

english

Analyse hilbertienne et analyse de Fourier

Sylvie Fabre, Jean-Michel Morel, Yann Gousseau

5 janvier 2010

Table des matières

1	Abrégé de topologie générale	7
1.1	Cas des espaces métriques	11
1.2	Théorème d'Ascoli-Arzelà	12
1.3	Exercices	14
2	L'intégrale de Lebesgue	19
2.1	L'intégrale de Lebesgue	19
2.2	Mesurabilité et ensembles de niveau des images	26
2.3	Exercices	27
3	Les espaces de Lebesgue, L^1, L^p, L^∞	33
3.1	Les espaces et leurs normes	33
3.2	Convolution, approximation et régularisation des fonctions de L^p	37
3.2.1	Le théorème fondamental du traitement du signal	39
3.3	Exercices	44
4	Espaces de Hilbert	49
4.1	Bases hilbertiennes	52
4.2	Convergence faible	54
4.3	Décomposition d'images sur la base de Haar	54
4.4	Exercices	56
5	Séries de Fourier	65
5.1	Convolution des fonctions périodiques et séries de Fourier	68
5.1.1	Autres bases de Fourier	70
5.2	Bases de Fourier en dimension 2	71
5.3	Décroissance des coefficients de Fourier et problèmes de compression du signal	72
5.4	Phénomène de Gibbs	73
5.5	Note historique	75
5.5.1	Gammes, harmoniques	75
5.5.2	Séries trigonométriques	79
5.6	Exercices	79
6	Le cas discret	83
6.1	Transformée de Fourier Discrète, applications	83
6.1.1	La dimension 1	83
6.1.2	La dimension 2	86
6.1.3	Le phénomène du repliement de spectre ou aliasage	87
6.1.4	Manipulations propres et simples et leur visualisation	91
6.1.5	L'équation de la chaleur	94
6.1.6	La transformée de Fourier rapide	95

6.1.7	L'utilisation de la transformée de Fourier discrète pour définir zoom, translations et rotations des images	96
6.1.8	Importances relatives de la phase et du module de la TFD pour une image	102
7	Séries de Fourier et espaces de Sobolev	105
7.1	Distributions	105
7.2	Espaces de Sobolev périodiques $H_{per}^m(0, 2\pi)$	109
7.3	Espaces de Sobolev en dimension 2	111
7.3.1	Equations de Poisson et de Laplace	112
7.4	Lemme de Lax-Milgram	113
7.5	L'interprétation variationnelle	115
7.5.1	L'éditeur de Poisson	115
7.6	Unicité des coefficients de Fourier	117
7.7	Visualisation de fonctions dans les espaces de Sobolev	118
7.8	Exercices	118
8	L'éditeur de Poisson	125
8.0.1	Résolution discrète	127
8.0.2	Clonage	128
8.0.3	Surimpression	129
8.0.4	Edition sélective	130

Table des figures

2.1	Images naturelles et ensembles mesurables	28
3.1	Convolution et régularisation des images	45
4.1	Décomposition sur la base de Haar	57
4.2	Compression d'images dans une base hilbertienne	58
5.1	Phénomène de Gibbs 1	76
5.2	Phénomène de Gibbs 2	77
6.1	85
6.2	Transformée de Fourier Discrète du son a	86
6.3	Transformée de Fourier Discrète d'une image	88
6.4	Repliement de spectre 1	91
6.5	Repliement de spectre 2	92
6.6	Filtrage passe-bas d'une image	93
6.7	Zoom par prolongement du spectre 1	97
6.8	Zoom par prolongement du spectre 2	98
6.9	Rotation par Transformée de Fourier 1	100
6.10	Rotation par Transformée de Fourier 2	101
6.11	Phase de la Transformée de Fourier Discrète et information géométrique	103
6.12	Module de la Transformée de Fourier Discrète et texture	104
7.1	Espace $H_{per}^1(\mathbb{R})$ et décroissance des coefficients de Fourier	119
7.2	Espace $H_{per}^1(\mathbb{R}^2)$ et décroissance des coefficients de Fourier	120
8.1	131

Sources principales et traités recommandés :

La lecture de ce polycopié ne doit pas détourner les étudiants, particulièrement ceux qui prépareront l'agrégation, de connaître les ouvrages classiques qui suivent. Parmi ces grands classiques (en français!) que nous avons consultés pour élaborer ce polycopié et ses exercices, les ouvrages suivants sont très recommandés et incontournables. Il s'agit du classique livre d'Analyse Fonctionnelle de Haïm BREZIS [4], du non moins classique manuel d'Analyse Réelle et Complexe de Walter Rudin [12], la Théorie des Distributions de Laurent Schwartz [13], [14], du très parfait Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique de Jean-Michel Bony [2], des Cours de Topologie fondateurs de Gustave Choquet [5], Jacques Dixmier [6], et de la Topologie Générale de Bourbaki [3]. Les notions sur probabilités et martingales viennent principalement de Jacques Neveu [11] et du splendide et maniable petit livre de Williams [16]. Les notes manuscrites des cours de DEA et de master de recherche de Yves Meyer (94-2008) ont été une source constante d'inspiration. Une partie de leur contenu est reflétée dans les petits livres très amènes [9] et [10].

Parmi les articles en rapport avec les expériences numériques présentées, il faut citer le très joli article de Philippe Thevenaz, Michael Unser, et Leonid Yaroslavsky [15]. Pour les espaces de Sobolev, nous avons utilisé le livre classique de Robert Adams [1] et le manuel de Haïm Brezis [4]. Beaucoup d'aspects de l'analyse de Fourier appliquée sont très bien expliqués dans le manuel de Richard Gasquet et Patrick Witomsky [8] et ses exercices corrigés.

Chapitre 1

Abrégé de topologie générale

La topologie d'un espace métrique est bien connue du lecteur ; nous donnons ici une brève introduction à la topologie générale, permettant de définir les notions de convergence, de continuité, et de compacité quand un espace topologique n'est pas muni d'une distance. Le lecteur trouvera un exposé beaucoup plus complet dans [5], [6], [3].

Rappels de topologie générale

Définition 1.1 On appelle espace topologique tout couple constitué d'un ensemble E et d'un ensemble \mathcal{O} de parties de E stable par intersection finie et union quelconque et contenant E et \emptyset . Les éléments de \mathcal{O} sont appelés les ouverts.

Exercice 1 Montrer qu'un espace métrique muni de \mathcal{O} , défini comme l'ensemble de toutes les unions quelconques de boules ouvertes, est un espace topologique.

Définition 1.2 Topologie induite : Si (E, \mathcal{O}) est un espace topologique et $A \subset E$, on appelle topologie induite par E sur A le couple (A, \mathcal{O}_A) où $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$.

Exercice 2 Vérifier que la topologie induite est une topologie.

Exercice 3 Décrire la topologie induite sur $[0, 1]$ par celle de \mathbb{R} et celle induite sur une droite de \mathbb{R}^2 par la topologie euclidienne canonique de \mathbb{R}^2 .

Définition 1.3 On appelle voisinage de $x \in E$ tout sous-ensemble de E contenant un ouvert contenant x et on notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x .

Conséquences :

- Un ouvert est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, si A est voisinage de chacun de ses points et si $x \in A$, il existe W_x ouvert tel que $x \in W_x \subset A$. Donc A est la réunion de tous les W_x quand x parcourt A et de ce fait est ouvert.

- Les ouverts d'un espace sont connus dès que sont connus pour tout x les voisinages de x , ou même une base de voisinages (définition suivante).

Définition 1.4 On appelle base de voisinages de $x \in E$, toute partie \mathcal{U} de $\mathcal{V}(x)$ telle que si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U \subset V$.

Exemple classique

Un espace topologique (E, \mathcal{O}) est dit métrisable s'il existe une distance sur E telle que \mathcal{O} coïncide avec l'ensemble des unions arbitraires de boules. Une base de voisinages ouverts commode est alors constituée par les boules ouvertes elles-mêmes. Les boules ouvertes centrées en x forment une base de voisinages ouverts de x et également les boules ouvertes contenant x .

Définition 1.5 On appelle base d'ouverts de E , toute famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ de E vérifiant l'une des deux propriétés équivalentes suivantes,

- 1) Tout $x \in E$ a une base de voisinages constituée par une sous-famille de $(O_i)_{i \in I}$,
- 2) Tout ouvert de E est réunion d'une sous-famille de $(O_i)_{i \in I}$.

Exercice 4 Exemples :

- 1) Montrer que les boules ouvertes d'un espace métrique forment une base d'ouverts de cet espace.
- 2) Montrer qu'il en est de même pour les boules ouvertes de \mathbb{R}^N dont les rayons sont rationnels et les centres sont rationnels. C'est donc une base d'ouverts dénombrable.

Définition 1.6 Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire est ouvert. On appelle fermeture d'un ensemble A , notée \bar{A} , l'intersection de tous les fermés contenant A . On appelle ouverture, ou intérieur, de A , noté $\text{Intérieur}(A)$, l'union de tous les ouverts contenus dans A .

Exercice 5 Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé et qu'une union finie de fermés est un fermé.

Exercice 6 Adhérence Soit A une partie de E , on dit que $x \in E$ est adhérent à A si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$. On appellera adhérence de A , l'ensemble des points de E adhérents à A .

Montrer que \bar{A} et l'adhérence de A sont identiques et que la relation $A = \bar{A}$ caractérise les ensembles fermés.

