur } [\frac{1}{2}, 1], 0 \text{ ailleurs}$$

$$f_4 = 1 \text{ sur } [0, \frac{1}{4}], 0 \text{ ailleurs}$$

$$f_5 = 1 \text{ sur } [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], 0 \text{ ailleurs}$$

$$f_6 = 1 \text{ sur } [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], 0 \text{ ailleurs...}$$

La formule générale est :

$$\text{Si } 2^{k-1} \leq n < 2^k, \text{ alors } f_n = 1 \text{ sur } [\frac{n-2^{k-1}}{2^{k-1}}, \frac{n+1-2^{k-1}}{2^{k-1}}] = [\frac{n}{2^{k-1}} - 1, \frac{n+1}{2^{k-1}} - 1].$$

Cette suite de fonctions est une "bosse roulante" dont la largeur tend vers zéro, mais qui balaye constamment l'intervalle $[0, 1]$. Elle est positive et son intégrale tend vers zéro. Donc $f_n \rightarrow 0$ dans L^1 . Par contre, $f_n(x)$ ne tend jamais vers 0. En effet, si x est un point de $[0, 1]$, on peut poser par division euclidienne $x = \frac{N}{2^{k-1}} + r$, avec $N < 2^{k-1}$ et $r < \frac{1}{2^{k-1}}$. Posons $n = N + 2^{k-1}$, ce qui permet d'écrire x sous la forme $x = \frac{n-2^{k-1}}{2^{k-1}} + r$. On voit que $f_n(x) = 1$, alors que $f_{n+2}(x) = 0$ par exemple. Donc $f_n(x)$ ne converge nulle part !

Exercice 14

On pose $x = (x_1, \dots, x_N)$ et

$$m(r) = \lambda(\{x \in E, x_1 \leq r\}) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\{x, x_1 \leq r\}} dx.$$

Une application immédiate du théorème de Lebesgue montre que m est une fonction continue. Toujours par le même théorème, on montre que $m(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow -\infty$ et $m(r) \rightarrow \lambda(E)$ quand $r \rightarrow +\infty$. (Dans tous les cas, on utilise tout bonnement la fonction $\mathbb{1}_E$ comme chapeau intégrable). Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $m(r)$, il existe donc pour tout $0 < a < \lambda(E)$ un réel r tel que $m(r) = a$.

Exercice 15

Comme $w_n \geq 0$, on a $0 \leq (w - w_n)^+ \leq w \in L^1$ et donc par le théorème de Lebesgue $\int (w - w_n)^+ \rightarrow 0$. On déduit de la relation $\int (w - w_n)^+ - \int (w - w_n)^- = \int w - w_n \rightarrow 0$ que $\int (w - w_n)^-$ tend aussi vers zéro et finalement que la somme des deux mêmes intégrales $\int |w - w_n| = \int (w - w_n)^+ + \int (w - w_n)^-$ tend vers zéro.

Exercice 16

On applique le critère d'intégration avec par exemple $\varepsilon = 1$. Il existe donc η tel que $\lambda(K) \leq \eta \Rightarrow \int_K |f| \leq 1$. Comme B est borné, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de mesure inférieure à η , B_1, \dots, B_k . On a donc

$\int_B |f| \leq \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |f| \leq k$, ce qui prouve que $f \in L^1(B)$.

Réciproquement, soit $f \in L^1(B)$ et supposons par contradiction qu'il existe ε et une suite K_n de sous-ensembles de B tels que $\int_{K_n} f \geq \varepsilon$ et $\lambda(K_n) \rightarrow 0$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lambda(K_n) \leq \frac{1}{2^n}$. On pose $J_n = \cup_{k=n+1}^{\infty} K_k$. Donc $\text{mes}(J_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}$. La suite g_n des fonctions caractéristiques des J_n est une suite décroissante de fonctions positives dont l'intégrale tend vers zéro. Elle converge donc presque partout vers zéro. Revenant à f , on a $\int_{J_n} |f| = \int_B g_n(x)|f(x)|dx$. Comme $g_n(x)|f(x)|$ tend presque partout vers zéro et que $|f|$ est chapeau intégrable, on conclut que $\int_{J_n} |f| \rightarrow 0$, ce qui contredit le fait que $\int_{J_n} |f| \geq \varepsilon$.

Exercice 17

1) Si $f_n \rightarrow f$ dans L^1 , alors elle est de Cauchy et vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m \geq N, \|f_n - f_m\|_1 \leq \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_1$ tel que $\forall n, m \geq n_1, \|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2}$.

Ensuite, pour $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, $\exists n_2 > n_1$ tel que $\forall n, m \geq n_2, \|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2^2}$ et $\|f_{n_2} - f_{n_1}\|_1 \leq \frac{1}{2}$. Et on recommence, etc... Il existe donc une suite $(n_k)_k$ strictement croissante telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$.

2) On pose $G_N(x) = \sum_{k=1}^N |g_k(x)|$. On a $\int G_N = \sum_{k=1}^N \|g_k\|_1 \leq \sum_{k=1}^N 2^{-k} = 1$. La suite $(G_N)_N$ est positive et croissante donc la série $G(x)$ est positive et converge partout (éventuellement vers l'infini). Par le théorème de convergence monotone, $\int G(x)dx = \sum_k \int |g_k(x)|dx = \sum_k \|g_k\|_1 \leq 1$. D'où $G \in L^1$ et on déduit que la série de réels $G(x) = \sum_k |g_k(x)|$ est finie p.p. et converge pour presque tout x . Il en est donc de même pour la série $g(x) = \sum_k g_k(x)$. Comme $f_{n_{k+1}} = f_{n_1} + \sum_1^k g_i$, on en déduit que $(f_{n_k})_k$ converge p.p. vers $g + f_{n_1}$.

3) La série $\sum_k g_k(x)$ a G pour chapeau intégrable donc $|f_{n_1}| + G$ est un chapeau intégrable pour la suite $(f_{n_k})_k$. Par le théorème de Lebesgue, elle converge vers $g + f_{n_1}$ dans L^1 . Par unicité de la limite, on en déduit que $f = g + f_{n_1}$ p.p.

Remarque : Adaptation à la démonstration de complétude de L^1 : Si f_n est une suite de Cauchy dans L^1 , on peut définir g_k comme précédemment et appliquer exactement le même raisonnement pour prouver que la série $\sum_k g_k(x)$ converge pour presque tout x et a donc une limite ponctuelle $g(x)$. On déduit alors du théorème de Lebesgue que $(f_{n_k})_k$ converge vers $f = g + f_{n_1}$ dans L^1 . Il est alors immédiat (inégalité triangulaire) que toute la suite $(f_n)_n$ converge vers f .

Exercice 18

Notons $\mathbb{1}_{[0,n]}$ la fonction caractéristique de $[0, n]$, qui vaut 1 si $x \in [0, n]$ et 0 ailleurs. Alors

$$\Gamma_n = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) dx.$$

On calcule la limite ponctuelle de l'intégrand :

Comme $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \log(1 - \frac{x}{n})} \rightarrow e^{-x}$ quand $n \rightarrow +\infty$, on voit que l'intégrand tend vers $e^{-\frac{x}{2}}$.

Reste à trouver un chapeau intégrable. On sait que $1 + x \leq e^x$, on en déduit que $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$ pour tout $x \geq 0$. On conclut par le théorème de Lebesgue que $\Gamma_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2$.

Exercice 19

On a

$$\alpha \int_{\{|f(x)| \geq \alpha\}} dx \leq \int_{\{|f(x)| \geq \alpha\}} |f(x)| dx = \int \chi_{\{|f(x)| \geq \alpha\}}(x) |f(x)| dx.$$

On remarque que $\mathbb{1}_{\{|f(x)| \geq \alpha\}} f(x) \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$, presque partout, et que $|\mathbb{1}_{\{|f(x)| \geq \alpha\}} f(x)| \leq |f(x)|$ qui est donc chapeau intégrable. Par le théorème de Lebesgue, on a donc

$$\int_{\{|f(x)| \geq \alpha\}} |f(x)| dx \rightarrow 0$$

Exercice 20

On a pour $t > 0$,

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{f(x) + t^2} + \sqrt{f(x)}} dx = \int_0^1 k_t(x) dx.$$

On voit que $k_t(x) = 1$ si $f(x) = 0$ et $k_t(x) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ si $f(x) \neq 0$. Donc $k_t(x) \rightarrow \mathbb{1}_{\{f(x)=0\}}$, la fonction caractéristique de l'ensemble des points où $f(x)$ s'annule. Ceci nous donne la limite ponctuelle. Cherchons un chapeau intégrable. On voit immédiatement que $|k_t(x)| \leq 1$. Donc, par le théorème de Lebesgue, $k_t \rightarrow \mathbb{1}_{\{f(x)=0\}}$ quand $t \rightarrow 0$ dans $L^1(0,1)$. D'où $\varphi'(0^+) = \int \mathbb{1}_{\{f(x)=0\}} = \lambda(\{x, f(x) = 0\})$.

Exercice 21

Par le théorème de la convergence monotone, on a

$$\int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+n)| dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx.$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)|$ converge donc pour presque tout x et il en est de même pour la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$. Celle-ci a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)|$ comme chapeau intégrable. Par le théorème de Lebesgue, elle est donc convergente dans L^1 et on obtient la formule demandée.

Exercice 22

1) $\forall t > 0, x \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} et pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto e^{-t} t^{x-1} \in L^1(]0, +\infty[)$. Enfin, $\forall [a, b] \subset]0, +\infty[$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a,

$$|e^{-t} t^{x-1}| \leq \mathbb{1}_{(0,1)} e^{-t} t^{a-1} + \mathbb{1}_{(1,+\infty)} e^{-t} t^{b-1} \in L^1(0, +\infty).$$

Par le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, on conclut que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

$\forall k, \frac{\partial}{\partial x^k} (e^{-t} t^{x-1}) = e^{-t} (\log t)^k t^{x-1}$ et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^k} (e^{-t} t^{x-1}) \right| \leq \mathbb{1}_{(0,1)} e^{-t} |\log t|^k t^{a-1} + \mathbb{1}_{(1,+\infty)} e^{-t} |\log t|^k t^{b-1} \in L^1(0, +\infty),$$

$\forall x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$. Donc le théorème de dérivation sous le signe somme montre que Γ est \mathcal{C}^k sur $]0, +\infty[$, $\forall k$, donc est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .

2) Quand $x \rightarrow 0$, le théorème de convergence monotone nous dit que

$$\Gamma(x) \geq \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = +\infty.$$

Exercice 23

On a $F(\lambda) = \int_0^1 f(x, \lambda) dx = \int_0^\lambda \phi(x) dx$. Donc $F'(\lambda) = \phi(\lambda)$. On voit que la conclusion du théorème de dérivation sous le signe somme est fausse. En effet, l'hypothèse b) est invalidée : $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ n'existe pas en tout point de $A \times I = [0, 1] \times [0, 1]$, mais seulement en presque tout point.

Exercice 24

Dans la première question, c'est l'hypothèse que f soit sommable qui n'est pas vérifiée. Dans la seconde, aussi, car si f était sommable, l'ordre d'intégration serait indifférent. On peut d'ailleurs vérifier directement que $\int |f(x, y)| dx dy = \int_0^{+\infty} (|e^{-y} - 2e^{-2y}| \int_0^{\min(1, y)} \frac{1}{x} dx) dy$. Dans la troisième, la fonction f est bien bornée, mesurable et sommable, mais la seconde mesure n'est pas σ -finie.

Exercice 25

Toutes les hypothèses du théorème de Fubini sont vérifiées, ... sauf une, la mesurabilité de f .

13.6 Chapitre 6

Exercice 1

***** L1 et L INFINI NORMES *****

Exercice 2

***** HOLDER GENERALISE *****

Exercice 3

Soit $f_n(x) = x^n$ alors pour tout n , $f_n \in L^\infty(0, 1)$, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leq 1 \in L^\infty(0, 1)$ et $f_n(x) \rightarrow 0$ p.p. sur $(0, 1)$. Et on a $\|f_n\|_\infty = 1$.

Exercice 4

***** RECIP CD *****

Exercice 5

Notons K le support borné de la fonction f et $|K|$ sa mesure. Alors $|f|^q \in L^{\frac{p}{q}}$ et $\mathbb{1}_K \in L^{(\frac{p}{q})'}$ avec $(\frac{p}{q})' = \frac{p}{p-q}$. En utilisant l'inégalité de Hölder ?? page ??, on obtient

$$\int |f|^q \leq \left(\int |f|^{q \frac{p}{q}} \right)^{\frac{q}{p}} |K|^{\frac{p-q}{p}},$$

et donc,

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p |K|^{\frac{p-q}{pq}}.$$

On trouve alors une constante $C = |K|^{\frac{p-q}{pq}}$. Si on choisit maintenant $f = \mathbb{1}_K$, l'inégalité précédente devient une égalité, on ne peut pas mieux faire.

Exercice 6

***** C Ex THM 6.9 *****

Exercice 7

1) Sur $[0, 1]$, $(1 - t^2)^n \geq 1 - nt^2$ et $\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nt^2) dt$ (puisqu'on ne considère que la partie positive de l'aire constituée par le graphe de $1 - nt^2$ sur $[0, 1]$.) Donc,

$$1 = c_n \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt = 2c_n \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \geq 2c_n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nt^2) dt = \frac{4c_n}{3\sqrt{n}},$$

on en déduit que $c_n \leq \frac{3}{4}\sqrt{n}$.

2) Pour $x \in [0, 1]$, on a

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x - y)Q_n(y)dy = \int_0^1 Q_n(x - y)f(y)dy.$$

Si $Q_n(x) = \sum_0^{d_n} a_p x^p$ alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q_n(x - y)f(y)dy &= \int_0^1 \sum_{p=0}^{d_n} a_p \sum_{k=0}^p C_p^k x^k (-y)^{p-k} f(y)dy, \\ &= \sum_{p=0}^{d_n} a_p \sum_{k=0}^p C_p^k x^k (-1)^{p-k} \underbrace{\int_0^1 y^{p-k} f(y)dy}_{\text{constante}}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que P_n est polynomial.

L'application f est uniformément continue sur \mathbb{R} donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$ et $\forall y$ tel que $|y| \leq \delta$, $|f(x - y) - f(x)| \leq \varepsilon$. Comme $\int_{-1}^1 Q_n dt = 1$, on a

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 (f(x - y) - f(x))Q_n(y)dy \right|, \\ &\leq \int_{|y| \leq \delta} |f(x - y) - f(x)|Q_n(y)dy + 2\|f\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} Q_n(y)dy. \end{aligned}$$

Enfin, comme $(1 - t^2)^n \geq (1 - \delta^2)^n$ si $1 \geq t \geq \delta$, on a

$$\int_\delta^1 Q_n(y)dy \leq Q_n(\delta) \leq \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n \rightarrow 0,$$

donc $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $\int_\delta^1 Q_n(y)dy \leq \varepsilon$. D'où $|P_n(x) - f(x)| \leq (1 + 4\|f\|_\infty)\varepsilon$ et ceci $\forall x \in [0, 1]$, on en déduit que $\|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

3) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, alors $\widehat{f} = f - f(0) - x(f(1) - f(0))$ est continue et vérifie $\widehat{f}(0) = \widehat{f}(1) = 0$, donc par 2), $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \widehat{P}_\varepsilon$ polynôme tel que $\|\widehat{f} - \widehat{P}_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit $P_\varepsilon = \widehat{P}_\varepsilon - f(0) - x(f(1) - f(0))$ alors P_ε est polynomial et $f - P_\varepsilon = \widehat{f} - \widehat{P}_\varepsilon$ ce qui montre que les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}([0, 1])$.

Exercice 8

1) On a $\chi_n(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1$, $\chi_n \rightarrow 0$ p.p. et $\int_{\mathbb{R}} \chi_n^2 = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$. Donc $\chi_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\chi_n \not\rightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

2) L'ensemble $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car contient $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ par exemple. Soit $E = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0\}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $g_n = f - (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \in E$ et $f - g_n = (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc E est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 9

1) Soit $F(x, y) = f(x - y^n)g(y)$ alors $\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx = \|f\|_{L^1} |g(y)|$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

donc par le théorème de Fubini-Tonelli, $F \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. De plus, p.p. x , $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x, y) dy$ est définie et est dans $L^1(\mathbb{R})$. Enfin, $\|T_n(f)\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.

2) On a

$$\begin{aligned} \forall x, y &\mapsto f(x - y^n)g(y) \in L^1(\mathbb{R}), \\ \text{p.p. } y, x &\mapsto f(x - y^n)g(y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

et $\forall x$, $|f(x - y^n)g(y)| \leq \|f\|_{\infty} |g(y)| \in L^1(\mathbb{R})$, donc par le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, $T_n(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\forall x$, $|T_n(f)(x)| \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{L^1}$ donc $T_n(f)$ est bornée.

3) On écrit $T_n(f)(x) = A_n + B_n$ où $A_n = \int_{|y| < 1} f(x - y^n)g(y) dy$ et $B_n = \int_{|y| > 1} f(x - y^n)g(y) dy$.

Etude de A_n :

Quand $n \rightarrow \infty$, $f(x - y^n)g(y) \rightarrow f(x)g(y)$ p.p. et $|f(x - y^n)g(y)| \leq M|g(y)| \in L^1$. Par le théorème de convergence dominée, $A_n \rightarrow f(x) \int_{|y| < 1} g(y) dy$.

Etude de B_n :

Quand $n \rightarrow \infty$, $x - y^n \rightarrow \pm\infty$ et par hypothèse $f(x - y^n) \rightarrow 0$ donc $f(x - y^n)g(y) \rightarrow 0$ p.p. Enfin, $|f(x - y^n)g(y)| \leq M|g(y)| \in L^1$, donc le théorème de convergence dominée montre que $B_n \rightarrow 0$.

D'où $T_n(f)(x) \rightarrow C f(x)$ avec $C = \int_{|y| < 1} g(y) dy$.