Définition 1.7 On dit qu'une partie A de E est dense dans E si $\bar{A} = E$ et donc, de manière équivalente, si tout ouvert non vide de E rencontre A .

Par exemple l'ensemble des points à coordonnées rationnelles est dense dans \mathbb{R}^N .

Définition 1.8 Espace séparable On dit qu'un espace topologique est séparable s'il possède une partie dénombrable et dense.

Exercice 7 Exemple : montrer que l'espace métrique \mathbb{R}^N muni de la norme euclidienne canonique est séparable.

Définition 1.9 Espace séparé On dit que l'espace E est séparé si $\forall x, y \in E$, $x \neq y$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ et $\exists U \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 8 Donner un exemple simple d'espace topologique non séparé.

Tous les espaces topologiques que nous considérerons seront en fait séparés.

Définition 1.10 Convergence d'une suite

On dit qu'une suite x_n tend vers x dans E si pour tout voisinage V de x il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V$.

Proposition 1.1 Tout fermé F est séquentiellement fermé, c'est-à-dire que si F est fermé et si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de F convergeant vers $x \in E$, alors $x \in F$.

Démonstration Si on avait $x \in F^c$, qui est ouvert, il existerait un voisinage ouvert U de x tel que $U \subset F^c$. Mais $x_n \rightarrow x$ implique que $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$, ce qui contredirait $x_n \in F$. \circ

Définition 1.11 Valeur d'adhérence d'une suite

Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E , on dit que $x \in E$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si $\forall n, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists i \geq n$ tel que $x_i \in V$.

Exercice 9 Si on note $A_n = \{x_i, i \geq n\}$ alors vérifier que x est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si et seulement si $x \in \bigcap_n \overline{A_n}$.

Définition 1.12 Continuité en un point

Soient E et F deux espaces topologiques et f une application de E dans F . Soit $x_0 \in E$, on dit que f est continue en x_0 si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U) \subset V$.

Une application d'un espace topologique dans un autre est dite *continue* si elle est continue en tout point.

Théorème 1.1 Une application f d'un espace topologique dans un autre est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert par f est un ouvert ou, de manière équivalente, si l'image réciproque de tout fermé est un fermé, ou, de manière équivalente, si l'image réciproque par f de chaque élément d'une base d'ouverts de F est un ouvert. On a aussi la propriété suivante : f est continue si et seulement si pour tout ensemble $A \subset E$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 10 Démontrer le théorème précédent !

Voici un exemple que nous utiliserons souvent : une application f de E dans \mathbb{R} est continue si et seulement si pour tout intervalle ouvert I de \mathbb{R} , l'ensemble $f^{-1}(I)$ est un ouvert. En effet, les intervalles ouverts forment une base de voisinages ouverts de \mathbb{R} . Il convient de vérifier que notre définition de la continuité généralise bien la notion de continuité séquentielle pour f , c'est-à-dire que $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Proposition 1.2 Si $f : (E, \mathcal{O}) \rightarrow (F, \mathcal{U})$ est continue, alors elle est séquentiellement continue.

Démonstration Soit x_n tendant vers x pour \mathcal{O} . Fixons $U \in \mathcal{U}$ tel que $f(x) \in U$ et montrons que $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U$. Or, f étant continue, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x . Donc $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in f^{-1}(U)$ et on a donc, comme désiré, $f(x_n) \in U$. \circ

Définition 1.13 Espace compact

On dit qu'un espace E est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Exercice 11

Soit E un espace topologique compact, montrer que toute suite de points de E possède une valeur d'adhérence.

Exercice 12 Montrer que l'image d'un compact par une fonction continue à valeurs dans un espace séparé est un compact.

Définition 1.14 On appelle topologie sur E la moins fine vérifiant une propriété P la topologie ayant cette propriété P et qui a le moins d'ouverts possible. Cette topologie \mathcal{U} est donc telle que pour toute autre topologie \mathcal{O} vérifiant P , on ait $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$.

Exercice 13 Montrer que la topologie \mathcal{U} peut être construite comme l'intersection de toutes les topologies vérifiant la propriété P . (Expliquer d'abord pourquoi cette intersection est non vide!)

Proposition 1.3 Soit $(E_j, \mathcal{O}_j)_{j \in J}$ une famille d'espaces topologiques et $\varphi_j : E \rightarrow E_j$ une famille d'applications définies sur un ensemble E . Les ouverts de la topologie la moins fine sur E rendant continues les applications φ_j sont tous de la forme :

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in F_i} \varphi_j^{-1}(U_j), \quad (1.1)$$

où U_j désigne un ouvert quelconque de E_j , F_i est un sous-ensemble fini quelconque de J et I est un ensemble quelconque d'indices.

La même formule est encore valide si on restreint les U_j à une base de voisinages ouverts de E_j .

Remarque 1.1 En conséquence, on a la base de voisinages de $x \in E$:

$$\bigcap_{j \in F} \varphi_j^{-1}(O_j),$$

où $F \subset J$ est fini, et O_j appartient à une base de voisinages de $\varphi_j(x)$ dans E_j . Donc on peut caractériser la convergence des suites pour cette topologie de la manière très simple suivante :

$x_n \rightarrow x$ pour la topologie \mathcal{O} si et seulement si $\varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x)$ pour tout i .

Lemme 1.1 Soient $(A_i)_{i \in J}$ une famille d'ensembles et $(J_i)_{i \in F}$ une famille de parties de J . Alors

$$\bigcap_{i \in F} \bigcup_{j \in J_i} A_j = \bigcup_{\psi \in \Psi} \bigcap_{i \in F} A_{\psi(i)},$$

où Ψ est l'ensemble de toutes les applications $i \in F \rightarrow \psi(i) \in J_i$.

Cette dernière formule implique que si \mathcal{A} est une famille d'ensembles, alors "toute intersection finie d'unions d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} est une union d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} ."

Démonstration Si x appartient à $\bigcap_{i \in F} \bigcup_{j \in J_i} A_j$, cela revient à dire que

$$\forall i \in F, \exists j (= \psi(i)) \in J_i, \quad x \in A_j \Leftrightarrow$$

$$\exists \psi : F \rightarrow \cup_i J_i, \quad \psi(i) \in J_i, \quad \forall i \in F \quad x \in A_{\psi(i)}.$$

◻

Démonstration de la proposition 1.3 Si les φ_i sont continues, tout élément de la forme (1.1) est bien un ouvert de E . Réciproquement, la famille des ensembles de la forme (1.1) est évidemment stable par union quelconque, et par intersection finie d'après le lemme 1.1. \circ

Définition 1.15 Topologie produit Soit (E_i, \mathcal{O}_i) des espaces topologiques. L'espace topologique produit $E = \prod_i E_i$ peut être muni de la topologie produit, définie comme la moins fine rendant les projections de E sur chaque E_i continues.

Théorème 1.2 de Tikhonov Soit $K = \prod_i K_i$ un produit de compacts. On note ses éléments $\omega = (\omega_i)_i$ et on le munit de la topologie produit, c'est-à-dire la moins fine rendant les projections $\omega \rightarrow w_i \in K_i$ continues. Alors K est compact.

1.1 Cas des espaces métriques

Nous rappelons ici un certain nombre de propriétés vraies dans les espaces métriques. Dans tout ce qui suit le couple (E, d) , ou plus simplement E , désignera un espace métrique muni d'une distance d . On rappelle aussi qu'un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy converge.

Exercice 14 Soit E un espace métrique alors

- 1) l'espace E est séparé,
- 2) si A est une partie de E et si $x \in E$ alors $x \in \bar{A} \iff d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0 \iff \exists (x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x$.

Exercice 15 Continuité séquentielle

Si E et F sont des espaces métriques, alors $f : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si elle est *séquentiellement continue*, c'est-à-dire si $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Exercice 16 Soit E un espace métrique. Soient $(x_n)_n$ une suite dans E et $x \in E$. Alors montrer que x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et seulement si il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers x .

Définition 1.16 Compacité séquentielle Si E est un espace métrique compact, on sait maintenant que de toute suite de points de E , on peut extraire une sous-suite convergente. On traduit cette propriété en disant qu'un espace métrique compact est *séquentiellement compact*.

Théorème 1.3 Soit E un espace métrique, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'espace E est compact.
- (ii) Toute suite de points de E admet une valeur d'adhérence.
- (iii) Toute suite de points de E a une sous-suite convergente.

Exercice 17

Montrer le théorème de Tikhonov dans le cas un peu moins général suivant : $K = \prod_{n \in \mathbb{N}} K_n$ (produit dénombrable) et on suppose que K_n est métrisable et donc muni d'une distance d_n . Commencer par montrer que K est métrisable en posant

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n \text{diam}(K_n)},$$

où $\text{diam}(K_n) = \max\{d(x_n, y_n), x_n, y_n \in K_n\}$ est le diamètre de K_n et $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$.

Théorème 1.4 *Un espace métrique compact est complet.*

Exercice 18 Montrer que les compacts de \mathbb{R}^N muni de la distance euclidienne canonique sont les fermés bornés.

Définition 1.17 *On dit que $f : E \rightarrow F$ espaces métriques est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon \exists \eta, \forall x, y \in E (d(x, y) < \eta) \Rightarrow (d(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

On pose $m(r) := \sup_{d(x,y) < r} d(f(x), f(y))$. Montrer que f est uniformément continue si et seulement si $m(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$. On appelle m le module de continuité uniforme de f .