Exercice 10

Par le théorème de Fubini, $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

$(f, g) \mapsto (f \star g)$ est bilinéaire donc \star est distributive par rapport à l'addition. Enfin, il est évident que \star est commutative, donc il reste à voir que \star est associative. Soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, en appliquant le théorème de Fubini et en effectuant un changement de variables, on a

$$\begin{aligned} (f \star g) \star h(x) &= \int_{\mathbb{R}} f \star g(x - y)h(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x - y - u)g(u)h(y) dy du, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(y)g(v - y)f(x - v) dv dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x - v)g \star h(v) dv = f \star (g \star h)(x). \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe un élément neutre δ pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $f_n \geq 0$, de support $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et telle que $f_n(0) = \|f_n\|_{\infty} = 1$. Alors $\delta \star f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\delta \star f_n(x) = f_n \star \delta(x) = f_n(x)$, donc en particulier

$$f_n \star \delta(0) = f_n(0) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f_n(-y)\delta(y) dy.$$

Soit $g_n(y) = f_n(-y)\delta(y)$ alors $g_n(y) \rightarrow 0$ p.p. et $|g_n(y)| \leq |\delta(y)| \in L^1(\mathbb{R})$. Le théorème de convergence dominée montre que $\int_{\mathbb{R}} g_n \rightarrow 0$, d'où contradiction.

Exercice 11

1) On suppose $\theta \in]0, 1[$. On peut toujours écrire

$$\int |f|^r = \int |f|^{r\theta} |f|^{(1-\theta)r}.$$

Posons $g = |f|^{r\theta}$ et $h = |f|^{(1-\theta)r}$ alors $g \in L^{\frac{p}{r\theta}}$ et $h \in L^{\frac{q}{(1-\theta)r}}$ où $\frac{r\theta}{p} + \frac{(1-\theta)r}{q} = 1$. Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int gh \leq \|g\|_{\frac{p}{r\theta}} \|h\|_{\frac{q}{(1-\theta)r}},$$

c'est à dire

$$\int |f|^r \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{r\theta}{p}} \left(\int |f|^q \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}}.$$

2) Si $E = \bigcup_n E_n$ et E_n fermé dans $(E, \|\cdot\|_1)$ alors $(E, \|\cdot\|_1)$ étant complet, on peut appliquer le lemme de Baire et $\exists n_0$ tel que $\text{int}(E_{n_0}) \neq \emptyset$. Donc $\exists f \in E$ et $\exists r > 0$ tels que $B(f, r) \subset E_{n_0}$. Si $g \in E$, $g \neq 0$ alors $f + \frac{r}{2} \frac{g}{\|g\|_1} \in B(f, r) \subset E_{n_0}$ donc $g \in L^{1+\frac{1}{n_0}}$ et $|\frac{r}{2} \frac{1}{\|g\|_1} \|g\|_{1+\frac{1}{n_0}} - \|f\|_{1+\frac{1}{n_0}}| \leq n_0 \implies \|g\|_{1+\frac{1}{n_0}} \leq \frac{4n_0}{r} \|g\|_1$.

D'où $id : E, \|\cdot\|_1 \longrightarrow L^{1+\frac{1}{n_0}}$ est continue.

Montrons que $E = \bigcup_n E_n$. Si $f \in E$ alors $\exists q > 1$ tel que $f \in L^1 \cap L^q$. Donc $\exists N_0$ tel que à la fois $\|f\|_1 \leq N_0$ et $\forall n \geq N_0$, $1 + \frac{1}{n} < q$. Soit $r_n = 1 + \frac{1}{n}$ alors par 1),

$$\|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq \|f\|_1^{\theta_n} \|f\|_q^{(1-\theta_n)}, \quad \text{où } \frac{1}{r_n} = \frac{n}{n+1} = \theta_n + \frac{1-\theta_n}{q}.$$

Or $\theta_n(1 - \frac{1}{q}) = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{q}$ où $q > 1$ donc $\theta_n \longrightarrow 1$ et $\|f\|_1^{\theta_n} \|f\|_q^{(1-\theta_n)} \longrightarrow \|f\|_1$. Donc $\exists N \geq N_0 + 1$ tel que $\forall n \geq N$ $\|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq \|f\|_1 + 1 \leq N_0 + 1 \leq N$ et $f \in E_N$ par exemple. D'où $E = \bigcup_n E_n$.

Montrons que $\forall n$, E_n est fermé dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Soit $(f_p)_p \subset E_n$ telle que $f_p \longrightarrow f$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$. A-t'on $f \in E_n$?

$\|f_p - f\|_1 \longrightarrow 0 \implies$ il existe une sous-suite $(f_{p_k})_k$ telle que $f_{p_k} \longrightarrow f$ p.p. (voir l'exercice ?? page ??), donc

$$\begin{cases} |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow |f|^{1+\frac{1}{n}} \text{ p.p.}, \\ |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \in L^1, |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \geq 0 \text{ p.p.}, \\ \forall k, \int |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \leq n^{1+\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

Le lemme de Fatou montre que $|f|^{1+\frac{1}{n}} \in L^1$, soit $f \in L^{1+\frac{1}{n}}$, et

$$\int |f|^{1+\frac{1}{n}} \leq \liminf \int |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \leq n^{1+\frac{1}{n}}.$$

Donc $f \in E_n$, et E_n est fermé.

Exercice 12

1) On a $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{p}}$ donc $\limsup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

Soient $0 < k < \|f\|_\infty$ et $A = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}$, alors $|A| \neq 0$ et $\|f\|_p \geq k |A|^{\frac{1}{p}}$. Donc $\liminf \|f\|_p \geq k$ et ceci $\forall k < \|f\|_\infty$. D'où $\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$ et $\lim \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Soit $k > C$ et soit $A = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}$ alors

$$k^p |A| \leq \|f\|_p^p \leq C^p \implies |A| \leq \left(\frac{C}{k}\right)^p, \quad \forall p.$$

Quand $p \rightarrow \infty$, on obtient $|A| = 0$, donc p.p. x $|f(x)| \leq k$ et $f \in L^\infty$.

3) Soit $f(x) = \log x$, alors $f \notin L^\infty(0, 1)$. Soit $1 \leq p < +\infty$ comme $\sqrt{x} |\log x|^p \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|x| \leq \varepsilon \implies |\log x|^p \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors

$$|f(x)|^p \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0, \varepsilon)} + |\log x|^p \mathbb{1}_{(\varepsilon, 1)} \in L^1(0, 1),$$

donc $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$.

Exercice 13

1) Soit $h : \xi \rightarrow e^{-ix\xi} f(x)$, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $h^{(k)}(\xi) = (-ix)^k h(\xi)$ donc $|h^{(k)}(\xi)| \leq |x^k f(x)| \leq g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ où par exemple

$$g(x) = |f(x)| \mathbb{1}_{[|x| \leq 1]} + \frac{M_k}{|x|^2} \mathbb{1}_{[|x| > 1]}$$

et où $M_k = \|x^{k+2} f\|_\infty$.

Le théorème de dérivation sous le signe somme donne alors : $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall k$, $\widehat{f}^{(k)} = \widehat{g}$ avec $g(x) = (-ix)^k f(x)$.

2) Comme $f' \in L^1$, on a

$$\widehat{f}'(\xi) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-ix\xi} f'(x) dx \text{ et}$$

$$\int_{-R}^R e^{-ix\xi} f'(x) dx = [f(x)e^{-ix\xi}]_{-R}^R + \int_{-R}^R i\xi e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Comme f est \mathcal{C}^∞ , $f(R) = f(0) + \int_0^R f'(t) dt$ et $\int_0^R f'(t) dt$ converge vers $\int_0^\infty f'(t) dt$ car $f' \in L^1$. On en déduit que $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R)$ existe et de même $\lim_{R \rightarrow \infty} f(-R)$ existe. Enfin, $f \in L^1 \implies \lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} f(-R) = 0$. Donc par passage à la limite, et par récurrence sur k , on obtient $\widehat{f}^{(k)} = (i\xi)^k \widehat{f}$.

3) Si $f \in \mathcal{S}$, $\forall P$ polynôme, $Pf \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall q$, $x^q (Pf)^k(x) = \sum_0^k P_j(x) f^{(j)}(x)$

où P_j est un polynôme (voir la formule de Leibniz). Donc

$$|x^q (Pf)^k(x)| \leq (k+1) \max_j \left(\sup_{\mathbb{R}} |P_j(x) f^{(j)}(x)| \right) < \infty.$$

Ensuite, $f \in \mathcal{S} \implies f' \in \mathcal{C}^\infty$ et $\|x^q (f')^{(k)}\|_\infty = \|x^q f^{(k+1)}\|_\infty < \infty$.

Enfin,

$$f \in \mathcal{S} \implies |f(x)| \leq |f(x)| \mathbb{1}_{[|x| \leq 1]} + \frac{M}{|x|^2} \mathbb{1}_{[|x| > 1]} \in L^1.$$

4) Si $f \in \mathcal{S}$, on sait déjà que $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty$ par 1). En utilisant 1) et 2), on a, si $g(x) = (-ix)^k f(x)$,

$$\begin{aligned} \xi^q \widehat{f}^{(k)} &= \xi^q \widehat{g} = \frac{1}{i^q} \widehat{g^{(q)}} \\ &= (-i)^{k+q} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{d}{dx^q} (x^k f(x)) dx, \end{aligned}$$

et la question 3) montre que $x^k f \in \mathcal{S}$ donc $(x^k f)^q \in \mathcal{S}$. On en déduit que $(x^k f)^q \in L^1$ et donc que $\xi^q \widehat{f}^{(k)} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\forall q, k$. D'où $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.

5) On suppose que $\forall p, q, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^p f_n^{(q)}\|_\infty = 0$.

$x^p (f_n')^{(q)} = x^p f_n^{(q+1)}$ donc f_n' converge vers 0 dans \mathcal{S} .

En utilisant la formule de Leibniz et le fait que f_n tend vers 0 dans \mathcal{S} , on voit facilement que $\|x^p (x^k f_n)^{(q)}\|_\infty \rightarrow 0$ et donc que $\forall P$ polynôme, $P f_n$ tend vers 0 dans \mathcal{S} .

Enfin, si f_n tend vers 0 dans \mathcal{S} alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |(1+x^2)f_n(x)| \leq \varepsilon$. Alors $\forall n \geq N$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \varepsilon \pi,$$

donc $f_n \rightarrow 0$ dans L^1 .

On a $\xi^p \widehat{f_n}^{(q)} = (-i)^{p+q} \widehat{g_n}$ où $g_n(x) = (x^q f_n)^{(p)}(x)$. Par 3) $g_n \in \mathcal{S}$ et $f_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{S} \implies g_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{S} \implies g_n \rightarrow 0$ dans L^1 . Or $|\widehat{g_n}(\xi)| \leq \|g_n\|_1$ donc $\widehat{f_n} \rightarrow 0$ dans \mathcal{S} .

6) Il est clair que la fonction ψ_a est dans \mathcal{S} et elle est l'unique solution de l'équation différentielle $u' + 2axu = 0$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}} u(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. En multipliant l'équation différentielle par $(-i)$ et en prenant sa transformée de Fourier, on voit immédiatement que $\widehat{\psi_a}$ est l'unique solution de $2av' + \xi v = 0$ vérifiant $v(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, d'où l'expression de $\widehat{\psi_a}$. Enfin $\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi_a} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{\mathbb{R}} \psi_{1/4a} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{4\pi a} = 2\pi$.

7) a) Par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \Phi(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi} f(y) \Phi(\xi) d\xi dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(y) f(x+y) dy. \end{aligned}$$

b) Si $\Phi(t) = \Phi_0(\varepsilon t)$ alors $\widehat{\Phi}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon} \widehat{\Phi_0}(\frac{\xi}{\varepsilon})$ donc après changement de variable :

$$\int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \Phi_0(\varepsilon\xi) d\xi = \int \widehat{\Phi_0}(y) f(x+\varepsilon y) dy,$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient par le théorème de convergence dominée :

$$\Phi_0(0) \int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi = f(x) \int \widehat{\Phi_0}(y) dy.$$

c) On choisit $\Phi_0 = \psi_{a=1}$ alors la question 6) entraîne que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R} >$$

8) Vérifions que $\mathcal{S} \subset L^2$. $f \in \mathcal{S} \implies \exists A > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |(1+x^2)f(x)| \leq A$. Alors,

$$\int |f|^2 dx \leq A^2 \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} < \infty.$$

Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$ et que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans L^2 , \mathcal{S} est dense dans L^2 .

9) On choisit $x = 0$ dans (\star) , on obtient a).

b) Soit $\psi \in \mathcal{S}$ alors $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}$ et on choisit $f = \widehat{\psi}$ dans (\star) . Alors $\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(-x)$ et

$$\int f \bar{\phi} = \int \widehat{\psi} \bar{\phi} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \psi(\xi) \widehat{\phi} d\xi \text{ par a),} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(-\xi) \overline{\widehat{\phi}}(-\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f} \overline{\widehat{\phi}} d\xi.
 \end{aligned}$$

c) Si $\phi, \psi \in \mathcal{S} \subset L^1$ alors $\phi * \psi \in L^1$ et par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
 \widehat{\phi * \psi}(\xi) &= \int \int e^{-ix\xi} \phi(y) \psi(x-y) dy dx, \\
 &= \int e^{-iy\xi} \phi(y) \left(\int e^{-i(x-y)\xi} \psi(x-y) dx \right) dy, \\
 &= \widehat{\phi}(\xi) \widehat{\psi}(\xi).
 \end{aligned}$$

10) Soit $f \in E$, comme $\overline{G} = E$, $\exists (f_n)_n \subset G$ telle que $\lim_n \|f - f_n\| = 0$. En particulier, $(f_n)_n$ est de Cauchy dans E et A linéaire continue $\implies \|Af_n - Af\| \leq \|A\| \|f_n - f_m\|$. Donc $(Af_n)_n$ est Cauchy dans F complet donc converge vers un g dans F .

On vérifie facilement que g ne dépend pas de la suite $(f_n)_n$ et on pose $\tilde{A}f = g$. L'application \tilde{A} est linéaire par construction et

$$\|\tilde{A}f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Af_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\| \|f_n\| = \|A\| \|f\|,$$

donc \tilde{A} est continue et $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Comme $\tilde{A}f = Af, \forall f \in G$, on a

$$\|\tilde{A}\| = \sup_{f \in E, f \neq 0} \frac{\|\tilde{A}f\|}{\|f\|} \geq \sup_{f \in G, f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \|A\|.$$

D'où $\|\tilde{A}\| = \|A\|$. Enfin G étant dense dans E , il est clair que \tilde{A} est unique.

11) On applique 10) avec $E = F = L^2(\mathbb{R})$, $G = \mathcal{S}$ et $A = \mathcal{F}$. A est linéaire et 9)b) avec $\phi = \psi$ montre que $\|Af\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$. Donc \mathcal{F} se prolonge à $L^2(\mathbb{R})$ en une application linéaire continue (encore notée \mathcal{F}) et $\forall f \in L^2$,

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \lim_n \|\mathcal{F}f_n\|_2 = \sqrt{2\pi} \lim_n \|f_n\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2.$$

D'autre part, si on note $\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int e^{ix\xi} f(x) dx$, on a montré en 7) que $\forall f \in \mathcal{S}$, $\frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = f$. Si $\tilde{f}(x) = f(-x)$, on remarque que $\forall f \in \mathcal{S}$, $\overline{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(\tilde{f})$ et que $\frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\tilde{f}) = f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}(f)$. Donc $\frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}$ qui se prolonge à L^2 de la même manière que \mathcal{F} vérifie : $\forall f \in \mathcal{S}$,

$\frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = f = \mathcal{F} \circ \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}(f)$. Par densité de \mathcal{S} dans L^2 et continuité de ces deux applications, on en déduit que $\forall f \in L^2$, $\frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = f = \mathcal{F} \circ \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}(f)$ donc $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}$ et \mathcal{F} est bien un isomorphisme d'espaces de Banach.

13.7 Chapitre 7

Exercice 1

***** VALEUR MEDIANE *****

Exercice 2

***** TRIBU *****

Exercice 3

1) On écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x = n + r$, $0 \leq r < 1$ et on pose $g(n+r) = (-1)^n$. On considère également $f = \mathbb{1}_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R})$. On a donc $\int f(x)g(x-n) = (-1)^n$ qui ne converge pas. Donc la suite $g_n(x) = g(x-n)$ ne converge pas faiblement*.

2) Franchement, ce n'est pas compliqué : il suffit de prendre $g = 1$.

Exercice 4

1) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans E alors $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans L^1 et L^2 . Donc $\exists f \in L^1$, $\exists g \in L^2$ telles que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 et $f_n \rightarrow g$ dans L^2 . En utilisant la "réciproque" du théorème de convergence dominée, voir l'exercice ?? page ??, on en déduit qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $f_{n_k} \rightarrow f$ p.p. et $f_{n_k} \rightarrow g$ dans L^2 , donc il existe une sous-suite $(f_{n_{k_l}})_l$ telle que $f_{n_{k_l}} \rightarrow g$ p.p. D'où $f = g$ p.p. et $f_n \rightarrow f$ dans E , donc E est un espace de Banach.

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx \right| \leq \|f_1\|_{\infty} \|u\|_1 + \|f_2\|_2 \|u\|_2 \leq (\|f_1\|_{\infty} + \|f_2\|_2) \|u\|.$$

Donc $u \mapsto \int fudx \in E'$.

2) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on peut toujours écrire

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^{\alpha}} u dx = \int_{|x|>M} \frac{1}{|x|^{\alpha}} u dx + \int_{|x|\leq M} \frac{1}{|x|^{\alpha}} u dx.$$

Soient $f_1(x) = \frac{1}{|x|^{\alpha}} \mathbb{1}_{|x|>M}$ et $f_2(x) = \frac{1}{|x|^{\alpha}} \mathbb{1}_{|x|\leq M}$, alors $\alpha > 0 \implies f_1 \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ et $2\alpha < 1 \implies f_2 \in L^2(\mathbb{R})$. La question 1) permet alors de conclure.

3) K est évidemment convexe, montrons qu'il est fermé. Soit $(u_n)_n \subset K$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans E , alors $u_n \rightarrow u$ dans L^1 donc $\int u_n \rightarrow \int u$ et on en déduit que $\int u \leq 1$. La convergence dans L^1 implique aussi qu'il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que $u_{n_k} \rightarrow u$ p.p. (voir l'exercice ?? page ??) donc $u \geq 0$ p.p. et on en conclut que $u \in K$. Donc K est fermé.

4) Posons $K_0 = \{u \in L^2 : u \geq 0 \text{ p.p.}\}$ alors K_0 est un convexe fermé fort de L^2 donc fermé faible de L^2 , donc $u \in K_0$. Il reste à montrer que $u \in L^1$ et $\int u \leq 1$. Soit A un ensemble mesurable de mesure finie (notation $|A| < \infty$), alors $\mathbb{1}_A \in L^2$ et $u_n \rightarrow u$ dans L^2 faible $\implies \int \mathbb{1}_A u_n \rightarrow \int \mathbb{1}_A u$. Or $\int \mathbb{1}_A u_n \leq \int u_n \leq 1$ donc $\forall A$ tel que $|A| < \infty$, $\int_A u \leq 1$. Pour passer à \mathbb{R} tout entier, on utilise le lemme de Fatou.