Exercice 19 Si E est un espace métrique compact, F métrique et si $f : E \rightarrow F$ est continue alors elle est uniformément continue.

Exercice 20 Montrer que toute fonction réelle continue sur un compact atteint son maximum et son minimum. On pourra considérer une suite minimisante et utiliser la compacité séquentielle et la continuité séquentielle...

Théorème 1.5 dit de prolongement

Soient E un espace métrique et F un espace métrique complet. Soit $X \subset E$, une partie dense dans E . Enfin soit $f : X \rightarrow F$ uniformément continue. Montrer qu'il existe un unique prolongement \tilde{f} de f , continu. De plus, \tilde{f} est uniformément continue.

Pour des compléments de topologie générale nous renvoyons aux ouvrages de G.Choquet et J.Dixmier, et à la Topologie Générale de N. Bourbaki.

1.2 Théorème d'Ascoli-Arzela

Exercice 21

Soit E un espace métrique et $A \subset E$ une partie non vide. Montrer que \bar{A} est compact si et seulement si de toute suite de points de A , on peut extraire une sous-suite convergeant dans E .

Théorème 1.6 (Ascoli-Arzela) *Soit f_n une suite de fonctions définies sur un espace métrique compact (K, d) et à valeurs réelles. On suppose que la suite f_n a les deux propriétés suivantes :*

- f_n est équicontinue : $\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall x, y \in K, \forall n \in \mathbb{N}, d(x, y) \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$.
- La suite $(f_n(x))_n$ est bornée pour tout $x \in K$.

Alors il existe une sous-suite de f_n qui converge vers une fonction continue f .

Démonstration Remarquons d'abord qu'il existe une suite de points $(x_k)_k$ qui est dense dans K . En effet, K est compact et donc on peut le recouvrir pour tout n par un nombre fini de boules de rayon plus petit que $\frac{1}{n}$. L'union des centres de ces boules est un ensemble dénombrable qui répond à la question.

On va alors extraire pour tout k de la suite f_n une sous-suite $f_{\varphi_k(n)}$ telle que $f_{\varphi_k(n)}(x_1)$ converge pour $l \leq k$ et telle que $f_{\varphi_k(n)}$ soit une sous-suite de $f_{\varphi_{k-1}(n)}$. On procède par extractions successives. Comme la suite $f_n(x_1)$ est bornée, la suite f_n admet une sous-suite convergente en x_1 que nous notons $f_{\varphi_1(n)}$. On extrait de cette sous-suite une nouvelle sous-suite $f_{\varphi_2(n)}$ qui converge aussi en x_2 , etc.. On applique alors le procédé dit d'extraction diagonale : on considère la suite de fonctions $g_n = f_{\varphi_n(n)}$. Elle converge en tout point de la suite x_k . On appelle $g(x_k)$ sa limite en x_k . Dès que $n \geq k$, la suite $f_{\varphi_n(n)}$ devient une sous-suite de $f_{\varphi_k(n)}$. Elle converge donc en x_k . La

suite g_n converge donc en tout x_k . En fait, la fonction g est uniformément continue et se prolonge d'une manière unique en une fonction continue sur K , que nous noterons encore g . Voyons pourquoi. On a

$$|g(x_l) - g(x_k)| \leq |g(x_l) - g_n(x_l)| + |g(x_k) - g_n(x_k)| + |g_n(x_l) - g_n(x_k)|.$$

Le troisième terme est rendu inférieur à ε pour tout n si on impose $d(x_l, x_k) < \eta(\varepsilon)$. Les deux premiers termes tendent vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. On obtient donc $|g(x_l) - g(x_k)| \leq \varepsilon$ si $d(x_k, x_l) < \eta(\varepsilon)$. Donc g est uniformément continue sur la suite x_k et a d'ailleurs le même module d'uniforme continuité que la suite f_n . La fonction g est uniformément continue sur un ensemble dense dans K . Par le théorème 1.5 page 12, elle se prolonge de manière unique en une fonction uniformément continue sur K , avec le même module de continuité uniforme. Montrons pour finir que $g_n \rightarrow g$ uniformément. On fixe $\varepsilon > 0$, puis k assez grand pour

$$\forall x \in K, \exists l \leq k, d(x, x_l) \leq \eta(\varepsilon).$$

On fixe n_0 assez grand pour que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \forall l \leq k, |g_n(x_l) - g(x_l)| \leq \varepsilon.$$

En combinant les deux dernières inégalités, on a pour $n \geq n_0$ et x dans K ,

$$|g_n(x) - g(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_l)| + |g_n(x_l) - g(x_l)| + |g(x_l) - g(x)| \leq 3\varepsilon.$$

◦

Remarque 1.2 On peut montrer que le théorème d'Ascoli-Arzelà est encore valable si les fonctions f_n sont à valeurs dans un espace métrique complet et si on suppose, comme deuxième hypothèse, que pour tout x dans K , l'ensemble $(f_n(x))$ est relativement compact (c'est-à-dire de fermeture compacte), voir les ouvrages de [Choquet] et [Dixmier].

Corollaire 1.1 Toute famille f_n de fonctions L -lipschitziennes réelles, définies sur un compact K et telle que pour un certain point x_0 , $f_n(x_0)$ soit borné admet une sous-suite uniformément convergente vers une fonction également L -lipschitzienne.

Démonstration Comme K est compact, il est borné et on a donc $d(x, x_0) \leq M$ pour tout x dans K . D'où $|f_n(x)| \leq |f_n(x_0)| + LM$ est aussi borné. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà. ◦

Exercice 22 (longueur d'un arc rectifiable)

On appelle arc rectifiable un sous-ensemble C de \mathbb{R}^N qui est l'image d'une application Lipschitz $c : s \in [0, 1] \rightarrow c(s) \in \mathbb{R}^N$. On appelle longueur de l'arc, $l(C)$, l'infimum des constantes de Lipschitz des applications surjectives $c : [0, 1] \rightarrow C$. Montrer que cet infimum est atteint.

Marche à suivre : considérer une suite c_n dont les constantes de Lipschitz tendent vers $l(C)$. Extraire une sous-suite convergeant uniformément vers un arc c et montrer que c est Lipschitz et que sa constante de Lipschitz est égale à $l(C)$.

1.3 Exercices

Exercice 23 Démontrer le théorème 1.3 :

Soit E un espace métrique, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'espace E est compact.
- (ii) Toute suite de points de E admet une valeur d'adhérence.
- (iii) Toute suite de points de E a une sous-suite convergente.

Indication pour (iii) \Rightarrow (i) : Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E ,

- 1) montrer que $\exists r > 0$, tel que $\forall x \in E, \exists i \in I$, tel que $B(x, r) \subset O_i$.
- 2) montrer que E est recouvert par un nombre fini de O_i .

Exercice 24

Démontrer le théorème 1.5

Exercice 25 Montrer qu'un espace métrique compact est séparable.

Exercice 26

1) Soient E un espace vectoriel réel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé

- a) Montrer que toutes les normes sur E sont équivalentes.
- b) Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire, montrer que u est continue.

2) Soit $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$. On définit sur E , $N_0(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}|$ et $N_1(a + b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|)$.

- a) Vérifier que N_0 et N_1 sont des normes sur E .

Soit $x = \sqrt{2} - 1$, montrer que $\forall n \geq 1, x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ et $a_n b_n < 0$.
En déduire que $(\sqrt{2} + 1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$.

b) Montrer que N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes sur E . (E est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie, commenter.)

Exercice 27 Soient E et F deux espaces vectoriels normés

a) Montrer que si F est complet, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est complet (donc E' est toujours complet).

b) Montrer que si $\overline{B}_E(0, 1)$ est compacte, la dimension de E est finie.

Exercice 28 Soient E un espace vectoriel normé et $f \in E', f \neq 0$.

Soit $H = \{x \in E : f(x) = 0\}$, on se propose de montrer que

$$\forall x \in E, \quad d(x, H) = \inf_{y \in H} \|x - y\| = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \quad (\star)$$

1) Vérifier que $|f(x)| \leq \|f\| d(x, H), \forall x \in E$.

2) Soit $u \in E \setminus H$, en notant que $y = x - \frac{f(x)}{f(u)} u$ est dans H , montrer que $d(x, H) \leq \frac{|f(x)|}{|f(u)|} \|u\|$ et prouver (\star) .

3) Soit $E = \mathcal{C}_0 = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \text{ tel que } x_n \rightarrow 0\}$ que l'on munit de

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

a) Vérifier que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

b) Soient $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ et $H = \text{Ker} f$. Vérifier que $f \in E'$, donner une expression de $d(x, H)$. $\|f\|_{E'}$ est-elle atteinte?

Exercice 29 Théorèmes du point fixe

1) Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $f : E \rightarrow E$ une application k -lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f admet un unique point fixe $x = f(x)$.

2) Soit (E, d) un espace métrique complet et soit Λ un espace topologique. Soit $f : E \times \Lambda \rightarrow E$ telle que

- $\forall x \in E, \lambda \rightarrow f(x, \lambda)$ est continue de Λ dans E ,

- $\exists k < 1, \forall \lambda \in \Lambda, x \rightarrow f(x, \lambda)$ est k -lipschitzienne de E dans E . On pose $f_\lambda(x) = f(x, \lambda)$. Si a_λ est l'unique point fixe de f_λ , montrer que $\lambda \rightarrow a_\lambda$ est continue de Λ dans E .

3) Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

4) Soit C un convexe compact dans E espace vectoriel normé et soit $f : C \rightarrow C$ 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe (pour z fixé dans C , considérer $f_n(x) = \frac{1}{n+1}z + \frac{n}{n+1}f(x)$).

Exercice 30

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = (f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt)^{1/2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$.

a) Vérifier que N est une norme sur E .

b) Montrer que pour toute f dans E , $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.

c) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes sur E .

Exercice 31

Soit E un espace métrique complet tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon ε , montrer que E est compact.

Exercice 32

Soient E et F deux espaces de Banach. On note $B_E = \overline{B_E(0, 1)}$. On dit que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur compact si $T(B_E)$ est compact dans F .

1) Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim \text{Im} T < \infty$, montrer que T est compact.

2) Soit E l'espace de Banach $\mathcal{C}[0, 1]$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f(x)|$.

Soit $K \in \mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1])$. Pour $f \in E$, on définit $T(f)$ par

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy.$$

Vérifier que $T(f) \in E$ et que $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Puis, montrer que T est compact.

Exercice 33 Soit $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} , à valeurs réelles. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On souhaite montrer ici que E n'est pas séparable.

On note $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites constituées de 0 ou 1.

1) Montrer que A n'est pas dénombrable.

2) Vérifier que $\forall z = (z_n)_n \in A$, il existe $f_z \in E$ telle que $f_z(n) = z_n, \forall n, 0 \leq f_z(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ et telle que $z \neq t \Rightarrow \|f_z - f_t\|_\infty = 1$.

3) Supposer qu'il existe une suite $(g_n)_n$ dense dans E et construire une injection de A dans \mathbb{N} . Conclure.

Exercice 34

Pour p réel et $0 < p < \infty$, on note

$$\ell^p = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

Pour $1 \leq p < \infty$, on note $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Enfin, on note

$$\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} \text{ tel que } \sup_n |x_n| < \infty\}$$

que l'on munit de $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$.

Enfin on note $e^n = (\delta_{ni})_{i \geq 1}$ où $\delta_{ni} = 1$ si $i = n$, $\delta_{ni} = 0$ sinon.

I.- Etude de ℓ^p quand $1 \leq p \leq \infty$.

Préliminaire : Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

1) Pour $x = (x_n) \in \ell^p$, on note $x^N = \sum_{n=1}^N x_n e^n$. Vérifier que si $x \in \ell^p$ avec $1 \leq p < \infty$, alors $\|x^N - x\|_p \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ (on écrira alors $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^n$).

Par contre, vérifier que $\exists x \in \ell^\infty$ tel que $\|x^N - x\|_\infty$ ne tend pas vers 0.

2) Si $1 \leq p < \infty$, montrer que ℓ^p est séparable.

3) On souhaite, dans cette question, démontrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Soit $A = \{x \in \ell^\infty : \forall n, x_n = 0 \text{ ou } 1\}$, vérifier que $\forall x, y \in A$ tels que $x \neq y$, $\|x - y\|_\infty \geq 1$.

Si D est une partie dense dans ℓ^∞ , construire une injection de A dans D et conclure.

4) Soit $1 < p < \infty$ et soit $p' = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Montrer que $\forall a \geq 0$, $\forall b \geq 0$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$. En déduire que $\forall x = (x_n)_n \in \ell^p$, $\forall y = (y_n)_n \in \ell^{p'}$, $\forall \lambda > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} |x_n y_n| \leq \frac{1}{p} \|x\|_p^p \lambda^{p-1} + \frac{1}{\lambda^{p'}} \|y\|_{p'}^{p'}.$$

En choisissant bien λ , montrer l'inégalité

$$\sum_{n \geq 1} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

Vérifier que cette inégalité est encore vraie avec $p = 1$ et $p' = \infty$.

5) Soit $p' = \infty$ si $p = 1$ et $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Soit $y = (y_n)_n \in \ell^{p'}$. On considère

$$\begin{aligned} f : \ell^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sum_{n \geq 1} x_n y_n, \end{aligned}$$

avec $x = (x_n)_n$. Montrer que $f \in (\ell^p)'$. On pose $\Lambda_y = f$ et on définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \Lambda : \ell^{p'} &\longrightarrow (\ell^p)' \\ y &\longmapsto \Lambda_y, \end{aligned}$$

où $\langle \Lambda_y, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\forall x = (x_n)_n \in \ell^p$.

a) Montrer que Λ est une isométrie.

b) Montrer que Λ est un isomorphisme.

6) Soit C_0 l'espace des suites de réels $(x_n)_n$ qui tendent vers 0. On rappelle que C_0 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach. Identifier le dual topologique $(C_0)'$ de C_0 .

II.- Etude de ℓ^p pour $0 < p < 1$.

On pose $d(x, y) = \sum_1^{\infty} |x_n - y_n|^p$ pour $x, y \in \ell^p$.

1) Vérifier que ℓ^p est une espace vectoriel (réel) et que d est une distance sur ℓ^p qui vérifie $\forall x, y \in \ell^p, d(x, y) = d(0, x - y)$.

L'espace (ℓ^p, d) est complet, c'est le même démonstration que dans la partie I.

2) Pour $x = (x_n) \in \ell^p$ on note $x^N = \sum_{n=1}^N x_n e^n$. Vérifier que $d(x^N, x) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ et que $\ell^p \subset \ell^1$.

3) L'objet de cette question est de montrer que les boules (pour d) ne sont pas convexes.

a) D'abord, montrer que si E est un espace vectoriel et si une partie $A \subset E$ est convexe alors $\forall N$ entier, $N \geq 1, \forall (x_1, \dots, x_N) \in A^N, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in [0, 1]^N$ tels que

$$\sum_1^N \lambda_i = 1, \text{ on a } \sum_1^N \lambda_i x_i \in A.$$

b) Soit $R > 0$, montrer que $\exists \alpha > 0$, tel que $\forall n \geq 1, \alpha e^n \in B_d(0, R)$ et que $\forall \beta > 0$,

$$\frac{\alpha e^n}{n^\beta} \in B_d(0, R).$$

c) En déduire que $B_d(0, R)$ n'est pas convexe (raisonner par l'absurde) et conclure.

4) En reprenant les notations de la question I-5), soit $y \in \ell^\infty$, montrer que Λ_y est une application bien définie, linéaire et continue de (ℓ^p, d) à valeurs dans \mathbb{R} .

5) On note $(\ell^p)'$ l'ensemble des applications linéaires continues de (ℓ^p, d) à valeurs dans \mathbb{R} .

On définit l'application Λ , comme dans la partie I, par

$$\begin{aligned} \Lambda : \ell^\infty &\longrightarrow (\ell^p)' \\ y &\longmapsto \Lambda_y, \end{aligned}$$

où $\langle \Lambda_y, x \rangle = \sum x_n y_n, \forall x \in \ell^p$. Montrer que Λ est linéaire bijective.

Chapitre 2

L'intégrale de Lebesgue

2.1 L'intégrale de Lebesgue

Le but de ce chapitre n'est pas de construire la mesure et l'intégrale de Lebesgue, mais d'en présenter un résumé organisé. Nous présenterons un certain nombre de propriétés (six au total) qui peuvent être prises comme une axiomatique de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue et dont nous déduisons ensuite les autres propriétés. La preuve qu'il existe effectivement une notion d'intégrale et de mesure vérifiant les propriétés que nous énoncerons se trouve dans de très nombreux livres de théorie de la mesure, de probabilité, et d'analyse, notamment Falconer [7], Rudin [12], Williams, [16], etc.

On admet l'existence d'une classe de fonctions $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, +\infty]$ que l'on appelle "fonctions mesurables au sens de Lebesgue". Si $f = \mathbb{1}_E$ est une fonction caractéristique d'un sous-ensemble E de \mathbb{R}^N , c'est-à-dire $f(x) = 1$ si $x \in E$, $f(x) = 0$ sinon et si f est mesurable, on dit que E est mesurable, ou Lebesgue-mesurable. Dans tout ce qui suit, nous admettons que les fonctions et les ensembles considérés sont mesurables et nous admettons l'existence d'une application qui à toute fonction f mesurable et à valeurs dans $[0, +\infty]$ associe son *intégrale de Lebesgue* que l'on notera de manière plus ou moins abrégée

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int f(x) dx = \int f \in [0, +\infty].$$

Si $f = \mathbb{1}_E$ est une fonction caractéristique, on note $\mu(E) = \int \mathbb{1}_E$ et on appelle ce nombre *mesure de E* . En l'absence d'une construction explicite, les **propriétés** qui suivent doivent être considérées comme des axiomes vérifiés par l'intégrale de Lebesgue. A partir de ces axiomes, nous démontrerons les autres propriétés dont nous aurons besoin.

Propriété 2.1 *Linéarité positive : pour f et g à valeurs dans $[0, +\infty]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, $\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$.*

Remarquons que l'on en déduit la croissance de l'intégrale : si $0 \leq f \leq g$, alors $\int f \leq \int g$

Propriété 2.2 . *Si $f \geq 0$ est Riemann-intégrable, alors elle est Lebesgue mesurable et son intégrale au sens de Lebesgue est égale à son intégrale au sens de Riemann.*

Propriété 2.3 (Théorème de Beppo-Levi ou de la convergence monotone) *Si f_n est une suite croissante de fonctions mesurables définies sur \mathbb{R}^N et à valeurs dans*

$[0, +\infty]$, on a

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx \leq +\infty.$$

Exercice 1 Si $\sum u_n$ est une série de fonctions $\mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$, on peut intervertir sommation et intégration : $\int \sum_n u_n(x) dx = \sum \int u_n(x) dx$.