Soit $v_n = \mathbb{1}_{(-n,n)} u$ alors $v_n \in L^1$, $v_n \geq 0$ p.p., $v_n \rightarrow u$ p.p. et $\sup_n \int v_n \leq 1$, donc par le lemme de Fatou, on en déduit que $u \in L^1$ et $\int u \leq \liminf \int v_n \leq 1$. Donc $u \in K$.

5) Soit $M > 0$, alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^{\alpha}} (u_n - u) \right| &\leq \left| \int_{|x|\leq M} \frac{1}{|x|^{\alpha}} (u_n - u) \right| + \left| \int_{|x|>M} \frac{1}{|x|^{\alpha}} (u_n - u) \right|, \\ &\leq \left| \int_{|x|\leq M} \frac{1}{|x|^{\alpha}} (u_n - u) \right| + \frac{1}{M^{\alpha}} (\|u_n\|_1 + \|u\|_1), \\ &\leq \left| \int_{|x|\leq M} \frac{1}{|x|^{\alpha}} (u_n - u) \right| + \frac{2}{M^{\alpha}}, \end{aligned}$$

puisque $u_n, u \in K$.

Comme u_n converge faiblement vers u dans L^2 ,

$$\int_{|x|\leq M} \frac{1}{|x|^{\alpha}} (u_n - u) \rightarrow 0.$$

Donc en prenant la limite sup sur n , on obtient

$$\limsup \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} (u_n - u) \right| \leq \frac{2}{M^\alpha},$$

et ceci $\forall M > 0$. En faisant tendre M vers $+\infty$, on a $\limsup \left| \int \frac{1}{|x|^\alpha} (u_n - u) \right| = 0$ d'où

$$\int \frac{1}{|x|^\alpha} u_n \longrightarrow \int \frac{1}{|x|^\alpha} u.$$

6) On peut écrire, par exemple, pour $u \in K$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} u = \int_{\{|x| \leq 1\}} \frac{1}{|x|^\alpha} u + \int_{\{|x| > 1\}} \frac{1}{|x|^\alpha} u \leq C_0 \|u\|_2 + \|u\|_1 \leq C_0 \|u\|_2 + 1,$$

où $C_0 = \|\mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\|_2$. Alors pour $u \in K$, on a

$$J(u) \geq \|u\|_2^2 - C_0 \|u\|_2 - 1 \geq C,$$

où C est une constante indépendante de $u \in K$. (Par exemple $C = -(1 + \frac{C_0^2}{4})$ convient.)

7) Soit $(u_n)_n \subset K$, une suite minimisante, par exemple telle que $m \leq J(u_n) \leq m + \frac{1}{n}$. D'après la question 6), on a

$$\|u_n\|_2^2 - C_0 \|u_n\|_2 - 1 \leq J(u_n) \leq m + 1, \quad \forall n,$$

donc nécessairement $\|u_n\|_2$ reste bornée, donc $\exists M_0$ tel que $\forall n$, $\|u_n\|_2 \leq M_0$ alors $\|u_n\| \leq M_0 + 1$.

8) La suite $(u_n)_n$ est bornée dans L^2 réflexif, donc il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ dans L^2 faible et $u_{n_k} \in K$. Alors la question 4) montre que $u \in K$ et la question 5) montre que $\int \frac{1}{|x|^\alpha} u_{n_k} \longrightarrow \int \frac{1}{|x|^\alpha} u$.

D'autre part,

$$J(u_{n_k}) \leq m + \frac{1}{n_k} \quad \text{donc} \quad \|u_{n_k}\|_2^2 \leq m + \frac{1}{n_k} + \int \frac{1}{|x|^\alpha} u_{n_k}.$$

On prend les lim inf dans cette inégalité, on obtient $\liminf \|u_{n_k}\|_2^2 \leq m + \int \frac{1}{|x|^\alpha} u$. Comme $\|\cdot\|_2^2$ est s.c.i. faible, on a $\|u\|_2^2 \leq \liminf \|u_{n_k}\|_2^2$, donc finalement $\|u\|_2^2 \leq m + \int \frac{1}{|x|^\alpha} u$, soit $J(u) \leq m$. D'où $J(u) = m$.

9) La réponse est non. En effet supposons E réflexif. Soit $f_n = \mathbb{1}_{(n, n+1]}$ alors $\|f_n\|_1 = \|f_n\|_2 = 1$ donc $\|f_n\| = 2$. Si E est réflexif alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans E faible.

Soit $g \equiv 1$ alors $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $u \mapsto \int gu \in E'$ donc $1 = \int f_{n_k} \longrightarrow \int f$, d'où $\int f = 1$.

Soit $g \in C_c(\mathbb{R})$ alors $u \mapsto \int gu \in E'$ et $\int g f_{n_k} \longrightarrow \int g f$. Or, $\exists N$ tel que $\text{supp}(g) \subset \overline{B}(0, N)$ et si $k \geq k_0$, $n_k > N$, donc $f_{n_k} \equiv 0$ sur $\text{supp}(g)$ et $\int g f_{n_k} = 0$, ceci pour tout $k \geq k_0$. On en déduit que $\int g f = 0$, $\forall g \in C_c(\mathbb{R})$ donc $f = 0$ p.p. or $\int f = 1$, c'est absurde.

Exercice 5

On pose $K = \{u \in L^p(\Omega); u \geq f \text{ p.p.}\}$.

1) K est convexe fermé fort donc fermé faible.

2) a) Posons $K_\varphi = \{u \in L^\infty(\Omega) : \int_\Omega u \varphi \geq \int_\Omega f \varphi\}$ où $\varphi \in L^1$, $\varphi \geq 0$ p.p. et est telle que $f \varphi \in L^1$.

Soit $K_0 = \bigcap_{\varphi \in \Phi} K_\varphi$ où l'intersection est prise sur l'ensemble $\Phi = \{\varphi \in L^1, \varphi \geq$

$0, f\varphi \in L^1\}$.

Montrons que $K = K_0$. Il est clair que $K \subset K_0$. Soit donc $u \in K_0$, alors $\forall \varphi \in L^1$ telles que $\varphi \geq 0$ p.p. et $f\varphi \in L^1$, on a $\int u\varphi \geq \int f\varphi$.

Soit $\Omega_n = \{x : |f(x)| < n\}$ et soit $E = \{x : u(x) < f(x)\}$, on va montrer que $|E| = 0$.

Supposons d'abord $|\Omega| < \infty$.

On a $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$. Soit $\varphi = \mathbb{1}_{E \cap \Omega_n}$, alors $\varphi \in L^1(\Omega)$ car $|\Omega| < \infty$, $\varphi \geq 0$ p.p. et $f\varphi \in L^1$ car $|f| < n$. Alors

$$\int_{E \cap \Omega_n} (u - f)\varphi = \int_{\Omega} (u - f)\varphi \geq 0.$$

Or $u - f < 0$ sur $E \cap \Omega_n$ donc nécessairement $|E \cap \Omega_n| = 0$ et ceci $\forall n$, donc $E = \bigcup_n (E \cap \Omega_n)$ est négligeable.

Si $|\Omega| = +\infty$, alors $\Omega = \bigcup_k \omega_k$ où $\omega_k = \Omega \cap B(0, k)$. On se restreint donc à ω_k , $|\omega_k| < \infty$ et $E = \bigcup_{n,k} E_{n,k}$ où $E_{n,k} = E \cap \Omega_n \cap \omega_k$.

Soit $\varphi = \mathbb{1}_{E_{n,k}}$ alors comme tout à l'heure, $\varphi \in L^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ p.p., $f\varphi \in L^1$ et on montre de la même façon que ci-dessus que $E_{n,k}$ est négligeable. Donc E est négligeable comme union dénombrable d'ensembles négligeables. On en conclut que $u \in K$ d'où $K = K_0$.

b) Si $\varphi \in L^1$, $u \mapsto \int u\varphi$ est continue sur L^∞ pour la topologie faible \star donc K_φ est fermé faible \star et $K = \bigcap_{\varphi \in \Phi} K_\varphi$ est fermé faible \star .

c) Les boules fermées sont compactes faible \star et $K \subset \overline{B}(0, \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty)$ donc K est compact faible \star .

Exercice 6

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$ et $\text{supp}(g) \subset K$ compact fixe. On peut écrire

$$\|\tau_{y_1}f - \tau_{y_2}f\|_1 \leq \|\tau_{y_1}f - \tau_{y_1}g\|_1 + \|\tau_{y_1}g - \tau_{y_2}g\|_1 + \|\tau_{y_2}g - \tau_{y_2}f\|_1.$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue par translation entraîne que $\|\tau_y f - \tau_y g\|_1 = \|f - g\|_1$, $\forall y$, donc on obtient

$$\|\tau_{y_1}f - \tau_{y_2}f\|_1 \leq 2\varepsilon + \|\tau_{y_1}g - \tau_{y_2}g\|_1.$$

La fonction g étant uniformément continue, $\exists \delta > 0$ (on peut supposer $\delta \leq 1$), tel que $\forall x$,

$\forall |y_1 - y_2| \leq \delta$, $|g(x - y_1) - g(x - y_2)| \leq \frac{\varepsilon}{C}$ où $C = |K + \overline{B}(0, 1)|$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau_{y_1}g - \tau_{y_2}g| dx = \int_{K + \overline{B}(0, 1)} |g(x + y_2 - y_1) - g(x)| dx \leq \varepsilon.$$

(Si $x \notin K + \overline{B}(0, 1)$, alors $x \notin K$ et $\forall |y_1 - y_2| \leq \delta$, $x + y_2 - y_1 \notin K + \overline{B}(0, \delta)$ donc l'intégrale ci-dessus est nulle.)

Exercice 7

1) Par la propriété d'absolue continuité (voir l'exercice ?? page ??), on sait que si $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall A$ mesurable $\subset \Omega$ avec $|A| \leq \delta$, on ait $\int_A |f|^p \leq \varepsilon$. Pour ce δ , on applique le théorème d'Egoroff (énoncé page ??), comme $f_n \rightarrow f$ p.p., $\exists A$ mesurable $\subset \Omega$ tel que $|A| \leq \delta$ et $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $\Omega \setminus A$. Donc,

$$\int_{\Omega \setminus A} |f_n - f|^p \leq |\Omega \setminus A| \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega \setminus A)}^p \rightarrow 0,$$

puisque $|\Omega \setminus A| < \infty$.

$$\int_A |f_n - f|^p \leq 2^p \int_A |f_n|^p + 2^p \int_A |f|^p \leq 2^p \int_A |f_n|^p + 2^p \varepsilon.$$

Mais,

$$\int_A |f_n|^p = \int_\Omega |f_n|^p - \int_{\Omega \setminus A} |f_n|^p,$$

avec $\int_\Omega |f_n|^p \rightarrow \int_\Omega |f|^p$ par hypothèse et $\int_{\Omega \setminus A} |f_n|^p \rightarrow \int_{\Omega \setminus A} |f|^p$ car il y a convergence uniforme sur $\Omega \setminus A$. Donc $\int_A |f_n|^p \rightarrow \int_A |f|^p \leq \varepsilon$. D'où pour n assez grand $\int_A |f_n|^p \leq 2\varepsilon$ et $\int_{\Omega \setminus A} |f_n - f|^p \leq \varepsilon$, on en déduit que $\int_\Omega |f_n - f|^p \leq 2^p(2\varepsilon) + 2^p\varepsilon + \varepsilon$.

Remarque :

Sans supposer Ω borné, on peut démontrer ce résultat de la façon suivante :

Soit $g_n = \alpha_p(|f|^p + |f_n|^p) - |f - f_n|^p$ où $\alpha_p = 2^{p-1}$, on lui applique le lemme de Fatou et on obtient $\limsup \|f - f_n\|_p^p \leq 0$ d'où la convergence dans L^p .

2) Soit $\varphi \in L^{p'}$, on veut montrer que $\int_\Omega (f_n - f)\varphi \rightarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall A$ mesurable $\subset \Omega$ avec $|A| \leq \delta$, on ait $\|\varphi\|_{L^{p'}(A)} \leq \varepsilon$ et par le théorème d'Egoroff (énoncé page ??), $\exists A$ mesurable $\subset \Omega$ tel que $|A| \leq \delta$ et $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $\Omega \setminus A$. Alors

$$\int_{\Omega \setminus A} |f_n - f||\varphi| \leq \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega \setminus A)} \|\varphi\|_{p'} |\Omega \setminus A|^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

si n est assez grand. D'autre part,

$$\int_A |f_n - f||\varphi| \leq \|f_n - f\|_p \varepsilon \leq (C + \|f\|_p) \varepsilon.$$

Donc pour n assez grand, $|\int_\Omega (f_n - f)\varphi| \leq \varepsilon + (C + \|f\|_p)\varepsilon$ donc $f_n \rightarrow f$ dans L^p faible.

3) Soit $f_n = n\mathbb{1}_{(0, \frac{1}{n})}$ alors $f_n \rightarrow 0$ p.p. et $\|f_n\|_1 = 1$. Si f_n converge faiblement vers 0 alors $\forall \varphi \in L^\infty$, $\int_0^1 f_n \varphi \rightarrow 0$, or pour $\varphi \equiv 1$, on a $\int f_n \varphi = 1$, c'est absurde.

Exercice 8

Première partie :

1) Comme Ω est borné, on peut recouvrir Ω par un nombre fini de boules de mesure $< \delta$ où δ correspond à $\varepsilon = 1$ par exemple.

2) On suppose que $(f_n)_n$ est équi-intégrable. Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ donnés par l'équi-intégrabilité, on a

$$\text{mes}[|f_n| > k] \leq \frac{1}{k} \int_\Omega |f_n| \leq \frac{1}{k} \sup_n \|f_n\|_1 \leq \frac{C}{k},$$

par 1). Et $\exists k_0$ tel que $\forall k \geq k_0$, $\frac{C}{k} < \delta$ alors $\forall n$,

$$\int_{[|f_n| > k]} |f_n| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

D'où le résultat.

On suppose maintenant que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sup_{n \geq 1} \int_{[|f_n| > k]} |f_n| dx \right) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, alors

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| &= \int_{E \cap \{|f_n| > k\}} |f_n| + \int_{E \cap \{|f_n| \leq k\}} |f_n|, \\ &\leq \int_{\{|f_n| > k\}} |f_n| + k|E|. \end{aligned}$$

On fixe $k = k_0$ tel que $\forall n \geq 1$, $\int_{\{|f_n| > k_0\}} |f_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{2k_0}$ alors $|E| < \delta \implies \int_E |f_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$.

3) Soit $\varepsilon > 0$ donné, l'ensemble $\{f_n, n \geq 1\}$ étant relativement compact dans $L^1(\Omega)$, est inclus dans une union finie de boules de centre g_i et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Donc si $f_n \in B(g_i, \frac{\varepsilon}{2})$ alors

$$\int_E |f_n| \leq \|f_n - g_i\|_1 + \int_E |g_i| < \frac{\varepsilon}{2} + \int_E |g_i|.$$

Or l'ensemble fini des g_i est équi-intégrable (il suffit d'appliquer la propriété d'absolue continuité, voir l'exercice ?? page ??, à $g = \sum |g_i|$) donc $\exists \delta > 0$ tel que $\forall |E| < \delta$,

$$\int_E |f_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_E |g_i| < \varepsilon.$$

Deuxième partie :

1) X est fermé car si $\mathbb{1}_{A_n} \rightarrow f$ dans L^1 alors pour une sous-suite, $\mathbb{1}_{A_{n_k}} \rightarrow f$ p.p. (voir l'exercice ?? page ??). Maintenant si $A = \{x : f(x) = 1\}$ alors $f = \mathbb{1}_A$ donc $f \in X$.

Les applications $\mathbb{1}_A \mapsto \int_A f_k dx$ sont continues sur X donc X_n est fermé. Enfin $\forall A \subset \Omega$ mesurable, $\lim_n \int_A f_n = 0 \implies X = \cup_n X_n$. On peut donc appliquer le lemme de Baire et $\exists n_0, \exists R > 0, \exists \mathbb{1}_{A_0} \in X_{n_0}$ tels que si $\mathbb{1}_A \in X$ et $\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_0}\|_{L^1} < R$ alors $\forall k \geq n_0, \left| \int_A f_k \right| \leq \varepsilon$.

Soit donc E mesurable, $E \subset \Omega$ avec $|E| < R$, posons $E_k = E \cap [f_k \geq 0]$ alors $A = A_0 \cup E_k$ vérifie $\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_0}\|_{L^1} < R$ donc

$$\left| \int_{A_0 \cup E_k} f_k \right| \leq \varepsilon.$$

De même, si $A = A_0 \setminus E_k$ alors $\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_0}\|_{L^1} < R$ et

$$\left| \int_{A_0 \setminus E_k} f_k \right| \leq \varepsilon.$$

Or $\int_{E_k} f_k = \int_{A_0 \cup E_k} f_k + \int_{A_0 \setminus E_k} f_k$ donc

$$\left| \int_E f_k^+ \right| = \left| \int_{E_k} f_k \right| \leq 2\varepsilon.$$

On montre de la même façon, en considérant $E_K = E \cap [f_k \leq 0]$, que

$$\left| \int_E f_k^- \right| \leq 2\varepsilon.$$

D'où, $\forall k \geq n_0, \int_E |f_k| \leq 4\varepsilon$. En utilisant de nouveau le fait que $\{f_1, \dots, f_{n_0}\}$ est équi-intégrable, on conclut.

2) La suite $(f_n - f)_n$ vérifie les hypothèses de la question précédente, elle est donc équi-intégrable. Comme $\int_E |f_n| \leq \int_E |f_n - f| + \int_E |f|$, on conclut en utilisant la propriété d'absolue continuité appliquée (voir l'exercice ?? page

??) à $|f|$.

3) D'après ci-dessus, $(f_n - f)_n$ est équi-intégrable. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et soit $\delta > 0$ donné par l'équi-intégrabilité. D'après le théorème d'Egoroff (énoncé page ??), $\exists A \subset \Omega$ tel que $|A| < \delta$ et $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $\Omega \setminus A$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_n - f| &= \int_A |f_n - f| + \int_{\Omega \setminus A} |f_n - f|, \\ &\leq \varepsilon + |\Omega \setminus A| \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega \setminus A)}, \end{aligned}$$

et pour n assez grand le deuxième terme est plus petit que ε .

Exercice 9

1) $f_n(x) = n^{\frac{1}{p}} e^{-nx}$ avec $1 \leq p < \infty$.

$f_n \rightarrow 0$ p.p. sur $]0, 1[$ car par exemple $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de $]0, 1[$. On a

$$\int_0^1 |f_n|^p = \|f_n\|_p^p = \frac{1}{p} (1 - e^{-np}) \rightarrow \frac{1}{p},$$

quand n tend vers l'infini. Donc la suite (f_n) est bornée dans L^p et $f_n \not\rightarrow 0$ dans L^p car $\|f_n\|_p^p \rightarrow \frac{1}{p} \neq 0$.

2) Appliquer l'inégalité de Hölder.

3) Si $1 < p < \infty$, L^p est réflexif et $(f_n)_n$ est bornée donc il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans L^p faible. En particulier, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(]0, 1[)$, $\int_0^1 f_{n_k} \varphi \rightarrow \int_0^1 f \varphi$. Or $f_{n_k} \rightarrow 0$ uniformément sur le support compact de φ donc $\int_0^1 f_{n_k} \varphi \rightarrow 0$ et ceci $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(]0, 1[)$. On en déduit que $f = 0$ p.p. et c'est toute la suite f_n qui converge faiblement vers 0 (raisonner par l'absurde).

Si $p = 1$, supposons que la suite f_n converge faiblement vers 0 dans L^1 faible. Comme $f \mapsto \int_0^1 f \in (L^1)'$, on aurait $\int_0^1 f_n \rightarrow 0$ or $\int_0^1 f_n \rightarrow 1$ donc c'est absurde et $f_n \not\rightarrow 0$ dans L^1 faible.

Si $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans L^1 faible alors comme ci-dessus : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(]0, 1[)$, $\int_0^1 f_{n_k} \varphi \rightarrow \int_0^1 f \varphi$ et $f_{n_k} \rightarrow 0$ uniformément sur le support compact de φ donc $\int_0^1 f \varphi = 0$.

On en déduit que $f = 0$ p.p. mais $\int_0^1 f_{n_k} \rightarrow 1 \neq 0$, donc c'est impossible.

On peut en conclure que $L^1(0, 1)$ n'est pas réflexif.

13.8 Chapitre 8

Exercice 1

D'après le théorème de projection 2.1 page 20, pour tout $h \in C$, on a les deux inégalités, $\operatorname{Re}(f_1 - u_1, h - u_1) \leq 0$ et $\operatorname{Re}(f_2 - u_2, h - u_2) \leq 0$ où $u_i = Pf_i$. On choisit $h = u_2$ dans la première et $h = u_1$ dans la deuxième puis on additionne, on obtient

$$\operatorname{Re}(f_1 - f_2, u_2 - u_1) + \|u_2 - u_1\|^2 \leq 0,$$

donc,

$$\|u_2 - u_1\|^2 \leq \operatorname{Re}(f_2 - f_1, u_2 - u_1) \leq |(f_2 - f_1, u_2 - u_1)|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en conclut que $\|u_2 - u_1\| \leq \|f_2 - f_1\|$.

Exercice 2

***** PARSEVAL *****

Exercice 3

***** BILINEAIRE *****

Exercice 4

*****sin —nx—*****

Exercice 5

1) On note $\mathbb{P}_2 = \text{vect}\{1, x, x^2\}$, c'est un espace vectoriel de dimension finie donc fermé. Par le théorème de projection dans $L^2(-1, 1)$, $\exists! P \in \mathbb{P}_2$ tel que $d(x^3, \mathbb{P}_2) = \|x^3 - P\|$ et $(x^3 - P, v) = 0, \forall v \in \mathbb{P}_2$ où $(,)$ dénote le produit scalaire usuel dans L^2 . En choisissant successivement $v = 1, x, x^2$, on détermine explicitement P et on trouve $P(x) = \frac{3}{5}x$ d'où $\|x^3 - P\|^2 = \int_{-1}^1 |x^3 - \frac{3}{5}x|^2 dx = \frac{8}{175}$.
Si $g \in \mathbb{P}_2^\perp$ alors

$$\begin{aligned} (x^3, g) &= (x^3 - q, g), \quad \forall q \in \mathbb{P}_2, \\ &\leq d(x^3, \mathbb{P}_2)\|g\|, \end{aligned}$$

donc finalement si $g \in \mathbb{P}_2^\perp$ et $\|g\| = 1$ alors $(x^3, g) \leq \|x^3 - P\|$ où $P(x) = \frac{3}{5}x$. Soit $g_0 = \frac{x^3 - P}{\|x^3 - P\|}$ alors $g_0 \in \mathbb{P}_2^\perp, \|g_0\| = 1$ et $(x^3, g_0) = (x^3 - P, g_0) = \|x^3 - P\| = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$ donc

$$\max\left\{\int_{-1}^1 x^3 g(x) dx : g \in \mathbb{P}_2^\perp, \|g\| = 1\right\} = (x^3, g_0) = d(x^3, \mathbb{P}_2).$$

2) Si $x_0 \in H$ et si M est un sous-espace vectoriel fermé de H alors $d(x_0, M) = \|x_0 - P_M x_0\|$ où $P_M x_0$ est la projection orthogonale de x_0 sur M et $(x_0 - P_M x_0, v) = 0, \forall v \in M$. Si $y \in M^\perp, \|y\| = 1$ alors $(x_0, y) = (x_0 - P_M x_0, y) \leq \|x_0 - P_M x_0\|$ donc

$$\max\{(x_0, y) : y \in M^\perp, \|y\| = 1\} \leq \|x_0 - P_M x_0\| = \min\{\|x_0 - x\|, x \in M\},$$

et

$$(x_0 - P_M x_0, \frac{x_0 - P_M x_0}{\|x_0 - P_M x_0\|}) = (x_0, \frac{x_0 - P_M x_0}{\|x_0 - P_M x_0\|}) = \|x_0 - P_M x_0\|.$$

Donc le max est atteint en $y = \frac{x_0 - P_M x_0}{\|x_0 - P_M x_0\|}$ et sa valeur est égale à $d(x_0, M)$ d'où

$$\max\{(x_0, y) : y \in M^\perp, \|y\| = 1\} = \min\{\|x_0 - x\|, x \in M\}.$$

Exercice 6

1) $(S, \|\cdot\|_1)$ est un Banach et on veut montrer que $i : (S, \|\cdot\|_1) \rightarrow L^\infty$ est continue, pour cela on utilise le théorème du graphe fermé, voir l'exercice ?? page ?? . Soit $f_n \rightarrow f$ dans $(S, \|\cdot\|_1)$ et $f_n \rightarrow g$ dans L^∞ , a-t'on $f = g$ p.p. ? oui, car il existe une sous-suite de f_n qui converge p.p. vers f .

D'autre part, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ donc S est fermé dans L^2 et $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_2$.

2) On vient de voir que $(S, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert. On considère la fonction $f_c(x) = \sum_1^n c_i \Phi_i(x)$ où $c = (c_i)_i \in B = \overline{B}(0, 1)$ alors $f_c \in S$ et $\|f_c\|_2^2 = \sum_i |c_i|^2 \leq 1, \forall c \in B$. Donc $\forall c \in B, \|f_c\|_\infty \leq M$. Soit D une partie dénombrable et dense dans B . Comme D est dénombrable, $\exists \Omega' \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega') = 1$ et tel que $\forall x \in \Omega', \forall c \in D, |f_c(x)| \leq M$.
Pour x fixé dans $\Omega', c \mapsto f_c(x)$ est continue sur B , et par densité de D dans B , on a

$|f_c(x)| \leq M, \forall c \in B$ et $\forall x \in \Omega'$. En choisissant convenablement c , on peut facilement montrer que $\sup_{c \in B} |f_c(x)| = (\sum_1^n |\Phi_i(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$. Donc

$$\forall x \in \Omega', \quad \sum_1^n |\Phi_i(x)|^2 \leq M^2.$$

On intègre cette inégalité et on obtient $n \leq M^2$. Donc nécessairement $\dim S < \infty$.

Exercice 7

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

1) Le support de H_k^l est $I_k^l = [\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}]$. Donc si $l = l'$ et $k \neq k'$, les supports de H_k^l et $H_{k'}^{l'}$ sont disjoints donc $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Si $l \neq l'$, par exemple $l > l'$ alors $H_{k'}^{l'}$ est constante sur les intervalles dyadiques de longueur $2^{-l'-1}$ donc est constante sur le support de H_k^l . Comme H_k^l est de moyenne nulle, on en déduit que $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Enfin $\|H_k^l\|_{L^2}^2 = 2^l \int_{I_k^l} 1 dx = 1$. Donc $(H_k^l)_{l,k}$ forme un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

2) Il y a

	1 fonction constante par morceaux sur les intervalles de longueur	$\frac{1}{2}$,
1 + 2	$\frac{1}{4}$,
...
1 + 2 + ... + 2 ^{j-1}	$\frac{1}{2^j}$.

Donc $\text{card}(S_j) = 2^j - 1$. Or W_j est un espace de codimension 1 dans un espace de dimension 2^j , l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j} , donc le système S_j forme une base de W_j .

3) Les fonctions indicatrices des intervalles dyadiques sont denses dans $L^2(0, 1)$ donc $\{1, H_k^l, l \geq 0, k = 0, \dots, 2^l - 1\}$ forme une base orthogonale de $L^2(0, 1)$. Si on enlève la fonction égale à 1, les H_k^l forment une base orthogonale de $\{f \in L^2(0, 1), f \text{ à moyenne nulle}\}$, et par symétrie par rapport à 0 et dilatations, les $H_k^l, l \geq -j, k = -2^l, \dots, 2^l - 1$ forment une base orthogonale des fonctions de $L^2(-2^l, 2^l)$ d'intégrale nulle sur $[-2^j, 0]$ et $[0, 2^j]$.

3) Soit maintenant $f \in L^2(\mathbb{R})$, comme les fonctions à supports compacts sont denses dans L^2 , on peut supposer que f est à support compact. On découpe f en $f = \mathbb{1}_{(0,+\infty)} f + \mathbb{1}_{(-\infty,0)} f$. Soit $g = \mathbb{1}_{(0,+\infty)} f$ alors g est à support compact dans \mathbb{R}^+ , soit $[0, A]$ son support alors $A \leq 2^j$ pour un j . On connaît une base de $L^2(0, 2^j)$ en ajoutant aux H_k^l la fonction $e_1 = 2^{-\frac{j}{2}} \mathbb{1}_{(0,2^j)}$ donc $g = (g, e_1)e_1 + \sum_{i \geq 2} (g, e_i)e_i$ où les e_i pour $i \geq 2$ sont les H_k^l . Alors $\|g - \sum_{i \geq 2} (g, e_i)e_i\|_2 = |(g, e_1)|$.

Montrons que pour $\varepsilon > 0$ on peut choisir j tel que $|(g, e_1)| \leq \varepsilon$. On a

$$|(g, e_1)| = \left| \int_0^A 2^{-\frac{j}{2}} g(x) dx \right| \leq 2^{-\frac{j}{2}} \|g\|_2 \sqrt{A},$$

et on veut rendre ce terme plus petit que ε , il est clair que c'est vrai pour j assez grand. On raisonne de la même façon pour le terme $\mathbb{1}_{(-\infty,0)} f$, donc on approxime arbitrairement bien toute fonction à support compact et par densité toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 8

1) Pour montrer que $(x, 2y) = 2(x, y)$, on applique l'identité du parallélogramme avec $a = x + y$ et $b = y$.

2) On forme $(1) - (2) + (3)$.

3) Il est facile de voir que $(nx, y) = n(x, y)$ si $n \in \mathbb{Z}$. Si $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$, alors $p(x, y) = (px, y) = (\frac{pq}{q}x, y) = pq(\frac{1}{q}x, y)$ donc $(\frac{1}{q}x, y) = \frac{1}{q}(x, y)$ et on en déduit que $(\frac{p}{q}x, y) = \frac{p}{q}(x, y)$. Enfin, par définition de (\cdot, \cdot) , l'application $\lambda \mapsto (\lambda x, y)$ est continue donc on conclut aisément.

Exercice 9

1) Il suffit de voir que $\forall n, \int_0^\infty x^n w(x) dx < \infty$.

On pose $u = \log x$ alors

$$\int_0^\infty x^n w(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)u} e^{-u^2} du < \infty.$$

2) Avec le même changement de variable, on montre que $f \in L_w^2(0, +\infty)$, et $\forall n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n f(x) w(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)u} e^{-u^2} \sin(2\pi u) du, \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u) e^{-(u - \frac{n+1}{2})^2} du, \\ &= (-1)^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u) e^{-u^2} du = 0, \end{aligned}$$

car la fonction intégrée est impaire. Donc $(f, p) = 0, \forall p \in \mathbf{P}$. Si \mathbf{P} est dense dans $L_w^2(0, +\infty)$, on en déduit que $f \equiv 0$ ce qui est absurde.

Exercice 10

On note $\mathcal{V} = \bigcup_n V_n$.

1) V est un Hilbert et a vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (théorème ?? page ??), donc il existe un unique u dans V tel que $a(u, v) = \ell(v), \forall v \in V$. Et, $\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) \leq \|\ell\| \|u\| \implies \|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{V'}$.

2) V_n est fermé dans V donc Lax-Milgram s'applique et il existe un unique $u_n \in V_n$ tel que $\forall v_n \in V_n, a(u_n, v_n) = \ell(v_n)$ et comme en 1), on montre que $\|u_n\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{V'}$. V est réflexif, donc il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u^*$ dans V faiblement.

3) Soit n_0 fixé, comme $V_{n_0} \subset V_n, \forall n \geq n_0$, on a $a(u_n, v) = \ell(v), \forall v \in V_{n_0}$. Or $a(\cdot, v) \in V'$ donc $a(u_{n_k}, v) \rightarrow a(u^*, v), \forall v \in V$. D'où $a(u^*, v) = \ell(v), \forall v \in V_{n_0}$ et ceci $\forall n_0 \geq 1$ donc $a(u^*, v) = \ell(v), \forall v \in \mathcal{V}$. Mais \mathcal{V} est dense dans $V, a(u^*, \cdot) \in V'$ et $\ell \in V'$ donc $a(u^*, v) = \ell(v), \forall v \in V$ et par unicité dans Lax-Milgram, on en déduit que $u = u^*$.

En raisonnant par l'absurde, on voit facilement que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V .

4) $a(u_n - u, u_n - u) = a(u_n - u, u_n) - a(u_n - u, u)$. Le terme $a(u_n - u, u)$ tend vers 0 car $u_n \rightharpoonup u$ faiblement. $a(u_n - u, u_n) = \ell(u_n) - a(u, u_n) = 0$, donc

$$\alpha (\|u_n - u\|)^2 \leq a(u_n - u, u_n - u) \longrightarrow 0.$$

5) $\delta_n = d(u, V_n) = \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|$.

a) V_n est convexe fermé donc par le théorème de projection il existe un unique $v_n \in V_n$ tel que $\delta_n = \|u - v_n\|$.

b) Comme $V_n \subset V_{n+1}, \delta_{n+1} \leq \delta_n$. La suite $(\delta_n)_n$ est décroissante positive donc

elle converge. D'autre part, $\overline{\bigcup V_n} = V$ donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\|u - w_N\| \leq \varepsilon$ où $w_N \in V_N$. Donc $\delta_n \leq \varepsilon$ et ceci $\forall n \geq N$, d'où $\delta_n \rightarrow 0$.

c) $\forall w \in V_n, a(u_n, w) = \ell(w) = a(u, w)$ donc $a(u_n - u, w) = 0$. Donc si $w \in V_n$,

$$\begin{aligned} a(u_n - u, u - u_n) &= a(u_n - u, u) = a(u_n - u, u - w) \\ \implies \alpha \|u_n - u\|^2 &\leq a(u - u_n, u - w) \leq \beta \|u_n - u\| \|u - w\|, \quad \forall w \in V_n, \\ &\implies \|u_n - u\| \leq \frac{\beta}{\alpha} \delta_n. \end{aligned}$$

Questions subsidiaires :

1) $\dim V = +\infty \implies p_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty$. En effet, sinon $\exists A > 0, \exists (p_{n_k})_k$ une sous-suite telle que $p_{n_k} \leq A, \forall k$. Or $V_n \subset V_{n+1} \implies p_n \leq p_{n+1}$ donc $\forall n, \exists k$ tel que $v_n \subset V_{n_k}$ d'où $p_n \leq A, \forall n$ alors $\dim \mathcal{V} \leq A$ et $\mathcal{V} = V \implies \dim V \leq A$, ce qui est absurde.

2) Comme chaque V_n est séparable, que leur union est dense dans V et qu'une union d'ensembles dénombrables est dénombrable, on voit facilement que V est séparable.

13.9 Chapitre 9

Exercice 1

Soit $f \in L^1(-\pi, \pi)$, 2π périodique sur \mathbb{R} .

(i) On note $\gamma_k = c_k(g)$ et $c_k = c_k(f)$ alors

$$\gamma_{k-1} - \gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)(e^{ix} - 1)e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx = c_k.$$

Donc,

$$\sum_{-N}^M c_k = \sum_{-N}^M (\gamma_{k-1} - \gamma_k) = \gamma_{-N-1} - \gamma_M \rightarrow 0,$$

quand N et M tendent vers ∞ par le lemme de Riemann-Lebesgue. D'où $S_{N,M}f(0) \rightarrow 0$ quand N et M tendent vers ∞ .

(ii) On pose $\tilde{f}(u) = f(y+u) - c$. Par hypothèse, $\frac{\tilde{f}(u)}{u} \in L^1(-\pi, \pi)$ et

$$\left| \frac{\tilde{f}(u)}{e^{iu} - 1} \right| = \left| \frac{\tilde{f}(u)}{e^{iu/2} 2i \sin(\frac{u}{2})} \right| = \left| \frac{\tilde{f}(u)}{2 \sin(\frac{u}{2})} \right| \leq \frac{\pi}{2} \left| \frac{\tilde{f}(u)}{u} \right| \in L^1.$$

Donc par le point (i), $S_{N,M}\tilde{f}(0) \rightarrow 0$ quand N et M tendent vers ∞ . Or,

$$S_{N,M}\tilde{f}(0) = \sum_{-N}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(y+u) - c)e^{-inu} du,$$

donc,

$$S_{N,M}\tilde{f}(0) = \left(\sum_{-N}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y+u)e^{-inu} du \right) - c,$$

puisque $\sum_{-N}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inu} du = 1$. D'où,

$$S_{N,M}\tilde{f}(0) = \sum_{-N}^M \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-inz} dz \right) e^{iny} - c,$$

$$S_{N,M}\tilde{f}(0) = S_{N,M}f(y) - c \rightarrow 0,$$

quand N et M tendent vers $+\infty$.