Proposition 2.1 Si A et B sont deux ensembles mesurables, alors $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$. Si A_n sont des ensembles disjoints, $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$. Si les A_n ne sont pas disjoints, on a $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

Démonstration Exercice : Appliquer le théorème de Beppo-Levi aux fonctions caractéristiques des ensembles pour le premier énoncé. \circ

Lemme 2.1 (Lemme de Fatou). Soit f_n une suite de fonctions positives. Alors

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_n \int f_n.$$

Cette inégalité est vraie que les membres de droite et de gauche soient finis, ou infinis.

Démonstration Posons $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Cette suite est croissante. On applique le théorème de la convergence monotone (Beppo-Levi). Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \inf_{k \geq n} f_k = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. Mais $\int \inf_{k \geq n} f_k \leq \inf_{k \geq n} \int f_k$. On conclut aisément. \circ

Définition 2.1 On appelle ensemble négligeable tout ensemble de mesure nulle. On dit qu'une propriété est vérifiée presque partout si elle est vraie sauf sur un ensemble négligeable.

En vertu de la proposition 2.1, toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Proposition 2.2 Soit f définie sur \mathbb{R}^N et à valeurs dans $[0, +\infty]$. On a

$$\int f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ p.p.}$$

Démonstration On pose $A = \{x, f(x) \neq 0\}$. On a

$$f(x) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} j \mathbb{1}_A(x).$$

Si $\mu(A) = 0$, on obtient par le théorème de la convergence monotone (Beppo-Levi),

$$\int f(x) dx \leq \lim_{j \rightarrow \infty} j \int \mathbb{1}_A(x) dx = 0.$$

Réciproquement, si $\int f(x) dx = 0$, remarquons que $\mathbb{1}_A(x) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} j f(x)$ et donc, à nouveau par Beppo-Levi,

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A(x) dx \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int j f(x) dx = 0.$$

\circ

Définition 2.2 Soit f une fonction définie dans \mathbb{R}^N et à valeurs dans \mathbb{C} . On dit que f est sommable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx < \infty.$$

L'espace des fonctions sommables est noté $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Si $f(x) \in \mathbb{R}$, on note $f = f^+ - f^-$, où $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Ces deux fonctions sont intégrables si $|f|$ l'est et on pose

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Si $f = f_1 + if_2$ est à valeurs complexes, on pose

$$\int f = \int f_1 + i \int f_2.$$

Exercice 2 Si une fonction f à valeurs réelles vérifie $f = g - h$, avec $g \geq 0$, $h \geq 0$, alors $\int f = \int g - \int h$.

Proposition 2.3 L'application $f \rightarrow \int f$ est linéaire de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ dans \mathbb{C} . Si f et g sont sommables et à valeurs complexes,

$$|\int f(x) dx| \leq \int |f(x)| dx, \quad |\int f(x) + g(x) dx| \leq \int |f(x)| dx + \int |g(x)| dx. \quad (2.1)$$

Démonstration On montre l'additivité pour des fonctions réelles : on a $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ et donc, en utilisant le résultat de l'exercice 2 et l'additivité de l'intégrale pour les fonctions positives,

$$\int (f + g) = \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) = \int f + \int g.$$

Par la définition 2.2, on a si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int \lambda f = \int (\lambda f)^+ - \int (\lambda f)^-$. Si $\lambda > 0$, cela donne $\int \lambda f = \lambda \int f^+ - \lambda \int f^- = \lambda \int f$. On procède de même si $\lambda < 0$ car alors $(\lambda f)^+ = \lambda f^-$ et $(\lambda f)^- = \lambda f^+$. On obtient $\int \lambda f = \lambda \int f$ quand λ est réel. Le cas où λ est complexe se déduit alors aisément en utilisant la définition 2.2.

Montrons la première relation de (2.1), qui entraîne immédiatement la seconde. On choisit un nombre complexe θ de module 1 tel que $\theta \int f$ soit un réel positif. Donc

$$|\int f(x) dx| = \theta \int f = \operatorname{Re}(\theta \int f) = \int \operatorname{Re}(\theta f(x)) dx \leq \int (\operatorname{Re}(\theta f(x)))^+ dx \leq \int |f(x)| dx.$$

◊

Définition 2.3 L'espace $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Une conséquence de la proposition 2.2 est que si f et g sont égales presque partout, elles ont la même intégrale. A partir de maintenant on identifie les fonctions égales presque partout entre elles. On note $L^1(\mathbb{R}^N)$ l'espace vectoriel des classes d'équivalence de fonctions pour cette relation d'équivalence. Tous les énoncés qui suivent concerneront désormais ces classes. On choisira souvent par commodité une représentante u de la classe, ce qui sera licite à condition de la considérer comme "définie presque partout" (p.p.). On s'autorisera donc à écrire $u(x)$, mais cette écriture n'aura jamais un sens ponctuel (à moins qu'un élément de la classe ne s'avère continu).

Les énoncés portant sur $u(x)$ n'auront de sens que si on leur ajoute la mention "presque partout". On notera

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)| dx.$$

Exercice 3 Vérifier que $\|u\|_{L^1}$ est bien une norme sur $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 2.1 (de Lebesgue, ou de la convergence dominée) Soit f_n une suite de fonctions qui converge presque partout vers une fonction f . On suppose qu'il existe une fonction positive sommable fixe h telle que l'on ait pour tout n , $|f_n(x)| \leq h(x)$ p.p.. (Cette fonction $h(x)$ s'appelle un chapeau intégrable de la suite f_n). On a alors

$$\int |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad \int f_n(x) dx \rightarrow \int f(x) dx \quad (2.2)$$

Démonstration On remarque que la conclusion (2.2) ne dépend pas du choix des représentants des fonctions f_n et de f . Soit $A_n = \{x, |f_n(x)| > h(x)\}$ et B l'ensemble des points où f_n ne converge pas vers f . Alors $C = B \cup (\bigcup_n A_n)$ est négligeable. On peut donc supposer, en changeant de représentants pour f_n et f , que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ partout et que $|f_n(x)| \leq h(x)$ partout (pour tout x).

On pose $h_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$. Alors h_n est une suite décroissante de fonctions positives qui tend vers zéro partout. De plus, $h_n(x) \leq 2h(x)$ partout. On va montrer que $\int h_n(x) dx$ tend vers zéro, ce qui nous donnera (2.2). Or, le théorème de la convergence monotone (Beppo-Levi) s'applique à la suite croissante de fonctions positives $2h - h_n$ et donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int (2h(x) - h_n(x)) dx = 2 \int h(x) dx.$$

Donc $\int h_n(x) dx \rightarrow 0$. ◦

Théorème 2.2 (Réciproque du théorème de Lebesgue).

Si $f_n \rightarrow f$ dans L^1 , alors il existe une sous-suite f_{n_k} de la suite f_n qui converge presque partout vers f et un chapeau intégrable h tel que $\forall k, |f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ p.p..

Le théorème de Lebesgue nous permet de justifier une technique d'approximation de f sommable par des fonctions bornées : la troncature.

Définition 2.4 et Proposition On pose pour $M > 0$, $f^M = \max(-M, \min(M, f))$ et on l'appelle troncature de f . Alors :

1. f^M tend vers f presque partout ;
2. si f est sommable, $\int |f^M - f| \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow \infty$;
3. on a toujours $|f^M - g^M| \leq |f - g|$.

Démonstration La première propriété est évidente et la seconde une conséquence immédiate de Lebesgue, puisque $|f|$ est chapeau intégrable pour f^M . La troisième propriété vient de ce que $s \rightarrow \max(-M, \min(M, s))$ est une fonction 1-Lipschitz. ◦

Proposition 2.4 Soit f une fonction sommable. Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta, \text{mes}(K) < \eta \Rightarrow \int_K |f(x)| dx < \varepsilon.$$

Démonstration Par la seconde propriété de la définition 2.4, on peut choisir M assez grand pour que $\int |f_M - f| < \varepsilon$. On a alors

$$\int_K |f| \leq \int_K |f - f^M| + \int_K |f_M| \leq \varepsilon + M \text{mes}(K),$$

et on conclut aisément. \circ

Théorème 2.3 dit de convergence bornée Soit f_k sommable une suite uniformément bornée tendant en probabilité vers f sur un ensemble borné C . Alors $\int_C |f_k - f| \rightarrow 0$.

Démonstration Appelons M la borne uniforme de f_k . Il est facile de vérifier qu'aussi $|f| \leq M$ presque partout. On choisit k assez grand pour que $\text{mes}(\{|f_k - f| > \varepsilon\}) < \varepsilon$. On a alors

$$\int |f_k - f| \leq \int_{|f_k - f| > \varepsilon} |f_k - f| + \int_{|f_k - f| \leq \varepsilon} |f_k - f| \leq 2M\varepsilon + \varepsilon \text{mes}(C).$$

\circ

On peut obtenir la convergence L^1 d'une suite convergeant en probabilité si on a une information supplémentaire : l'équintégrabilité de la suite.

Définition 2.5 Une suite de fonctions f_k est dite équintégrable si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta, \text{mes}(K) < \eta \Rightarrow \forall k \geq 1, \int_K |f_k(x)| dx < \varepsilon.$$

Remarquer que par la proposition 2.4, la suite $f_k = f$ est équintégrable si f est sommable.

Lemme 2.2 (Vitali) Soit C un borné de \mathbb{R}^N et f_k une suite de fonctions équintégrable dans $L^1(C)$ qui converge en probabilité vers une fonction f . Alors f_k converge vers f dans $L^1(C)$.

Démonstration On a

$$M \text{mes}(\{|f_k| \geq M\}) \leq \int |f_k(x)| \leq c$$

et donc $\text{mes}(\{|f_k| \geq M\}) \leq \eta$ pour M assez grand. En prenant $\eta = \eta(\varepsilon)$ et en utilisant l'équintégrabilité, on en déduit que $\int_{\{|f_k| \geq M\}} |f_k(x)| dx \leq \varepsilon$ pour M assez grand. Utilisant la définition de la troncature, on déduit que pour M assez grand,

$$\int |f_k^M - f_k| \leq \int_{\{|f_k| \geq M\}} |f_k(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Fixons M tel qu'on ait aussi $\int |f - f^M| < \varepsilon$. Finalement, remarquant que f_k^M converge en probabilité vers f^M , prenons, par le théorème 2.3 de convergence bornée, k assez grand pour que $\int |f^M - f_k^M| < \varepsilon$. Donc pour ces valeurs de M et de k ,

$$\int |f - f_k| \leq \int |f - f^M| + \int |f^M - f_k^M| + \int |f_k^M - f_k| \leq 3\varepsilon.$$

\circ

Théorème 2.4 (Théorème de dérivation sous le signe somme) Soient I un intervalle de \mathbb{R} et A un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On se donne une fonction f définie sur $A \times I$ vérifiant les trois hypothèses suivantes.

- (a) Pour tout $\lambda \in I$, la fonction $x \rightarrow f(x, \lambda)$ est sommable sur A .
 (b) La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ existe en tout point de $A \times I$.
 (c) Il existe une fonction h positive et sommable sur A telle que l'on ait $|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)| \leq h(x)$ pour tous x et λ . Alors la fonction F définie par

$$F(\lambda) = \int_A f(x, \lambda) dx$$

est dérivable dans I et on a

$$F'(\lambda) = \int_A \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx.$$

Démonstration On a, à λ fixé,

$$\frac{1}{l}[F(\lambda + l) - F(\lambda)] = \int_A g_l(x) dx,$$

où l'on a posé

$$g_l(x) = \frac{1}{l}[f(x, \lambda + l) - f(x, \lambda)].$$

La fonction g_l converge en tout point vers $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$. D'autre part,

$$|g_l(x)| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda + \theta l) \right| \leq h(x)$$

d'après le théorème des accroissements finis. Le théorème résulte alors de l'application du théorème de Lebesgue. \circ

L'avant-dernière propriété de l'intégrale de Lebesgue que nous admettrons est la suivante. Comme précédemment, on suppose que les fonctions considérées sont mesurables. Nous allons souvent utiliser la notion de support d'une fonction et le terme "fonction à support compact".

Définition 2.6 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^N . On appelle support de f et on note $\text{Support}(f)$ le complémentaire du plus grand ouvert O tel que $f(x) = 0$ presque partout sur O . Le support de f est donc un fermé. S'il est de plus borné, on dit que f est à support compact.

Définition 2.7 On considère un quadrillage de taille a de l'espace \mathbb{R}^N par des hypercubes de longueur d'arête a . Posant $C = [0, a[^N$, ce quadrillage peut se définir par le recouvrement disjoint

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} (a\mathbf{n} + C).$$

On appelle fonction en escalier une fonction à laquelle on peut associer un quadrillage de taille a tel que f soit constante sur chacun des hypercubes du quadrillage et à support borné.

Définition 2.8 On appelle fonction en escalier dyadique une fonction en escalier associée à un quadrillage de taille $a = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 2.4 *Pour toute fonction f sommable sur \mathbb{R}^N , il existe une suite de fonctions en escalier qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Cette propriété reste vraie si on impose aux fonctions en escaliers d'être dyadiques.*

On va déduire de la proposition 2.4 une propriété de densité plus forte concernant les fonctions continues à support compact.

Définition 2.9 *Si f est une fonction continue et nulle en dehors d'une boule, son support est fermé et borné et donc compact. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , on note $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact contenu dans Ω .*

Corollaire 2.1 *Pour toute fonction f sommable sur \mathbb{R}^N il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire continues et à support compact, telles que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Démonstration On commence par montrer que si C est un hypercube de \mathbb{R}^N et $\mathbb{1}_C$ sa fonction caractéristique, alors il existe des fonctions continues f_N à support compact telles que $\int |f_N - \mathbb{1}_C|(x)dx$ soit arbitrairement petit. On peut bien sûr se ramener au cas où $C = [-1, 1]^N$. Commençons par le cas $N = 1$. On considère l'unique fonction continue et affine sur $[-1 - \varepsilon, -1]$ et sur $[1, 1 + \varepsilon]$ telle que $f_1(x) = 0$ si $|x| \geq 1 + \varepsilon$ et $f_1(x) = 1$ si $|x| \leq 1$. La fonction $f_N(x_1, \dots, x_N) = f_1(x_1) \dots f_1(x_N)$ convient en dimension N . En considérant les supports de f_N et de $\mathbb{1}_C$, on voit en effet que $\|\mathbb{1}_C - f_N\|_{L^1} \leq 2^N((1 + \varepsilon)^N - 1)$ qui tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Toute combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'hypercubes est donc approchable dans L^1 par une combinaison linéaire finie de fonctions continues à support compact. Il en résulte que toute fonction en escalier est approchable par des fonctions à support compact dans L^1 . On conclut en utilisant la propriété 2.4. \circ

L'espace $L^1(\mathbb{R}^N)$ apparaît donc comme la complétion de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ pour la norme

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|dx,$$

mais il faudra montrer qu'il est effectivement complet. Voyons tout de suite deux conséquences importantes de cette propriété de densité.

Théorème 2.5 (*équicontinuité en moyenne des fonctions sommables*) *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|dx = 0.$$

Démonstration On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit grâce au corollaire 2.1 une fonction f_ε , continue et à support compact inclus dans une boule $B(0, R)$, telle que $\|f_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \varepsilon$. La fonction f_ε est uniformément continue. Il existe donc η tel que $|y| \leq \eta \Rightarrow |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\text{mes}(B(0, 2R))}$. Ceci implique en intégrant $\int |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)|dx \leq \varepsilon$ pour $|y| \leq \min(\eta, R)$. On a donc

$$\begin{aligned} \int |f(x) - f(x+y)|dx &\leq \\ \int |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx + \int |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x+y)|dx + \int |f_\varepsilon(x+y) - f(x+y)|dx &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

\circ

Théorème 2.6 (de changement de variable)

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de \mathbb{R}^N et φ un difféomorphisme entre Ω_1 et Ω_2 . On notera $J_\varphi(x)$ le déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x . Soit f une fonction définie sur Ω_2 .

(a) Si la fonction f , mesurable, est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a l'égalité suivante, où les deux membres ont un sens dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\int_{\Omega_2} f(y)dy = \int_{\Omega_1} f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx. \quad (2.3)$$

(b) Si f est à valeurs complexes, elle est sommable dans Ω_2 si et seulement si $f(\varphi(x))J_\varphi(x)$ est sommable dans Ω_1 , et les deux membres de l'égalité précédente sont alors égaux.

Démonstration Par un résultat classique de calcul intégral la formule (2.3) est vraie si f est intégrable au sens de Riemann, continue, et à support compact contenu dans Ω . Pour la montrer dans ce cadre plus général, nous allons utiliser deux résultats que nous montrons dans le prochain chapitre. Le premier est que $L^1(\Omega)$ est complet (Théorème 3.3), et le second (Proposition 3.4) est que toute fonction de $L^1(\Omega)$ est la limite d'une suite de fonctions continues à support compact dans Ω . Pour éviter toute inconsistance, il faudra vérifier que nous n'utilisons pas le théorème de changement de variable pour montrer ces deux résultats, ce qui est bien le cas.

Si f est sommable sur Ω_2 , on peut donc considérer des fonctions continues f_n à support compact qui tendent vers f dans L^1 . Par la réciproque du théorème de Lebesgue, on peut aussi supposer que $f_n \rightarrow f$ presque partout. On a

$$\int_{\Omega_2} f_n(y)dy = \int_{\Omega_1} f_n(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx \quad (2.4)$$

et on peut écrire une formule analogue pour $|f_n - f_p|$. Il en résulte que les fonctions $f_n(\varphi(x))|J_\varphi(x)|$ forment une suite de Cauchy dans L^1 . On en déduit que leur limite simple $f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|$ est sommable dans Ω_1 . En passant à la limite à droite et à gauche dans (2.4), on obtient la formule de changement de variable (2.3). \circ

La dernière propriété de l'intégrale de Lebesgue que nous admettons est la suivante (nous supposons toutes les fonctions considérées mesurables).

Propriété 2.5 (Théorème de Fubini-Tonelli)

Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

(a) (Tonelli) Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a l'égalité suivante, où les trois membres définissent un élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x, y)dx dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)dx \right) dy.$$

(b) (Fubini) Si f est sommable dans \mathbb{R}^{p+q} , les trois membres de l'égalité précédente ont un sens et sont égaux. Plus précisément, dire que le troisième membre a un sens signifie :

- pour presque tout y , la fonction $x \rightarrow f(x, y)$ est sommable dans \mathbb{R}^p ,
- la fonction $\varphi(y) = \int f(x, y)dx$ qui est ainsi définie presque partout est sommable dans \mathbb{R}^q .