Exercice 2

***** CONVOLUTION PER *****

Exercice 3

- 1) D'abord, si $a, b \in \ell^2$ alors le produit $ab \in \ell^1 \subset \ell^2$. Par le théorème 9.2 on a $c(s(a) * S(b)) = 2\pi c(s(a))c(s(b)) = 2\pi ab$. Donc, $2\pi S(ab) = S(c(s(a) * S(b))) = S(a) * S(b)$ par la formule d'inversion.
- 2) Par l'exercice 7 à la fin du chapitre, on a

$$S(b^N)(x) = \sum_{-N}^N e^{ikx} = h_N(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})},$$

si $x \neq 0$ et $S(b^N)(0) = h_N(0) = 2N + 1$.

- 3) Il suffit de remarquer que

$$S_N f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) c_k(b^N) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} S(c(f)) * S(b^N),$$

donc $S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} S(b^N) * f = \frac{1}{2\pi} h_N * f$.

Exercice 4

***** BH *****

Exercice 5

Nous commençons par établir la formule

$$\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos(kx) - \frac{1}{2} \cos(nx) = \frac{\sin(nx)}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \tag{9.1}$$

qui résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_1^n \cos nx &= \frac{1}{2} \sum_{-n}^n e^{ikx} = \frac{1}{2} e^{-inx} \left(\frac{e^{(2n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{ix(n+\frac{1}{2})} - e^{-ix(n+\frac{1}{2})}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos nx}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin nx}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{\cos nx}{2}. \end{aligned}$$

Puis on intègre cette relation entre 0 et x et on soustrait des deux cotés $\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt$. On remarque que la fonction $\frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ est C^1 . En effet, en développant au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} &= \frac{t \cos \frac{t}{2} - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} \\ &= \frac{t(1 - \frac{t^2}{8}) - 2(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48}) + o(t^3)}{t^2 - \frac{t^4}{24} + o(t^4)} = \frac{t^3(-\frac{1}{8} + \frac{1}{24}) + o(t^3)}{t^2 - \frac{t^4}{24} + o(t^4)} \\ &= -\frac{t}{12} + o(t). \end{aligned}$$

On peut donc intégrer par parties $\int_0^x ((\sin(nt))(\frac{\operatorname{Cotg}(\frac{t}{2})}{2} - \frac{1}{t}) + \frac{\cos(nt)}{2})$, et cette expression est donc majorée par $\frac{C}{n}$ pour une constante C adéquate.

Exercice 6

1) Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $|s_j - s| \leq \varepsilon$ et

$$\frac{1}{n+1} \sum_0^n s_j - s = \frac{1}{n+1} \sum_0^n (s_j - s).$$

Donc pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_0^n s_j - s \right| &\leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_0^N |s_j - s| + \sum_{N+1}^n |s_j - s| \right), \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_0^N |s_j - s| + (n - N)\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Pour cet $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \geq N$ tel que $\sum_0^N |s_j - s| \leq N_1\varepsilon$, donc si $n \geq N_1$, on a

$$\sum_0^N |s_j - s| \leq N_1\varepsilon \leq (n+1)\varepsilon \text{ et d'autre part } (n - N)\varepsilon \leq (n+1)\varepsilon \text{ d'où}$$

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_0^n s_j - s \right| \leq 2\varepsilon.$$

2) Soit $s_n = (-1)^n$ alors $(s_n)_n$ ne converge pas et $\left| \sum_0^n s_j \right| \leq 1$ donc

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_0^n (-1)^j \right| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Exercice 7

1) On a directement $D_N(0) = 2N + 1$ et $K_N(0) = N + 1$.

D'autre part, $e^{i\frac{t}{2}} D_N(t) = \sum_{-N}^N e^{i(k+\frac{1}{2})t}$ et $e^{-i\frac{t}{2}} D_N(t) = \sum_{-N}^N e^{i(k-\frac{1}{2})t}$ donc $2i\sin(\frac{t}{2})D_N(t) =$

$$\sum_{-N}^N (e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{i(k-\frac{1}{2})t}) = e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}.$$

D'où $D_N(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ si $t \neq 0$.

On multiplie maintenant $K_N(t)$ par $\frac{2\sin(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}$ alors

$$K_N(t) = \frac{1}{2(N+1)} \frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})} (2\sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t}{2}) + 2\sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{3t}{2}) + \dots + 2\sin(\frac{t}{2})\sin((N+\frac{1}{2})t)).$$

On utilise ensuite l'égalité $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ pour obtenir

$$K_N(t) = \frac{1}{2(N+1)} \frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})} (1 - \cos(N+1)t) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{t}{2})},$$

pour $t \neq 0$.

2) Il est clair que $K_N(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et que K_N est 2π -périodique. De

$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = 2\pi\delta_{k,0}$ on déduit que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} D_j(t) dt = 1$ et $\|K_N\|_1 = 1$. Enfin si $\delta \leq |t| \leq \pi$ où $\delta > 0$, on a

$$K_N(t) \leq \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})} \right)^2 \longrightarrow 0,$$

quand $N \rightarrow \infty$.

3) On a

$$\begin{aligned} S_n(f, t) &= \sum_{-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt}, \\ &= \sum_{-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ik(t-x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(t-x) dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t-x) dx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) K_n(x) dx, \end{aligned}$$

car f et K_n sont 2π -périodiques. Comme $\|K_N\|_1 = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f, t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x) - f(t)) K_n(x) dx \right|, \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq \delta} |f(t-x) - f(t)| K_n(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} 2\|f\|_{\infty} K_n(x) dx. \end{aligned}$$

La fonction f étant uniformément continue, pour $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $|x - y| \leq \delta$. Pour ce δ , d'après 2), $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$ $|K_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{\infty}}$, $\forall x$ tel que $\delta \leq |x| \leq \pi$, d'où

$$|\sigma_n(f, t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|K_N\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} dx \leq \varepsilon,$$

et ceci $\forall t$, donc $\sigma_n(f) \rightarrow f$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

4) $\sigma_n(f, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t-x) dx$ est un polynôme trigonométrique, donc 3) montre que les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\Pi)$.

Si $f, g \in \mathcal{C}(\Pi)$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ alors $0 = \sigma_n(f, t) - \sigma_n(g, t) \rightarrow f(t) - g(t)$, $\forall t$, donc $f(t) = g(t)$, $\forall t \in [-\pi, \pi]$.

5) a) $\Lambda_n(f) = S_n(f, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(-t) dt$, pour $n \geq 0$ donc Λ_n est linéaire et $|\Lambda_n(f)| \leq \|D_n\|_1 \|f\|_{\infty}$. Donc $\Lambda_n \in (\mathcal{C}(\Pi))'$ et $\|\Lambda_n\| \leq \|D_n\|_1$.

b) Soit $g_n(t) = \text{sign}(D_n(-t))$ alors il existe une suite $(f_j)_j$ dans $\mathcal{C}(\Pi)$ telle que $-1 \leq f_j \leq 1$, $\forall j$ et $f_j(t) \rightarrow g_n(t)$ p.p. quand $j \rightarrow \infty$. Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j(t) D_n(-t) dt \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(-t)| dt = \|D_n\|_1.$$

De $|\Lambda_n(f_j)| \leq \|\Lambda_n\|$, on déduit $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$.

c) Comme $|\sin \frac{t}{2}| \leq \frac{|t|}{2}$, pour $0 \leq t \leq \pi$,

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right| \frac{dt}{t}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \|D_n\|_1 &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin x| \frac{dx}{x} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| \frac{dx}{x}, \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi^2} \sum_1^n \frac{1}{k} \geq \frac{4}{\pi^2} \log(n+1), \end{aligned}$$

D'où $\|D_n\|_1 \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

d) Si $\forall f \in \mathcal{C}(\Pi)$, $\exists C_f$ tel que $\forall n$, $|S_n(f, 0)| \leq C_f$ alors par le théorème de Banach-Steinhaus $\exists M$ tel que $\forall n$, $\|A_n\| \leq M$ or c'est impossible d'après la question précédente. Donc $\exists f \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\sup_n |S_n(f, 0)| = +\infty$.

6) D'après la question 4), on peut voir facilement que $\int_{-\pi}^{\pi} f g dx = 0$, $\forall g \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$.

Maintenant, si on note $h = \text{sign}(f)$. Comme les fonctions continues sont denses dans $L^1(-\pi, \pi)$, $\exists (g_n)_n \subset \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ telle que $\|h - g_n\|_1 \rightarrow 0$. On peut aussi supposer que $g_n \rightarrow h$ p.p. et $|g_n| \leq 1$ pour tout n (grâce à la réciproque du théorème de convergence dominée voir ?? page ??).

On applique ensuite le théorème de convergence dominée à la suite $(fg_n)_n$ (chapeau intégrable $:|f|$) et on en déduit que $f = 0$ p.p.

7) Par le Lemme de Riemann-Lebesgue, on sait déjà que $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \pm\infty$ donc $c(f) \in C_0(\mathbb{Z})$. On a aussi immédiatement $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$.

L'application T est clairement linéaire et l'inégalité ci-dessus montre qu'elle est continue. Si $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout n alors $\int_{-\pi}^{\pi} f p dx = 0$, pour tout polynôme trigonométrique p donc $f = 0$ p.p. et T est injective. T ne peut être surjective sinon par le théorème de l'application ouverte, voir l'exercice ?? page ?? ($C_0(\mathbb{Z})$ est un espace de Banach), elle serait d'inverse continue et il existerait une constante $M >$ telle que $\|f\|_1 \leq M \|c(f)\|_{\infty}$. Mais une telle inégalité est contredite par les D_n , en effet $\widehat{D}_n(k) = 0$ ou 1 , donc $\|c(D_n)\|_{\infty} = 1$ alors qu'on a vu ci-dessus que $\|D_n\|_1 \rightarrow +\infty$.

13.10 Chapitre 11

Exercice 1

On peut remarquer que le corollaire ?? page ??, reste vrai si on remplace l'ensemble $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ par $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ puisqu'on sait maintenant que $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Si les deux distributions \tilde{u} et \tilde{v} sont égales, cela veut exactement dire que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, $\int (u - v)\varphi = 0$, on peut donc en conclure que $u = v$ p.p.

Exercice 2

On peut déjà remarquer que toutes les applications proposées sont linéaires. Soit J compact $\subset \mathbb{R}$, soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ avec $\text{Support} \varphi \subset J$, si $x \notin J$, $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x) = 0$ et $\langle \delta_x^{(k)}, \varphi \rangle = |\varphi^{(k)}(x)| = 0$. Maintenant, si $x \in J$, on a $|\langle \delta_x, \varphi \rangle| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{L^{\infty}(J)}$ et $|\langle \delta_x^{(k)}, \varphi \rangle| = |\varphi^{(k)}(x)| \leq \|\varphi^{(k)}\|_{L^{\infty}(J)}$ donc dans tous les cas, il est facile de voir que δ_x et $\delta_x^{(k)}$ sont des distributions sur \mathbb{R} , (prendre $C = 1$, $p = 0$ pour δ_x et $C = 1$, $p = k$ pour $\delta_x^{(k)}$). Soit toujours J compact $\subset \mathbb{R}$, alors $J \subset [-N, N]$ où $N \in \mathbb{N}$, et pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans J , on a

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq \sum_{-N}^N |\varphi(2\pi n)| \leq (2N+1) \|\varphi\|_{L^{\infty}(J)},$$

donc $C = 2N + 1$ et $p = 0$ conviennent, u est une distribution.

Exercice 3

Si u_n converge vers u dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors pour tout K compact de \mathbb{R} et pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ à support dans K , on a

$$\left| \int_K (u_n - u)\varphi \right| \leq \|u_n - u\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_{L^\infty(K)}$$

, donc la suite $(u_n)_n$ converge vers u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 4

***** ORDRE ET MESURE *****

Exercice 5

***** FN * distrib *****

Exercice 6

***** DERIVEE DE DIRAC *****

Exercice 7

***** TRANSLATION DE DISTRIBUTION *****

Exercice 8

1) Les deux applications proposées sont bien linéaires par rapport à φ .

On pose $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(n)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$.

Soit K un compact de \mathbb{R} alors $|K \cap \mathbb{N}| < \infty$ et $\exists N_K$ tel que $K \cap \mathbb{N} \subset \overline{B}(0, N_K)$.

Si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ est à support dans K , alors $|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum_0^{N_K} \|\varphi^{(n)}\|_\infty$ donc

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soit $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(0)$. Il existe $\theta \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta \equiv 1$ sur $[-1, 1]$. Soit $\varphi(x) = e^x \theta(x)$, alors $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ et $\forall n, \varphi^{(n)}(0) = 1$ donc $T \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2) Soit K un compact de \mathbb{R} et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ à support dans K alors $|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_\infty$ donc $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = \int f \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$. Par un même raisonnement qu'à l'exercice 6 du chap.VII, on montre que c'est impossible.

Exercice 9

Comme les semi-normes p_j , pour $j \geq 0$, forment une suite croissante, on a bien défini une topologie.

1) Il est clair que $d(f, g) = d(g, f)$ et que $d(f, g) = 0 \iff f = g$.

Soit $\Phi(x) = \inf(1, x)$ pour $x \geq 0$. On peut vérifier facilement que Φ est croissante et que $\Phi(x + y) \leq \Phi(x) + \Phi(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ donc d est bien une distance sur E . Pour montrer que les topologies sont équivalentes, il suffit de montrer que

a) $\forall n, \forall r > 0, \forall x \in E, \exists r_0 > 0$ tel que $B_d(x, r_0) \subset B_n(x, r)$,

b) $\forall x \in E, \forall r > 0, \exists N, \exists r_0 > 0$ tel que $B_N(x, r_0) \subset B_d(x, r)$,

où on a noté $B_d(x, r)$ la boule de centre x et rayon r pour la distance d et

$B_n(x, r)$ celle associée à la semi-norme p_n .

Soient donc n, r, x donnés alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $2^n \varepsilon < \inf(1, r)$ et

$d(x, y) < \varepsilon \implies \forall k, \frac{1}{2^k} \Phi(p_k(x - y)) < \varepsilon$ donc $p_n(x - y) < 2^n \varepsilon < r$ par choix de ε . D'où $B_d(x, \varepsilon) \subset B_n(x, r)$.

Soient x, r donnés et soit N tel que $\sum_{n \geq N+1} \frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$.

Si $p_N(x - y) < r_0 < 1 \implies \forall n \leq N, p_n(x - y) < r_0$ et

$$\sum_0^N \frac{1}{2^n} \inf(1, p_n(x - y)) \leq r_0 \sum_0^N \frac{1}{2^n} \leq 2r_0.$$

On choisit $r_0 < 1$ tel que $2r_0 < \frac{r}{2}$ alors $y \in B_N(x, r_0) \implies d(x, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2}$, ($\Phi(x) \leq 1, \forall x \geq 0$) donc $B_N(x, r_0) \subset B_d(x, r)$.

Donc les topologies sont équivalentes.

2) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans (E, d) alors $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p_j(f_n - f_m) = 0$

pour chaque $j \geq 0$, et donc $\sup_K |f_n^{(j)}(x) - f_m^{(j)}(x)| \rightarrow 0$ pour chaque j . La

suite $(f_n^{(j)})_n$ est donc de Cauchy pour la convergence uniforme et elle tend donc

uniformément vers une limite f_j qui est continue et à support dans K . On utilise

maintenant le théorème classique assurant que si f_n converge uniformément

vers u et si les dérivées f'_n sont continues et convergent uniformément vers v

alors u est \mathcal{C}^1 et $u' = v$. En appliquant ce résultat par récurrence aux dérivées

successives de u , on obtient que $f_n^{(j)}$ converge uniformément vers $u^{(j)}, \forall j$ et

donc que $p_j(f_n - u) \rightarrow 0, \forall j$. On en déduit facilement que (E, d) est complet.

Pour tout n, T_n est continue sur $(E, (p_j)_j)$ donc sur (E, d) donc F_k est fermé

dans (E, d) comme intersection d'images réciproques de fermés de \mathbb{R} . Comme

$(\langle T_n, \varphi \rangle)_n$ converge $\forall \varphi, E = \cup_k F_k$, par le Lemme de Baire, on en déduit

que $\exists k_0, \exists \varphi$ et $\exists r_0 > 0$ tels que $B_d(\varphi, r_0) \subset F_{k_0}$.

D'après 1), $\exists N \geq 0, \exists r > 0$ tels que $B_N(\varphi, r) \subset F_{k_0}$. Alors $B_N(0, \frac{r}{2}) \subset F_{k_0}$, en

effet, si $\psi \in B_N(0, \frac{r}{2})$ alors $\psi = \frac{1}{2}(-\varphi + (\varphi + 2\psi))$ or $-\varphi \in F_{k_0}$ et $\varphi + 2\psi \in F_{k_0}$,

par convexité de F_{k_0} , on a $\psi \in F_{k_0}$.

Donc on a montré que $\forall \varphi \in E$ telle que $p_N(\varphi) < \frac{r}{2}$, on a $|\langle T_n, \varphi \rangle| \leq k_0$,

$\forall n$. Par homogénéité, on en conclut que $\forall n, |\langle T_n, \varphi \rangle| \leq \frac{2k_0}{r} p_N(\varphi), \forall \varphi \in E$.

Maintenant on fait tendre n vers l'infini, on en déduit que $|\langle T, \varphi \rangle| \leq$

$\frac{2k_0}{r} p_N(\varphi)$. Finalement, on a montré que $\forall K$ compact $\subset \mathbb{R}, \exists C_K = \frac{2k_0}{r}, \exists N(K)$

tels que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_{c,K}^\infty(\mathbb{R}), |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K p_N(\varphi)$ ce qui est exactement la

continuité de T sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 10

a) Si $\varphi = \lambda \theta_0 + \psi'$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ alors $\int_I \varphi = \lambda \int_I \theta_0 + \int_I \psi'$ donc nécessairement $\lambda = \int_I \varphi$. Avec ce choix de λ , trouvons ψ .