2.2 Mesurabilité et ensembles de niveau des images

Nous avons vu au début de ce chapitre qu'un ensemble E est dit mesurable si $\mathbb{1}_E$ est mesurable au sens de Borel-Lebesgue (c'est à dire dont on peut calculer une intégrale,

à valeurs dans $[0, +\infty]$, l'existence de cette intégrale ayant été admise). Le succès de l'intégrale de Lebesgue est dû d'une part au caractère très général de théorèmes tels que 2.4 et 2.1, et d'autre part au fait que la classe des applications mesurables est très large, et contient en particulier des ensembles très irréguliers. Pour justifier le besoin en pratique d'une théorie de l'intégration incluant des ensembles très irréguliers, nous utilisons les ensembles de niveau des images naturelles. Il est possible de montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable au sens de Borel-Lebesgue si les ensembles $\chi_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq \lambda\}$ sont mesurables pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (c'est à dire que l'ensemble des λ tels que χ_λ ne soit pas mesurable est négligeable au sens de la définition 2.1). Les ensembles χ_λ s'appellent "ensembles de niveau" de la fonction f . Nous nous intéressons au cas où $n = 2$, et où la fonction f représente une "image naturelle". C'est à dire que nous supposons que la lumière issue d'une scène est projetée sur un plan face à cette scène (au moyen d'instruments optiques) et que pour chaque point x de ce plan, la valeur $f(x)$ est la quantité de lumière reçue en ce point. On suppose que de telles fonctions sont bornées. Ces fonctions sont très oscillantes, comme en témoigne la figure 2.1. Cette figure représente d'une part la fonction f en associant à chaque point x du plan un gris d'autant plus clair que $f(x)$ est grand (le minimum de f correspond au noir et son maximum au blanc), et d'autre part le graphe de la fonction f (à chaque point x correspond une altitude proportionnelle à $f(x)$) dont l'aspect tridimensionnel est simulé par un algorithme de visualisation. Les oscillations sont principalement dues aux nombreux détails présents dans une telle scène, ainsi qu'aux perturbations aléatoires introduites par l'appareil optique (le "bruit"). Une autre façon d'appréhender l'irrégularité d'une telle fonction consiste à en tracer les ensembles de niveau, ce qui est fait sur la figure 2.1, sous-figure du bas, où l'on peut voir les frontières de quelques ensembles de niveau de la fonction f . On appelle lignes de niveau ces frontières. On remarquera que les lignes de niveau peuvent être très oscillantes et presque impossibles à suivre du regard.

2.3 Exercices

Exercice 4 Ensembles de Cantor

Soit $E_0 = [0, 1]$ et soit $(\ell_n)_n$ une suite de réels > 0 suffisamment petits. On construit de proche en proche une suite d'ensembles $(E_n)_n$, inclus dans E_0 , de la façon suivante :

On enlève au centre de E_0 un petit segment ouvert de longueur ℓ_1 et on appelle E_1 l'union des deux segments disjoints qui restent. On réapplique cette construction à E_1 , on enlève au centre des deux segments de E_1 un petit segment ouvert de longueur ℓ_2 et on appelle E_2 l'ensemble restant etc.. Si E_n est égal à l'union des 2^n segments disjoints ainsi obtenus, on enlève au centre de chacun d'eux un petit segment de longueur ℓ_{n+1} et on appelle E_{n+1} l'ensemble restant. On a $E_{n+1} \subset E_n \subset \dots \subset E_1$ et on pose $E = \bigcap_{n \geq 1} E_n$.

Calculer $|E|$. Si $\ell_n = (\frac{1}{3})^n$, on obtient l'ensemble triadique de Cantor, vérifier que $|E| = 0$.

Donner un exemple d'ensemble de Cantor E de mesure strictement positive.

Exercice 5

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ et soit h la fonction égale à $+\infty$ dans A et à 0 dans son complémentaire. Montrer en utilisant le théorème de convergence monotone, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } |A| = 0, \\ +\infty & \text{si } |A| > 0. \end{cases}$$

En déduire que si f est à valeurs dans $[0, +\infty]$ et vérifie $\int f(x) dx < +\infty$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = +\infty\}$ est de mesure nulle.

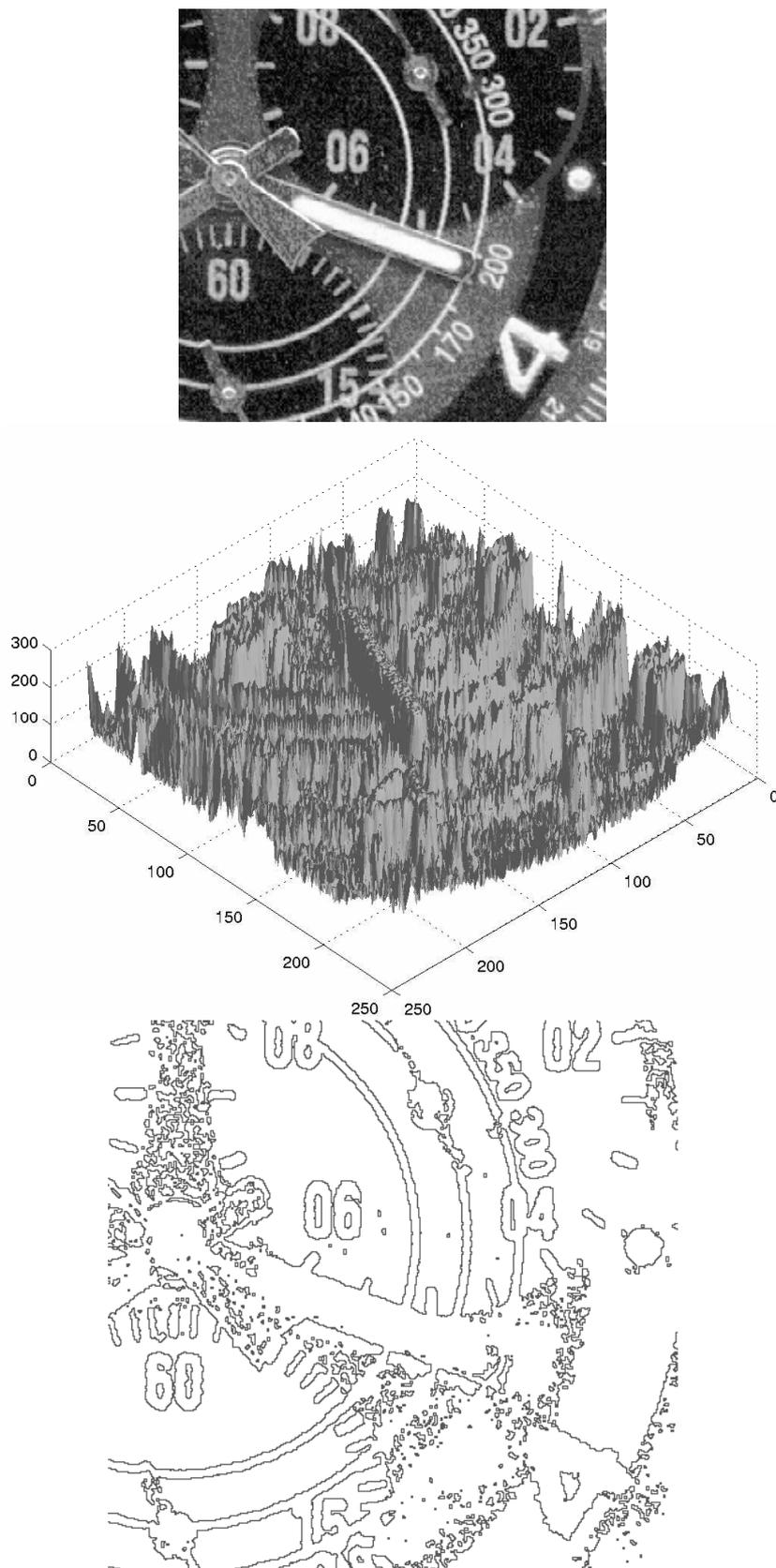


FIGURE 2.1 – Haut : représentation de la fonction f par niveaux de gris (à chaque point est affecté un gris d'autant plus clair que la valeur de f y est grande) ; milieu : représentation de f par son graphe (à chaque point est affecté une altitude d'autant plus élevée que la valeur de f y est grande) ; bas : quelques lignes de niveau (frontières des ensembles de niveau) de la fonction f . Sur cette dernière image, nous remarquons la présence de quelques lignes fortement oscillantes.

Exercice 6 Tout graphe est de mesure nulle.

1) Démontrer que le graphe d'une application continue f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est un sous-ensemble de mesure nulle dans \mathbb{R}^2 . (On montrera que la portion du graphe comprise entre les abscisses $-k$ et k peut être recouverte par des rectangles dont la somme des mesures est arbitrairement petite).

2) Même question si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, puis si f est borélienne.

Exercice 7

Soit f et g deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$ p.p.. Montrer que f et g sont égales partout.

Exercice 8

Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} . Démontrer que

$$\int_a^b f(x)dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \text{ quand } a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty.$$

Généralisation : soit A_n une suite croissante d'ensembles tels que $\bigcup_n A_n = \mathbb{R}^N$. Démontrer que $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(x)dx$.