$\exists a, b$ tels que $\text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\theta_0) \subset [a, b] \subset I$ (I connexe). Soit $\psi(x) = \int_a^x (\varphi(t) -$

$(\int_I \varphi) \theta_0(t)) dt$ alors $\psi' = \varphi - (\int_I \varphi) \theta_0$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Vérifions que ψ est à

support compact. Si $x \in]-\infty, a[\cap I$ alors $\forall t \in [a, x] \varphi(t) = \theta_0(t) = 0$ et

$\psi(x) = 0$. Si $x \in]b, \infty[\cap I$ alors $\psi(x) = 0$ donc $\text{supp}(\psi) \subset [a, b]$ et $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

(On peut remarquer que le couple (λ, ψ) est unique.)

b) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' = 0$, on veut montrer que $\exists C \in \mathbb{R}$ telle que

$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \langle T, \varphi \rangle = C \int_I \varphi$, ce qui veut bien dire que $T = C$ au sens des distributions

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ alors $\exists \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que $\varphi = (\int_I \varphi) \theta_0 + \psi'$ et $\langle T, \varphi \rangle =$

$(\int_I \varphi) \langle T, \theta_0 \rangle + \langle T, \psi' \rangle$. Or par hypothèse $\langle T, \psi' \rangle = \langle T', \psi \rangle = 0$ donc

$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \theta_0 \rangle \int_I \varphi$ donc $C = \langle T, \theta_0 \rangle$ convient.

c) Par hypothèse $T' = v \in \mathcal{C}^\infty(I)$, c'est à dire $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \langle T', \varphi \rangle = \int_I v \varphi$.

La fonction v admet une primitive au sens usuel V et $v = V'$ alors $(T - V)' = 0$

donc $T - V = c$ constante par b) et $T = V + c \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exercice 11

Soit ψ solution de $\sum_{j=0}^k a_j \psi^{(j)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, où $a_j \in \mathbb{R}$ et $a_k \neq 0$, satisfaisant

$\psi(0) = \psi'(0) = \dots = \psi^{(k-2)}(0) = 0$ et $\psi^{(k-1)}(0) = \frac{1}{a_k}$ alors $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1) $Y\psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculons les dérivées au sens des distributions de E et montrons par récurrence que

$$E^{(p)} = T_{Y\psi^{(p)}} + \psi^{(p-1)}(0)\delta_0 + \psi^{(p-2)}(0)\delta'_0 + \dots + \psi(0)\delta_0^{(p-1)}.$$

On calcule d'abord E' ,

$$\begin{aligned} \langle E', \varphi \rangle &= - \langle E, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \psi \varphi', \\ &= \int_0^\infty \psi' \varphi + \psi(0)\varphi(0), \\ &= \langle T_{Y\psi'}, \varphi \rangle + \langle \psi(0)\delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $p = 1$, on la suppose vraie jusqu'au rang p et démontrons la pour $p + 1$. On a

$$\begin{aligned} \langle E^{(p+1)}, \varphi \rangle &= - \langle E^{(p)}, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \psi^{(p)} \varphi' - \langle \psi^{(p-1)}(0)\delta_0, \varphi' \rangle - \dots - \langle \psi(0)\delta_0^{(p-1)}, \varphi' \rangle, \\ &= \int_0^\infty \psi^{(p+1)} \varphi + \langle \psi^{(p)}(0)\delta_0, \varphi \rangle + \langle \psi^{(p-1)}(0)\delta'_0 + \dots + \psi(0)\delta_0^{(p)}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Ici $E^{(j)} = T_{Y\psi^{(j)}}$, $\forall j \leq k-1$ car $\psi^{(p)}(0) = 0$, $\forall p \leq k-2$, et

$$E^{(k)} = T_{Y\psi^{(k)}} + \psi^{(k-1)}(0)\delta_0 = T_{Y\psi^{(k)}} + \frac{1}{a_k}\delta_0.$$

Donc $\sum_{j=0}^k a_j E^{(j)} + a_k E^{(k)} = \delta_0$ par hypothèse sur ψ .

2) On cherche ψ telle que

$$(\star) \quad \begin{cases} \psi'' + \psi' + \psi = 0 \\ \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = 1 \end{cases}$$

Les solutions générales du système (\star) sont données par

$$\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}}(ae^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + be^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Ici les données initiales impliquent que $a = -b = \frac{1}{i\sqrt{3}}$, donc $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ et $E = T_{Y\psi}$ convient.

13.11 Chapitre 12

Exercice 1

1) Avec les mêmes notations que le cours, on a $\|u\|_{H^m}^2 \leq \|u\|_{W^{m,2}}^2$ et par exemple, pour tout $n \leq m$, $\|u^{(n)}\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^m}$ donc $\|u\|_{W^{m,2}}^2 \leq m \|u\|_{H^m}$.

2) Si $I \subset J$ et $u \in W^{n,p}(J)$ alors $u \in L^p(I)$ et pour tout $k \leq n$, $u^{(k)} \in L^p(I)$ donc $u \in W^{n,p}(I)$.

Exercice 2

Soit \tilde{f} une forme linéaire continue sur $E \times F$. Par linéarité, on peut poser $\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(x, 0) + \tilde{f}(0, y) = f(x) + g(y)$. On déduit immédiatement de la continuité de \tilde{f} que f et g sont continues respectivement sur E et F . On peut donc écrire $\tilde{f} = (f, g)$ avec $f \in E'$, $g \in F'$.

Exercice 3

1) On a $u(x) = u(y) + \int_y^x u'(t) dt$. Si $1 \leq p < \infty$, par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|u(x)| \leq |u(y)| + |x - y|^{\frac{1}{p'}} \|u'\|_{L^p(I)}.$$

On peut intégrer cette relation en y sur un intervalle J contenant x et de mesure 1 par exemple, on obtient alors

$$|u(x)| \leq \int_J |u(y)| dy + \|u'\|_p$$

et à nouveau, par Hölder,

$$|u(x)| \leq \|u\|_p + \|u'\|_p = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Dans le cas $p = \infty$, on a $|u(x)| \leq |u(y)| + |x - y| \|u'\|_\infty$ et en choisissant comme ci-dessus J de mesure 1, $|u(x)| \leq \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$.

2) Soit f la "distribution" $\sum_{n=1}^N \delta_{x_i}$ où les points x_i sont dans I alors $|\langle f, u \rangle|$

$|\leq \sum_{n=1}^N |u(x_i)|$ et d'après la question 1), $|\langle f, u \rangle| \leq N \|u\|_{W^{1,p}}$ donc f est

bien dans le dual de $W^{1,p}(I)$.

3) Prendre $\varphi \in C_c^\infty$ avec $\varphi(0) \neq 0$. Alors si H est la fonction de Heavyside, $(\varphi H)' = \varphi(0)\delta_0 + \varphi'H$. Donc $\delta_0 = \frac{1}{\varphi(0)}((\varphi H)' - \varphi'H)$. Il suffit donc de poser $\varphi H = f$ et $\varphi'H = g$.

Exercice 4

***** PROLONGEMENT *****

Exercice 5

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné alors il existe un prolongement Pu de u dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ et par densité des fonctions C^∞ à support compact dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$, il existe une suite $(u_n)_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|Pu - u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \rightarrow 0$. Comme $\|u - u_n\|_{W^{1,p}(I)} \leq \|Pu - u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$, il existe bien une suite $(u_n)_n \in C^\infty(\bar{I})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(I)$.

Exercice 6

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné et soit $u \in W_0^{1,p}(I)$, on a par l'inégalité de Hölder et pour $x \in I$,

$$|u(x)| \leq \int_a^x |u'| dt \leq |x - a|^{\frac{1}{p'}} \|u'\|_p.$$

Donc $|u(x)|^p \leq (x - a)^{\frac{p}{p'}} \|u'\|_p^p$. En intégrant sur I , on obtient

$$\|u\|_p^p \leq \|u'\|_p^p \int_a^b (x - a)^{\frac{p}{p'}} dx,$$

d'où $\|u\|_p^p \leq \|u'\|_p^p (b - a)^{1 + p/p' = p}$.

Exercice 7

On va montrer $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

Pour $(i) \Rightarrow (iii)$, on écrit $u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)dt$ et en appliquant Hölder, on a

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq \left| \int_x^{x+h} u' \right|^p \leq h^{\frac{p}{p'}} \|u'\|_{L^p(x, x+h)}^p.$$

Soient ω un ouvert relativement compact dans I et h comme dans l'énoncé, alors

$$\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq h^{\frac{p}{p'}} \int_{\omega} \int_x^{x+h} |u'|^p dt dx.$$

On effectue le changement de variable $t = x+sh$ alors $\int_x^{x+h} |u'|^p dt = h \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds$. Donc

$$\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq |h|^p \int_{\omega} \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds dx.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{\omega} \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds dx = \int_0^1 \int_{\omega+sh} |u'(y)|^p dy ds \leq \|u'\|_p^p \int_0^1 ds,$$

d'où

$$\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq |h|^p \|u'\|_p^p.$$

Donc $C = \|u'\|_p$ convient et (iii) est démontré.

Pour $(iii) \Rightarrow (ii)$, soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ et $\omega \subset\subset I$ tel que le support de $\varphi \subset \omega$, enfin soit h comme dans l'énoncé, on peut toujours écrire $\int_I (u(x+h) - u(x))\varphi(x)dx = \int_I u(x)(\varphi(x-h) - \varphi(x))dx$. D'autre part, par Hölder, on a

$$\left| \int_I (u(x+h) - u(x))\varphi(x)dx \right| \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \|\varphi\|_{L^p(\omega)} \leq C|h| \|\varphi\|_{p'}.$$

Donc,

$$\left| \int_I u(x) \frac{(\varphi(x-h) - \varphi(x))}{|h|} dx \right| \leq C \|\varphi\|_{p'},$$

et quand $h \rightarrow 0$, on en déduit que $\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{p'}$.

Enfin pour $(ii) \Rightarrow (i)$, on considère la forme linéaire $T : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I) \mapsto \int_I u\varphi'$.

Elle est continue sur $\mathcal{C}_c^1(I)$ dense dans $L^{p'}(I)$, par le théorème de prolongement ou de Hahn-Banach, elle se prolonge à $L^{p'}(I)$ en une forme linéaire continue sur $L^{p'}(I)$, encore notée T . Par le théorème de Riesz, il existe $f \in L^p(I)$ telle que $T(g) = \int fg$, pour toute $g \in L^{p'}(I)$. En particulier, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, $T(\varphi) = \int u\varphi' = \int f\varphi$, donc $u' = -f \in L^p$ et $u \in W^{1,p}(I)$.

Exercice 8

1) En vertu du théorème 7.1 et de la Proposition 7.1 du Chapitre 12, si $u \in H^1(0, 1)$ alors $u \in \mathcal{C}[0, 1]$ et $\forall x, y \in [0, 1]$, $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt$.

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_2 |x - y|^{\frac{1}{2}} \leq \|u'\|_2 |x - y|.$$

On intègre cette inégalité par rapport à y et on applique encore Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_0^1 |u(y)| dy + \|u'\|_2 \\ &\leq \|u\|_2 + \|u'\|_2 \\ &\leq 2\|u\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Donc $\|u\|_\infty \leq 2\|u\|_{H^1}$ et l'injection $id : H^1(0, 1) \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ est continue.

De $|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_2 |x - y|^{\frac{1}{2}}$, on déduit que la boule unité fermée B_{H^1} de $H^1(0, 1)$ est équicontinue. Enfin, $B_x = \{u(x), u \in B_{H^1}\} \subset [-2, 2]$ donc $\overline{B_x}$ est compact. Par le théorème d'Ascoli, on en conclut que B_{H^1} est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}[0, 1]$, d'où l'injection $id : H^1(0, 1) \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ est compacte.

L'intérêt majeur de ce résultat est que l'on pourra transformer toute suite faiblement convergente de $H^1(0, 1)$ en une suite fortement convergente de $\mathcal{C}[0, 1]$. (Voir l'exercice ?? page ??)

2) Soient $u, v \in H_0^1(0, 1)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ alors par le théorème 12.2, il existe $u_n, v_n \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[)$ tels que $u_n \rightarrow u$ et $v_n \rightarrow v$ pour la norme H^1 . Comme u_n, v_n sont régulières et nulles au bord, on a évidemment $\int_0^1 u_n' v_n + \int_0^1 u_n v_n' = 0$ et $\int_0^1 u_n' f + \int_0^1 u_n f' = 0$. Le produit scalaire $(f, g) = \int_0^1 f g dx$ étant continu sur $(L^2)^2$, il n'y a aucuns problèmes pour passer à la limite dans ces égalités et on obtient donc

$$(1) \quad \int_0^1 u' v + \int_0^1 u v' = 0,$$

$$(2) \quad \int_0^1 u' f + \int_0^1 u f' = 0,$$

et ceci $\forall u, v \in H_0^1(0, 1)$.

Si $u \in H^1(0, 1)$, on note $p_u(x) = xu(1) + (1-x)u(0) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ alors $u - p_u \in H_0^1(0, 1)$. En appliquant la formule d'intégration par parties (2) à $u - p_u$ et p_u , on obtient

$$\int_0^1 u' f + \int_0^1 u f' = \int_0^1 p_u' f + \int_0^1 p_u f' = u(1)f(1) - u(0)f(0).$$

Maintenant si $u, v \in H^1(0, 1)$, alors de $\int_0^1 (u - p_u)'(v - p_v) + \int_0^1 (u - p_u)(v - p_v)' = 0$, on déduit que $\int_0^1 (u - p_u)' v + \int_0^1 (u - p_u) v' = 0$ (car $\int_0^1 (u - p_u)' p_v + \int_0^1 (u - p_u) p_v' = 0$). Donc, en développant,

$$\int_0^1 u' v + \int_0^1 u v' = \int_0^1 p_u' v + \int_0^1 p_u v' = u(1)v(1) - u(0)v(0).$$

Exercice 9

1) Soit $a(u, v) = \int_0^1 u' v' + (\int_0^1 u)(\int_0^1 v)$, alors a est bilinéaire symétrique et $|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|u\|_2 \|v\|_2 \leq 2\|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$ donc a est continue sur $H^1(0, 1) \times H^1(0, 1)$. Montrons que a est coercive, c'est à dire, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u \in H^1(0, 1)$, $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$.

On raisonne par l'absurde, sinon, $\forall n, \exists u_n \in H^1(0, 1)$ tel que $a(u_n, u_n) < \frac{1}{n} \|u_n\|_{H^1}^2$. On peut toujours supposer que $\|u_n\|_{H^1} = 1$, comme $H^1(0, 1)$ est réflexif, il existe une sous-suite encore notée u_n telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1(0, 1)$ faible. L'injection $H^1(0, 1) \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ étant compacte (voir l'exercice 8 page 100), $u_n \rightarrow u$ pour $\|\cdot\|_\infty$ et en particulier $u_n \rightarrow u$ dans L^1 et L^2 . D'autre

part, $\|u'_n\|_2 < \frac{1}{n} \implies u'_n \rightarrow 0$ dans L^2 , donc finalement u_n est de Cauchy dans $H^1(0,1)$ donc converge et $\exists v \in H^1(0,1)$ tel que $u_n \rightarrow v$ dans $H^1(0,1)$. Alors, $\|v\|_{H^1} = 1$ et $v' = 0$ p.p. donc d'après l'exercice 9 page 93, v est constante.

Enfin, de $\left(\int_0^1 u_n\right)^2 < \frac{1}{n}$ et $u_n \rightarrow v$ dans L^1 , on déduit que $\int_0^1 v = 0$ donc nécessairement $v = 0$ or $\|v\|_{H^1} = 1$, c'est absurde.

D'après le théorème de Lax-Milgram (théorème ??) page ??, il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que $a(u,v) = \int_0^1 f v, \forall v \in H^1(0,1)$.

2) Comme $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[) \subset H^1(0,1)$, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, $a(u,\varphi) = \int_0^1 f \varphi = \langle f, \varphi \rangle$ en terme de distributions. Et,

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) &= \int_0^1 u' \varphi' + \int_0^1 \left(\int_0^1 u\right) \varphi, \\ &= \langle u', \varphi' \rangle + \langle \int_0^1 u, \varphi \rangle, \\ &= -\langle u'', \varphi \rangle + \langle \int_0^1 u, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où $\langle -u'' + \int_0^1 u - f, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, donc $-u'' + \int_0^1 u = f$ au sens des distributions, mais $f \in L^2(0,1)$ et $\int_0^1 u \in L^2(0,1)$ montre que $u \in H^2(0,1)$ et vérifie

$$(\star) \quad -u'' + \int_0^1 u = f \quad \text{p.p.}$$

Pour trouver les conditions aux limites, on multiplie (\star) par $v \in H^1(0,1)$ et on intègre sur $(0,1)$ alors $-\int_0^1 u'' v + \left(\int_0^1 u\right) \left(\int_0^1 v\right) = \int_0^1 f v$. Comme $u \in H^2$ et $v \in H^1$, l'exercice précédent nous permet de faire une intégration par parties et on obtient $a(u,v) - \int_0^1 f v = [u'v]_0^1$.

Or u est solution de la formulation variationnelle (c'est-à-dire $a(u,v) = \int_0^1 f v, \forall v \in H^1(0,1)$), donc $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$ et ceci $\forall v \in H^1(0,1)$. Donc nécessairement $u'(1) = u'(0) = 0$.

D'où u est solution du problème suivant, $u \in H^2(0,1)$ et

$$\begin{cases} -u'' + \int_0^1 u &= f \quad \text{p.p.} \\ u'(1) = u'(0) &= 0 \end{cases}$$

Et réciproquement.

Exercice 10

Soit $V = \{u \in H^1(0,1) : u(\frac{1}{2}) = 0\}$.

1) Comme $id : H^1(0,1) \rightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est continue, $u \mapsto u(\frac{1}{2})$ est continue sur $H^1(0,1)$ et V est fermé dans $H^1(0,1)$.

$\|v'\|_{L^2}$ est bien une semi-norme sur V et si pour un $v \in V$, $\|v'\|_{L^2} = 0$ alors, d'après l'exercice 9 page 93, v est constante sur $(0,1)$ et de $v(\frac{1}{2}) = 0$, on en déduit que $v = 0$. Donc, on a bien à faire à une norme sur V . On a évidemment $\|v'\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}$.

Pour l'autre sens, on utilise $u(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x u' dt$ car $u(\frac{1}{2}) = 0$. On applique Cauchy-Schwarz, on obtient $|u(x)|^2 \leq |x - \frac{1}{2}| \|u'\|_2^2 \leq \|u'\|_2^2$. On intègre sur $(0,1)$, on a $\|u\|_2 \leq \|u'\|_2$. Les deux normes sont donc bien équivalentes sur V .

2) Soit $a(u,v) = \int_0^1 u' v'$, alors a est une forme bilinéaire symétrique continue sur V et $v \mapsto v(0)$ est continue sur V puisque $id : H^1(0,1) \rightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est continue sur $H^1(0,1)$. Du théorème de Lax-Milgram, on déduit qu'il existe un

unique $u \in V$ tel que $a(u, v) = v(0)$, $\forall v \in V$.

3) $\mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[) \not\subset V$ donc on ne peut pas exactement raisonner comme dans l'exercice précédent, mais on peut remarquer que $\mathcal{C}_c^\infty(]0, \frac{1}{2}[) \cup \mathcal{C}_c^\infty(]\frac{1}{2}, 1[) \subset V$ (en prolongeant ces fonctions par 0 à $]0, 1[$ tout entier).

Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, \frac{1}{2}[)$ alors $a(u, \varphi) = \int_0^{\frac{1}{2}} u' \varphi' = \varphi(0) = 0$, c'est à dire $\langle u', \varphi' \rangle = 0 = - \langle u'', \varphi \rangle$ et ceci $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, \frac{1}{2}[)$, donc $u'' = 0$ dans $\mathcal{D}'(]0, \frac{1}{2}[)$ et donc dans $L^2(0, \frac{1}{2})$.

On obtient par un même raisonnement, $u'' = 0$ dans $\mathcal{D}'(]\frac{1}{2}, 1[)$ et donc dans $L^2(\frac{1}{2}, 1)$. Donc finalement $u \in H^2(0, \frac{1}{2}) \cap H^2(\frac{1}{2}, 1)$. On peut alors faire des intégrations par parties sur les deux sous-intervalles $(0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, 1)$. Si $v \in V$ alors

$$0 = - \int_0^{\frac{1}{2}} u'' v = \int_0^{\frac{1}{2}} u' v' - [u' v]_0^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} u' v' + u'(0) v(0),$$

$$0 = - \int_{\frac{1}{2}}^1 u'' v = \int_{\frac{1}{2}}^1 u' v' - [u' v]_{\frac{1}{2}}^1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 u' v' - u'(1) v(1).$$

On ajoute ces deux égalités, alors $a(u, v) + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = 0 \implies (1 + u'(0))v(0) = u'(1)v(1)$, $\forall v \in V$. Donc nécessairement $u'(0) = -1$ et $u'(1) = 0$. Donc on a résolu

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = 0 \text{ sur } (0, \frac{1}{2}) \\ u(\frac{1}{2}) = 0 \\ u'(0) = -1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} u'' = 0 \text{ sur } (\frac{1}{2}, 1) \\ u(\frac{1}{2}) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{array} \right.$$

de solutions respectives :

$$u(x) = -x + \frac{1}{2} \quad \text{sur } [0, \frac{1}{2}]$$

$$u(x) = 0 \quad \text{sur } [\frac{1}{2}, 1]$$

On voit tout de suite que $u \notin H^2(0, 1)$ (sinon elle serait \mathcal{C}^1).

Au sens des distributions, il est clair que $u' = -\mathbb{1}_{(0, \frac{1}{2})} \in L^2(0, 1)$ et que $u'' = \delta_{\frac{1}{2}} \notin L^2(0, 1)$.

Exercice 11

$v \rightarrow \|v'\|_{L^2}$ est bien une semi-norme sur $H^1(0, +\infty)$. Si $\|v'\|_{L^2} = 0$ alors $v' = 0$ p.p. et donc v est une constante. Or la seule constante de $L^2(0, +\infty)$ est la constante nulle donc c'est bien une norme sur $H^1(0, +\infty)$. On a évidemment $\|v'\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}$.

Soit $u_n(x) = n - x$ si $x \leq n$ et $u_n(x) = 0$ sinon. Alors $u_n \in H^1(0, +\infty)$, $\|u_n'\|_{L^2}^2 = n$ et $\|u_n\|_{L^2}^2 = \frac{n^3}{3}$ donc les deux normes ne peuvent pas être équivalentes sur $H^1(0, +\infty)$.

Exercice 12

1) Par le théorème des accroissements finis, il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in H^1(I)$, $|f(u)| \leq |f(0)| + C|u| \in L^2(I)$ donc $f(u) \in L^2(I)$.

2) Soit $u_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(I)$.

a) De la même façon, on a : $|f(u_n) - f(u)| \leq C|u_n - u|$ donc $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(I) \implies f(u_n) \rightarrow f(u)$ dans $L^2(I)$.

b) On a $|\alpha_n| \leq C|u_n' - u'|$ donc $u_n' \rightarrow u'$ dans $L^2(I) \implies \alpha_n \rightarrow 0$ dans $L^2(I)$. Comme $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(I)$, il existe une sous-suite u_{n_k} telle que $u_{n_k} \rightarrow u$ p.p. (voir l'exercice ?? page ??). Par continuité de f' , $f'(u_{n_k}) \rightarrow f'(u)$ p.p. D'où finalement,

$$\left. \begin{array}{l} \beta_{n_k} \rightarrow 0 \text{ p.p.} \\ |\beta_{n_k}| \leq 2\|f'\|_\infty|u'| \in L^2(I) \end{array} \right\} \implies \beta_{n_k} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(I),$$

par le théorème de convergence dominée.

c) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, alors

$$(\star) \quad \int_I f(u_n)\varphi' = - \int_I f'(u_n)u'_n\varphi,$$

puisque toutes les fonctions considérées sont assez régulières. Comme $f(u_n) \rightarrow f(u)$ dans $L^2(I)$, $\int_I f(u_n)\varphi' \rightarrow \int_I f(u)\varphi'$.

D'autre part, $f'(u_n)u'_n - f'(u)u' = \alpha_n + \beta_n$ donc

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(I) \implies \int_I \alpha_n \varphi \rightarrow 0 \\ \beta_{n_k} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(I) \implies \int_I \beta_{n_k} \varphi \rightarrow 0 \end{array} \right\} \implies \int_I (\alpha_{n_k} + \beta_{n_k}) \varphi \rightarrow 0.$$

D'où en passant à la limite dans (\star) , pour une sous-suite, on obtient :

$$\int_I f(u)\varphi' = - \int_I f'(u)u'\varphi,$$

et ceci $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Or $f'(u)u' \in L^2(I)$ car $f' \in L^\infty(I)$ et $u' \in L^2(I)$, donc $f(u) \in H^1(I)$ et $(f(u))' = f'(u)u'$.

3) Soit $\varepsilon > 0$ fixé, $f_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ par valeurs positives, donc $f_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

De plus, si $t > 0$, $f'_\varepsilon(t) = \frac{t}{\sqrt{(t^2+\varepsilon^2)}} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, donc $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Enfin,

$\forall \varepsilon > 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'_\varepsilon(t)| \leq 1$ donc $f_\varepsilon \in E$ et $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall t$, $|f_\varepsilon(t)| \leq |t|$.

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $f_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ si $t \leq 0$ et $f_\varepsilon(t) \rightarrow t$ si $t \geq 0$ donc $f_\varepsilon(t) \rightarrow t^+$. D'où

$$\left. \begin{array}{l} f_\varepsilon(u) \rightarrow u^+ \text{ p.p.} \\ |f_\varepsilon(u)| \leq |u| \in L^2(I) \end{array} \right\} \implies f_\varepsilon(u) \rightarrow u^+ \text{ dans } L^2(I),$$

par le théorème de convergence dominée.

4) D'après 2), $f_\varepsilon(u) \in H^1(I)$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, $\int_I f_\varepsilon(u)\varphi' = - \int_I f'_\varepsilon(u)u'\varphi$.

On sait que $f_\varepsilon(u) \rightarrow u^+$ dans $L^2(I)$ donc $\int_I f_\varepsilon(u)\varphi' \rightarrow \int_I u^+\varphi'$. D'autre part,

$$\left. \begin{array}{l} f'_\varepsilon(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}, \quad t > 0 \\ = 0, \quad t \leq 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right\} = \mathbb{1}_{[t>0]},$$

donc

$$\left. \begin{array}{l} f'_\varepsilon(u) \rightarrow \mathbb{1}_{[u>0]} \text{ p.p.} \\ |f'_\varepsilon(u)u'| \leq |u'| \in L^2(I) \end{array} \right\} \implies f'_\varepsilon(u)u' \rightarrow \mathbb{1}_{[u>0]}u' \text{ dans } L^2(I),$$

par le théorème de convergence dominée. D'où

$$\int_I f'_\varepsilon(u)u'\varphi \rightarrow \int_I \mathbb{1}_{[u>0]}u'\varphi.$$

A la limite, on obtient : $\int u^+\varphi = - \int \mathbb{1}_{[u>0]}u'\varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, donc $u^+ \in H^1(I)$

et $(u^+)' = \mathbb{1}_{[u>0]}u'$.

5) On a $u^- = (-u)^+$ donc $u^- \in H^1(I)$, $(u^-)' = -\mathbb{1}_{[u<0]}u'$ et $|u| = u^+ + u^- \in H^1(I)$.

(La démonstration est la même en $\dim > 1$, en remplaçant u' par $\frac{\partial}{\partial x_i}u$.)

Exercice 13

Soit N une norme dérivant d'un produit scalaire, alors N^2 est \mathcal{C}^∞ et sa dérivée seconde est une forme bilinéaire symétrique définie positive (c'est à une constante positive près le produit scalaire) donc N^2 est strictement convexe.

Une norme est convexe et non strictement convexe car $N(tu) = tN(u)$ si $t > 0$.

Exercice 14

On note $H_0^1(0, 1) = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$.

1) Si $u \in H_0^1(0, 1)$ alors on peut écrire $u(x) = \int_0^x u'(t)dt$ (voir le théorème 12.1, ch.12). En appliquant Cauchy-Schwarz, on en déduit que $|u(x)| \leq \sqrt{x}\|u'\|_2$. On élève cette dernière inégalité au carré et on intègre, on obtient alors $\|u\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u'\|_2^2$, d'où $\|u'\|_2^2 \leq \|u\|_{H^1}^2 \leq \frac{3}{2}\|u'\|_2^2$. On en conclut que $(H_0^1(0, 1), \|u'\|_2)$ est un espace de Hilbert.

2) Si $v \in H^1(0, 1)$ alors $v \in L^2 \cap L^\infty$ car $H^1(0, 1) \subset \mathcal{C}[0, 1]$. Donc $v \in L^q$, $\forall q \geq 2$ et $F(v)$ a bien un sens. Comme $|\int_0^1 fv| \leq \|f\|_2\|v\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2\|v'\|_2$ si $v \in H_0^1(0, 1)$, il existe $C > 0$ tel que $F(v) \geq \frac{1}{2}\|v'\|_2^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2\|v'\|_2 \geq C$, $\forall v \in H_0^1(0, 1)$. De plus $F(v) \rightarrow +\infty$ quand $\|v'\|_2 \rightarrow \infty$.

D'autre part, comme $H^1(0, 1) \subset \mathcal{C}[0, 1]$ avec injection continue, il existe $M > 0$ tel que $\forall v \in H^1(0, 1)$, $\|v\|_4 \leq M\|v\|_{H^1}$, ce qui montre que F est continue sur $H_0^1(0, 1)$. Enfin F est convexe ($\|v\|_4^4 =$ composée de $x \mapsto x^4$, croissante et convexe sur \mathbb{R}^+ et d'une norme est convexe). Donc F est s.c.i. faible et le théorème sur l'inf des fonctions s.c.i. (Corollaire 5.4, ch.5) montre qu'il existe $u \in H_0^1(0, 1)$ tel que $F(u) \leq F(v)$, $\forall v \in H_0^1(0, 1)$. L'unicité provient du fait que F est strictement convexe car le terme $\|v'\|_2^2$ l'est d'après l'exercice précédent.

3) Soient $t > 0$ et $v \in H_0^1(0, 1)$ alors $F(u + tv) - F(u) \geq 0$ donc

$$\frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3v - \int_0^1 fv + t\mathcal{O}(1) \geq 0.$$

Quand $t \rightarrow 0$, on obtient

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3v - \int_0^1 fv \geq 0,$$

et en changeant v en $-v$,

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3v - \int_0^1 fv = 0,$$

pour tout $v \in H_0^1(0, 1)$.

4) En particulier, comme $\mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[) \subset H_0^1(0, 1)$, on a

$$\int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u^3\varphi = \int_0^1 f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[).$$

On utilise maintenant le fait que u' , u^3 , f sont dans L_{loc}^1 et définissent des distributions pour écrire que

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'\varphi' &= \langle u', \varphi' \rangle = -\langle u'', \varphi \rangle, \\ \int_0^1 u^3\varphi &= \langle u^3, \varphi \rangle, \\ \int_0^1 f\varphi &= \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

et donc $\langle -u'' + u^3 - f, \varphi \rangle = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[)$. D'où $-u'' + u^3 = f$ dans $\mathcal{D}'(]0, 1[)$. Comme f et u^3 sont dans $L^2(I)$, on en déduit que $u'' \in L^2(I)$ donc légalité a lieu p.p et $u \in H^2(0, 1)$.

5) Comme F est convexe, on a : $\forall t \in]0, 1[$, $F(u + t(v - u)) \leq F(u) + t[F(v) - F(u)]$, $\forall v \in H_0^1(0, 1)$. Donc

$$\frac{F(u + t(v - u)) - F(u)}{t} \leq F(v) - F(u), \quad \forall t > 0.$$

On a vu en 3) que

$$\frac{F(u + t(v - u)) - F(u)}{t} = \int_0^1 u'(v - u)' + \int_0^1 u^3(v - u) - \int_0^1 f(v - u) + t\mathcal{O}(1).$$

Comme $u \in H^2 \cap H_0^1(0, 1)$ et $v \in H_0^1(0, 1)$, on a $\int_0^1 u'(v - u)' = -\int_0^1 u''(v - u)$ donc

$$\frac{F(u + t(v - u)) - F(u)}{t} = \int_0^1 \underbrace{(-u'' + u^3 - f)}_{=0}(v - u) + t\mathcal{O}(1), \quad \forall t > 0.$$

En particulier, $F(v) - F(u) \geq t\mathcal{O}(1)$ et quand $t \rightarrow 0$, on obtient $F(v) \geq F(u)$, $\forall v \in H_0^1(0, 1)$. Donc u est solution de (\star) .

6) On suppose que $f \geq 0$ p.p. Si u est solution de (\star) alors on a vu que $\forall v \in H_0^1(0, 1)$, $\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3v = \int_0^1 fv$. On choisit $v = u^- = -\inf(0, u)$ alors $v \in H_0^1(0, 1)$ (voir l'exercice 5), $v \geq 0$ et on obtient $-\int_0^1 (u^-)'2 - \int_0^1 (u^-)^4 = \int_0^1 fu^- \geq 0$. On en déduit par exemple que $\int_0^1 (u^-)^4 \leq 0$ et donc que $u^- = 0$ p.p. D'où $u \geq 0$ p.p.

Exercice 15

1) V est un sous-espace vectoriel de $H^1(0, 1)$. On pose $L(v) = v(0) - kv(1)$ alors $|L(v)| \leq (1 + |k|) \sup_{[0,1]} |v(x)|$. Comme $H^1(0, 1)$ s'injecte de façon continue dans $\mathcal{C}([0, 1])$, $\exists C$ constante telle que $\forall v \in H^1(0, 1)$, $\sup_{[0,1]} |v(x)| \leq \|v\|_{H^1}$. Donc $|L(v)| \leq (1 + |k|)C\|v\|_{H^1}$. Ainsi V , noyau d'une forme linéaire continue, est fermé.

2) Pour $v \in H^1(0, 1)$, on écrit que $v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t)dt$. En particulier si $v \in V$ alors $v(1) = kv(1) + \int_0^1 v'(t)dt$. Donc,

$$|1 - k| |v(1)| \leq \int_0^1 |v'(t)|dt \leq \|v'\|_2,$$

par Cauchy-Schwarz. Alors,

$$|v(1)| \frac{1}{|1 - k|} \|v'\|_2 \text{ et } |v(0)| \leq \frac{|k|}{|1 - k|} \|v'\|_2.$$

D'où

$$|v(x)| \leq \left(1 + \frac{|k|}{|1 - k|}\right) \|v'\|_2,$$

et $\|v\|_\infty \leq C\|v'\|_2$.

3) $a(., .)$ est clairement bilinéaire et symétrique. Soit $v \in V$, comme $\left(\int_0^1 v\right)^2 \leq \int_0^1 |v|^2$, on a $a(v, v) \geq \|v'\|_2^2 \geq 0$. Si $a(v, v) = 0$ alors $\|v'\|_2 = 0$ et d'après 2), $\|v\|_\infty = 0$ donc $v = 0$. On en conclut que $a(., .)$ est bien un produit scalaire sur V .

Soit $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$. On a évidemment $\|v\|_a^2 \leq \|v\|_{H^1}^2$.

D'autre part si $v \in V$, $\|v\|_2 \leq \|v\|_\infty \leq C\|v'\|_2$ par 2). Donc,

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_2^2 + \|v'\|_2^2 \leq (C^2 + 1)\|v'\|_2^2 \leq \|v\|_a^2.$$

D'où,

$$\left(\frac{1}{C^2 + 1}\right) \|v\|_{H^1}^2 \leq \|v\|_a^2 \leq \|v\|_{H^1}^2,$$

et les deux normes sont équivalentes.

4) Soit $\ell(v) = \int_0^1 f v$, alors ℓ est une forme linéaire sur V . Et

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq (C^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \|v\|_a,$$

montre que ℓ est continue sur V pour $\|\cdot\|_a$.

V est fermé dans H^1 donc complet pour la norme H^1 . Par équivalence des normes, on déduit que $(V, a(\cdot, \cdot))$ est un espace de Hilbert. Le théorème de Riesz s'applique à ℓ donc il existe un unique $u \in V$ tel que $\ell(v) = a(u, v)$, $\forall v \in V$.

5) Soit u solution de (\star) alors :

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 u' v' = \int_0^1 \left(f - u + \int_0^1 u \right) v.$$

En particulier, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0, 1[)$,

$$\langle -u'', \varphi \rangle = \int_0^1 u' \varphi' = \int_0^1 \left(f - u + \int_0^1 u \right) \varphi = \langle \left(f - u + \int_0^1 u \right), \varphi \rangle,$$

donc $-u'' = f - u + \int_0^1 u$ au sens des distributions. Comme $f, u, \int_0^1 u \in L^2$, on a $u'' \in L^2$ donc $u \in H^2(0, 1)$ et $-u'' = f - u + \int_0^1 u$ p.p. $(\star\star)$.

Si $v \in V$, comme $u \in H^2$, on peut intégrer par parties et on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 u' v' &= - \int_0^1 u'' v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0), \\ &= - \int_0^1 u'' v + (u'(1) - k u'(0))v(1). \end{aligned}$$

Alors, en tenant compte de l'équation $(\star\star)$, $a(u, v) = \int_0^1 f v \implies (u'(1) - k u'(0))v(1) = 0$ et ceci pour tout $v \in V$, donc nécessairement $u'(1) = k u'(0)$. Les conditions aux limites satisfaites par u sont donc

$$(\star\star\star) \quad \begin{cases} u'(1) = k u'(0) \\ u(0) = k u(1). \end{cases} \quad (u \in V)$$

Et réciproquement, si $u \in H^2(0, 1)$ satisfait l'équation $(\star\star)$ et les conditions aux limites $(\star\star\star)$ ci-dessus, alors u vérifie (\star) .

6) On a vu en 2) que $|u_n(x)|^2 \leq \left(1 + \frac{|k_n|}{|1-k_n|}\right) \|u'_n\|_2^2$ avec $k_n \neq 1$. La suite $\left(1 + \frac{|k_n|}{|1-k_n|}\right)_n$ est bornée et non nulle car elle converge vers $1 + \frac{|k|}{|1-k|}$. Donc $\exists M > 0$ tel que $\|u_n\|_2^2 \leq M \|u'_n\|_2^2, \forall n$. De plus,

$$\frac{1}{M} \|u_n\|_2^2 \leq \|u'_n\|_2^2 \leq |a(u_n, u_n)| = \left| \int_0^1 f u_n \right| \leq \|f\|_2 \|u_n\|_2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_2^2 &\leq M \|f\|_2 \|u_n\|_2 \leq M \|f\|_2 \|u_n\|_{H^1} \text{ et} \\ \|u'_n\|_2^2 &\leq \|f\|_2 \|u_n\|_2 \leq \|f\|_2 \|u_n\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Donc $\|u_n\|_{H^1}^2 \leq (M+1) \|f\|_2 \|u_n\|_{H^1}$ d'où la suite $(u_n)_n$ est bornée dans H^1 .

7) Comme H^1 est réflexif, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_p})_p$ convergeant faiblement dans H^1 vers u_\star . Avec l'injection compacte de $H^1(0, 1)$ dans $\mathcal{C}([0, 1])$ (voir l'exercice 8 page 100), on en déduit que $u_{n_p} \rightarrow u_\star$ uniformément sur $[0, 1]$

(voir l'exercice ?? page ??). Comme $u_{n_p} \in V_{n_p}$, $u_{n_p}(0) = k_{n_p} u_{n_p}(1)$ et chaque terme converge. A la limite, on a $u \star (0) = k u \star (1)$ donc $u \star \in V$.

8) On vérifie facilement que $v_n \in V_n$ et $|v_n(t) - v(t)|^2 = \left| \frac{k-k_n}{k_n-1} \right| |v(1)|^2$. Donc $\|v_n - v\|_2^2 = \left| \frac{k-k_n}{k_n-1} \right| |v(1)|^2 \rightarrow 0$. D'autre part, $v'_n = v'$ donc $v_n \rightarrow v$ dans H^1 .

Comme $u_{n_p} \rightharpoonup u \star$ dans H^1 faible et $v_{n_p} \rightarrow v$ dans H^1 fort, $(u_{n_p}, v_{n_p})_{H^1} \rightarrow (u \star, v)_{H^1}$. Les autres termes de $(\star)_{n_p}$ passent à la limite sans problèmes et on obtient $a(u \star, v) = \int_0^1 f v$, ceci $\forall v \in V$, par unicité de u , $u \star = u$.

9) Comme $u_{n_p} \rightarrow u$ uniformément sur $[0, 1]$, $\left(\int_0^1 (u_{n_p} - u) \right)^2 \rightarrow 0$. D'autre part, on peut écrire $a(u_{n_p} - u, u_{n_p} - u) = \int_0^1 f u_{n_p} - 2a(u_{n_p}, u) + a(u, u)$ et chaque terme converge car u_{n_p} converge faiblement dans H^1 . Donc,

$$\|u_{n_p} - u\|_{H^1}^2 = a(u_{n_p} - u, u_{n_p} - u) + \left(\int_0^1 (u_{n_p} - u) \right)^2 \rightarrow \int_0^1 f u - a(u, u) = 0.$$

10) Sinon, $\exists A > 0$, il existe une sous-suite $(u_{n_p})_p$ telle que $\|u_{n_p} - u\|_{H^1} \geq A > 0$. On sait alors qu'il existe une sous-suite de $(u_{n_p})_p$, encore notée $(u_{n_p})_p$, qui converge vers u dans H^1 faible. Comme en 9), on montre qu'en fait, elle converge fortement vers u dans H^1 , d'où contradiction.

11) T est bien définie et linéaire par unicité de la solution de (\star) et par symétrie de a , on a $\int_0^1 f T g = \int_0^1 g T f$. Vérifions que T est continue. Par 3), $\exists C > 0$ tel que $\forall u \in V$, $C \|u\|_{H^1}^2 \leq a(u, u)$ donc en choisissant $u = T f$, on obtient : $C \|T f\|_{H^1}^2 \leq \int_0^1 f T f \leq \|f\|_2 \|T f\|_2$. Comme $\| \|_2 \leq \| \|_{H^1}$, on en déduit que $\|T f\|_2 \leq \frac{1}{C} \|f\|_2$ et T est continue.

Pour montrer que T est compacte, on va utiliser le critère démontré dans l'exercice ?? page ?. L^2 étant réflexif, il suffit de montrer que si $f_n \rightharpoonup f$ dans L^2 faible, $T f_n \rightarrow T f$ dans L^2 fort. Comme $C \|T f_n\|_{H^1}^2 \leq \|f_n\|_2 \|T f_n\|_{H^1}$, on en déduit que $(T f_n)_n$ est bornée dans $H^1(0, 1)$ réflexif, donc il existe une sous-suite $(T f_{n_k})_k$ qui converge faiblement vers un $g \in H^1$. Alors $T f_{n_k} \rightarrow g$ dans $\mathcal{C}([0, 1])$ et donc dans L^2 fortement et faiblement. Comme T est linéaire continue, on en déduit que $g = T f$ (voir l'exercice ?? page ??). Donc toute la suite $(T f_n)_n$ converge vers $T f$ dans L^2 .

Chapitre 13

Exemple de travaux pratiques

Dans tout le TD, on considère une image digitale $a(i, j)$ de taille 256×256 (i.e. $i, j \in \{1, 2, \dots, 256\}$), à 256 niveaux de gris (i.e. $a(i, j) \in \{1, 2, \dots, 256\}$). Commencez, à partir d'une des machines du département, par choisir votre image parmi celles disponibles dans le répertoire `~gousseau/images/` (évitiez l'image *mouche.tif* pour des raisons qui apparaîtront plus loin). Pour la lire sous matlab, tapez

```
a=imread('image.tif');
```

la variable a est alors une matrices de valeur entières. Visualisez a comme une image (les valeurs correspondent à des niveaux de gris, 1 est le noir et 256 le blanc)

```
imagesc(a); colormap gray;
```

puis comme une surface

```
view(-45+180,30);
```

```
surfl(double(a));
```

```
colormap gray; shading interp; axis equal;
```

13.1 Manipulation de l'histogramme

On appelle histogramme de a le vecteur $h(x), 1 \leq x \leq 256$

$$h(x) = \#\{(i, j)/a(i, j) = x\}.$$

On appelle fonction de distribution de l'image le vecteur de même taille

$$H(x) = \#\{(i, j)/a(i, j) \leq x\}.$$

Visualisez les vecteurs h et H correspondant a votre image

```
[m,n]=size(a);
```

```
a=double(a);
```

```
b=reshape(a,m*n,1);
```

```
h=hist(b,255);
```

```
h=h/(m*n);
```

```
H=cumsum(h);
```

```
plot(h);figure;plot(H);
```

Egalisation d'histogramme : on modifie les niveaux de gris de l'image de manière à ce que sa nouvelle fonction de distribution soit le plus proche possible de l'identité. L'algorithme très simple fourni ci-dessous est une adaptation en discret de la remarque suivante : si une variable aléatoire X à valeurs dans $[0,1]$ a pour fonction de distribution F , alors la variable aléatoire $F(X)$ a pour fonction de distribution l'identité (le vérifier). Visualisez la nouvelle fonction de distribution, ainsi que le nouvel histogramme. Qu'en pensez-vous ?

```
H(256)=1;
```

```
b=zeros(m,n);
```

```
b=round((H(a+1)*255));
```

13.2 Echantillonnage et transformée de Fourier

Attention : La transformée de Fourier discrète (TFD) se calcule sous Matlab à l'aide des fonctions `fft` (dimension 1) et `fft2` (dimension 2). Comme expliqué à la remarque 5.1 page [/pagerefTFDMatlab](#), cette fonction ne calcule pas les coefficients \hat{u}_k , mais les coefficients \tilde{u}_k qui sont liés aux \hat{u}_k par la formule ?? page ?? . Le passage de l'une à l'autre de ces définitions (en dimension 1 comme en dimension 2) s'effectue au moyen de la fonction `fftshift`. D'autre part, Matlab retourne en fait les coefficients $n * \hat{u}$ en dimension 1, et $m * n * \hat{u}$ en dimension 2 (tapez `help fft`). En résumé, les coefficients \tilde{u}_k sont obtenus par la formule suivante :

```
A=(1/m*n)*fftshift(fft2(a))
```

et la transformée inverse est alors

```
a=m*n*ifft2(fftshift(A))
```

Visualisez la transformée de votre image au moyen de la commande :

```
imagesc(log(1+abs(A))); colormap(jet); colorbar
```

Répétez l'expérience avec l'image `mouche.tif`.

Sous-échantillonnez l'image a d'un facteur 2 (i.e. gardez un pixel sur 2 dans chaque direction). Qu'observe-t-on ?

```
b=zeros(128);
```

```
for k=1 :128;for l=1 :128; b(k,l)=a(2*k,2*l); end; end;
```

Même expérience avec l'image de la mouche.

Effectuez la même expérience en filtrant préalablement l'image. Vous pouvez par exemple multiplier le spectre de votre fonction par la fonction indicatrice d'un carré centré de taille deux fois plus petite que celle de l'image. Le résultat est-il meilleur ? pourquoi ? A quoi sont dues les oscillations visible sur l'image ?

13.3 Zoom par 0-padding (prolongement du spectre par des zéros)

On se propose de zoomer l'image a , par exemple d'un facteur deux dans chaque dimension. L'idée est d'ajouter des zéros à la TFD de l'image de manière à augmenter sa taille tout en préservant son contenu aux faibles fréquences, puis de

reconstruire une image à partir de cette transformée, référez vous au paragraphe 5.1.5 page 73. L'algorithme est le suivant :

- calculez A , la TFD de a
- prolongez A en une image 512×512 par ajout de zéros aux hautes fréquences (attention : il est préférable d'utiliser la fonction *fftshift* avant de prolonger par des zéros).
- calculez b , TFD inverse de A .

Qu'observe-t-on ? En particulier aux bords de l'image ? pourquoi ? Effectuez la même expérience avec une image comportant une discontinuité nette (par exemple un carré noir sur fond blanc). Même questions.

13.4 Translations

On cherche à effectuer une translation non entière sur une image, c'est à dire à calculer des valeurs en des points situés "entre les pixels". On utilise la proposition 5.9.

Fabriquez le signal $f = \chi_{[60,80]}$, (χ étant la fonction indicatrice) considéré comme périodique sur l'intervalle $[0, 128]$, translatez le de $1/2$ en multipliant les coefficients de sa TFD par les exponentielle adéquates. Visualisez le résultat comme une image (en utilisant simplement la commande *imagesc*). Qu'observe-t-on ?

Effectuer une nouvelle translation de $1/2$. Retrouve-t-on le signal original ?

13.5 Phase et module de la TFD

Nous allons maintenant illustrer l'importance respective de la phase et du module des coefficients de la TFD. Nous commençons par échanger les phases des TFD de deux images. Choisissez une image b différente de a (de même taille). Calculez les TFD A et B respectivement de a et b . Remplacez les coefficients de B par leur modules, puis multipliez les par la phase des coefficients correspondants de A . Utilisez *ifft2* et affichez le résultat. Essayez avec une image de texture pour a , puis pour b .

```
A=fft2(a); B=fft2(b);
```

```
B=abs(B).*exp(i*angle(A));
```

```
c=ifft2(B); imagesc(real(c));
```

Pour illustrer le rôle du module des coefficients, on effectue l'expérience suivante : partant d'une image synthétique simple (un carré, un disque...) on change la phase des coefficients de sa TFD de manière aléatoire, puis on calcule l'image correspondante. Attention, lors de la modification de la phase il faut prendre garde à respecter les symétries de la TFD, ainsi qu'à ne pas modifier les coefficients réels $A(0, 0)$, $A(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$, $A(\frac{N}{2}, 0)$, $A(0, \frac{N}{2})$. Une possibilité est de partir d'un bruit blanc et d'utiliser les phases de sa TFD. Qu'observe-t-on ? Effectuez la même expérience à partir de la texture *strawmat.tif*.

13.6 Codes Matlab

```
%visualisation de l'histogramme
```

```

a=double(a);
[m,n]=size(a);
b=reshape(a,m*n,1);
h=hist(b,256);
h=h/(m*n);
H=cumsum(h);
plot(h);
figure; plot(H);

%égalisation
b=zeros(m,n);
b=round((H(a+1)*255));
b=double(b);
c=reshape(b,m*n,1);
h=hist(c,255);
h=h/(m*n);
H=cumsum(h);
figure;plot(h);figure;plot(H);

%visualisation TFD b=fft2(a);
b=fftshift(b);
imagesc(log(abs(b)+1)); colormap(jet); colorbar;

%sous-échantillonnage brutal de a (d'un facteur 2)
M=floor(m/2); N=floor(n/2);
b=zeros(M,N);
for i=1 :M;
for j=1 :N;
b(i,j)=a(2*i,2*j);
end
end
imagesc(b);colormap gray;

%idem après filtrage (on suppose ici que m et n sont divisibles par 4)
b=fft2(a);
b=fftshift(b);
c=zeros(m,n);
M4=m/4; N4=n/4; M2=m/2; N2=n/2;
c(M4+1 :3*M4,N4+1 :3*N4)=b(M4+1 :3*M4,N4+1 :3*N4);
d=real(iff2(fftshift(c)));
b=zeros(M2,N2);
for i=1 :M2;
for j=1 :N2;
b(i,j)=d(2*i,2*j);
end
end
imagesc(b);colormap gray;
vskip .5 cm %zoom de l'image
%m et n doivent être pairs
M=m/2; N=n/2;
imagesc(a); colormap gray;
b=fft2(a);

```

```

b=fftshift(b);
c=zeros(2*n,2*n);
c(M+1 :M+m,N+1 :N+n)=4*b( :, :);
%le facteur 4 est introduit à cause de la définition de la TFD
%particulière à Matlab (pas de division par la taille de l'image)
c=fftshift(c);
e=ifft2(c);
figure;
imagesc(real(e)); colormap gray;

%effet de Gibbs par zoom
n=128;
a=zeros(n);
a(n/4 :3*n/4,n/4 :3*n/4)=255;
imagesc(a);colormap gray;
b=fft2(a);
b=fftshift(b);
c=zeros(2*n);
c(n/2+1 :n/2+n,n/2+1 :n/2+n)=4*b( :, :);
c=fftshift(c);
e=ifft2(c);
figure;
imagesc(real(e)); colormap gray;

%translation
taille=128; % la taille doit être paire
a=zeros(1,taille);
a(taille/4 :3*taille/4)=1;
imagesc(a); colormap gray;
%permet de voir le signal a comme une image ayant toutes ses lignes iden-
tiques
b=fftshift(fft(a));
omeg=exp(-2*i*pi/taille);
angle=.5;
T=taille/2;
for n=1 :taille;
b(n)=b(n)*omeg^(((n-1)-T)*angle);
end;
d=ifft(fftshift(b));
figure;
imagesc(real(d));colormap gray;

%échange de phases
%b doit être de même taille que a
A=fft2(a);
B=fft2(b);
B=abs(B).*exp(i*angle(A));
c=ifft2(B);
imagesc(real(c));

%synthèse de texture a partir d'un carre
a=zeros(256);

```

```
a(:, :)=256;  
a(120 :130,120 :130)=0;  
imagesc(a);colormap gray;  
b=randn(256);  
B=fft2(b);  
A=fft2(a);  
C=abs(A).*exp(i*angle(B));  
c=ifft2(C);  
figure;imagesc(real(c));colormap gray  
% essayez avec d'autres formes...
```


Notations

Index

Bibliographie

- [1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. New York, 1975.
- [2] J.M. Bony. *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier : théorie des distributions et analyse de Fourier*. Ecole Polytechnique, 2001.
- [3] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique : topologie générale*. Hermann, 1971.
- [4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées Pour la Maîtrise*, Masson, 1983.
- [5] G. Choquet. *Cours d'analyse : topologie*. Masson et Cie., 1969.
- [6] J. Dixmier. *Topologie générale*. Presses universitaires de France, 1981.
- [7] KJ Falconer. *The geometry of fractal sets*. 1985.
- [8] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications*. Masson, 1990.
- [9] S. Jaffard, Y. Meyer, and R.D. Ryan. *Wavelets : Tools for Science & Technology*. Society for Industrial Mathematics, 2001.
- [10] Y. Meyer. *Wavelets : Algorithms and Applications*. Philadelphia, 1993.
- [11] J. Neveu. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson.
- [12] W. Rudin. *Real and complex analysis*. New York, 1966.
- [13] L. Schwartz. *Théorie des distributions. I, Paris*, 1950.
- [14] L. Schwartz. *Analyse : topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann, 1970.
- [15] M. Unser, P. Thevenaz, and L. Yaroslavsky. Convolution-based interpolation for fast, high-quality rotation of images. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 4(10) :1371–1381, 1995.
- [16] D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.