Exercice 9

Soit h une fonction positive intégrable sur \mathbb{R}^N et A_n des boréliens de \mathbb{R}^N tels que $\lambda(A_n) \rightarrow 0$. Démontrer que $\int_{A_n} h(x)dx \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 10

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ à l'aide de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Indication : on posera $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$ pour $x \in [0, 1]$. On trouvera un chapeau intégrable pour les f_n et on appliquera le théorème de Lebesgue.

Exercice 11

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Calculer la limite de $n \int_1^{\infty} f(nx)dx$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 12

Donner un exemple de suite dans $L^1(\mathbb{R})$ qui vérifie l'inégalité stricte dans le lemme de Fatou.

Exercice 13

Donner des exemples de suites de fonctions $f_n \in L^1(0, 1)$ telles que

- f_n ne tend pas vers 0 dans L^1 et $f_n(x)$ tend vers 0 presque partout.
- $f_n \rightarrow 0$ dans L^1 et $f_n(x)$ ne tend pas presque partout vers 0. (On pourra construire une suite de fonctions "bosses roulantes" dont la largeur tend vers zéro, mais qui balaye constamment l'intervalle $[0, 1]$.)

Exercice 14 *Coupes d'un ensemble mesurable*

Soit E un sous-ensemble de mesure bornée de \mathbb{R}^N . Démontrer que pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$, E contient un sous-ensemble de mesure $\alpha \cdot \lambda(E)$.

Exercice 15 *Convergence L^1 quand il y a "conservation de la masse" (Lemme de Scheffé)*

Montrer que si une suite de fonctions $(w_n)_n \in L^1$ vérifie $w_n \geq 0$, $w_n(x) \rightarrow w(x)$ presque partout, $w \in L^1$ et $\int w_n \rightarrow \int w$, alors $w_n \rightarrow w$ dans L^1 . (Indication : écrire $\int w - w_n = \int (w - w_n)^+ - \int (w - w_n)^-$ et $\int |w - w_n| = \int (w - w_n)^+ + \int (w - w_n)^-$ et appliquer le théorème de Lebesgue.)

Exercice 16 Critère d'intégrabilité sur un borné B de \mathbb{R}^N

On va montrer dans cet exercice que $f \in L^1(B)$ si et seulement si $\forall \varepsilon \exists \eta, \lambda(K) \leq \eta \Rightarrow \int_K |f| \leq \varepsilon$.

i) Montrer que si le critère d'intégration est vérifié, alors f est intégrable.

ii) Pour la réciproque, on raisonne par contradiction et on suppose qu'il existe $f \in L^1(B)$ telle que le critère d'intégration ne soit pas vérifié. Montrer qu'il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite K_n de sous-ensembles de B tels que $\int_{K_n} |f| \geq \varepsilon$ et $\lambda(K_n) \leq \frac{1}{2^n}$.

On pose $J_n = \cup_{k=1}^{\infty} K_k$. Montrer que $\int_{J_n} |f| \rightarrow 0$ et conclure.

Autre méthode : appliquer directement le résultat de l'exercice 9!

iii) (facultatif) Adapter le critère d'intégrabilité à \mathbb{R}^N .

Exercice 17 Réciproque du théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_n$ une suite convergeant vers f dans L^1 .

1) Vérifier qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $\forall k \geq 1$,

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^k}.$$

2) On pose $g_k(x) = f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$ et $G(x) = \sum_1^{\infty} |g_k(x)|$. Montrer, en utilisant le théorème de convergence monotone, que $G \in L^1$. En déduire que la suite $(f_{n_k})_k$ converge p.p. vers une limite notée h et qu'elle a un chapeau intégrable.

3) Montrer que $h = f$ p.p.

Exercice 18

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_n$, où $\Gamma_n = \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx$.

Exercice 19

Soit f une fonction sommable. Démontrer que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \lambda(\{x, |f(x)| \geq \alpha\}) = 0$.

Exercice 20

Calculer la dérivée à droite en zéro de la fonction

$$t \rightarrow \int_0^1 (f(x) + t^2)^{\frac{1}{2}} dx = \varphi(t),$$

où f vérifie $0 \leq f \leq 1$. Indication : pour évaluer la limite du rapport $\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$, penser à utiliser le théorème de Lebesgue.

Exercice 21

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \in L^1([0, 1])$ et que $\int_{[0, 1]} \tilde{f}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.

Exercice 22

On pose, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{-1} dt$.

1) Démontrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

2) Démontrer que $\Gamma(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0$. (Utiliser le théorème de convergence monotone)

Remarque : on peut aussi montrer que $\Gamma(z)$ est holomorphe sur le demi-plan $Re(z) > 0$, c'est plus rapide.

Exercice 23 Un contre-exemple à méditer au théorème de dérivation sous le signe somme.

Soit ϕ une fonction continue sur $[0, 1]$. On considère, dans $[0, 1] \times [0, 1]$ la fonction f définie par $f(x, \lambda) = \phi(x)$ si $x \leq \lambda$ et $f(x, \lambda) = 0$ sinon. On pose $F(\lambda) = \int_0^1 f(x, \lambda) dx$. Pour chaque λ , la dérivée partielle existe sauf en un point, et elle est majorée par une fonction sommable fixe : la fonction 0. Déterminer la dérivée de F .

Exercice 24 Contrexemples pour le théorème de Fubini

1) On considère la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On pose pour $m \geq 1$, $f(m, m) = 1$ et $f(m + 1, m) = -1$, on pose sinon $f(m, n) = 0$. Vérifier que

$$\sum_m \sum_n f(m, n) = 1, \text{ mais que } \sum_n \sum_m f(m, n) = 0.$$

Quelle est l'hypothèse du théorème de Fubini qui n'est pas vérifiée ?

2) On considère sur $[0, 1] \times [1, +\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue, $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. Montrer que

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x, y) dy dx = \int_0^1 x^{-1} (e^{-x} - e^{-2x}) dx > 0$$

et

$$\int_1^\infty \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_1^\infty y^{-1} (e^{-2y} - e^{-y}) dy < 0.$$

Quelle est l'hypothèse du théorème de Fubini qui n'est pas vérifiée ?

3) Soit $X = [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $Y = [0, 1]$ muni de la tribu des parties et de la mesure de comptage, μ . On pose $f(x, y) = 1$ si $x = y$ et $f(x, y) = 0$ sinon. Montrer que

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\mu(y) d\lambda(x) = 1 \text{ et } \int_Y \int_X f(x, y) d\lambda(x) d\mu(y) = 0.$$

Vérifier que f est bien mesurable pour la mesure produit. Quelle est l'hypothèse du théorème de Fubini qui n'est pas vérifiée ?

Exercice 25

On admet que l'on peut ordonner les réels de $[0, 1]$ par une relation d'ordre total $<'$ de telle manière que $\forall x \in [0, 1], \{y, y <' x\}$ soit un ensemble dénombrable.

(Cette propriété s'appelle l'hypothèse du continu. Il a été démontré par Kurt Gödel qu'elle ne contredisait pas les axiomes classiques de la théorie des ensembles et par Paul Cohen que son contraire ne les contredisait pas non plus.)

On pose $X = Y = [0, 1]$, munis de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. On pose $f(x, y) = 1$ si $x <' y$ et $f(x, y) = 0$ sinon. Montrer que

$$\forall x \int_X f(x, y) dx = 0, \text{ et } \forall y \int_Y f(x, y) dy = 1.$$

Quelle est l'hypothèse du théorème de Fubini qui n'est pas vérifiée ?

Exercice 26 Application directe du théorème de Fubini

Soit $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage et (Y, \mathcal{T}, μ) un espace mesurable de mesure σ -finie. Si les fonctions f_n sont \mathcal{T} -mesurables et si $\sum_n \int |f_n| d\mu < \infty$, alors

$$\sum_n \int f_n d\mu = \int \sum_n f_n d\mu.$$

Chapitre 3

Les espaces de Lebesgue, L^1 , L^p , L^∞

3.1 Les espaces et leurs normes

Soient f et g deux fonctions réelles mesurables sur \mathbb{R}^N telles que $f(x) = g(x)$ pour tous les x n'appartenant pas à un ensemble négligeable. On dit alors que f et g sont égales presque partout. On considère la relation $f = g$ presque partout : c'est une relation d'équivalence. On identifiera dans ce chapitre et les suivants chaque fonction f et sa classe d'équivalence. Il est habituel dans ce cas de dire que " f est définie presque partout". Toutes les propriétés des fonctions que nous allons considérer sont des propriétés qui portent sur l'intégrale de fonctions définies presque partout. Cette intégrale ne dépend pas de l'élément de la classe choisi.

Définition 3.1 On appelle, pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions définies presque partout et telles que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx < \infty.$$

On appelle $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions définies presque partout et telles qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ pour presque tout x . La plus petite constante C pour laquelle cette relation est vraie s'appelle le "sup essentiel" de $|f(x)|$ et on le note $\|f\|_{L^\infty}$. On dit que f est "essentiellement bornée."

Exercice 1 Vérifier que les espaces L^1 et L^∞ sont des espaces vectoriels normés : leurs normes sont

$$\|f\|_{L^1} = \int |f(x)| dx \text{ et } \|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|.$$

On note ces normes $\|f\|_1$ et $\|f\|_\infty$. On va aussi poser pour $1 < p < \infty$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

mais il faudra montrer que c'est une norme. Un des buts de ce chapitre est de montrer que les espaces L^p sont complets et donc des espaces de Banach. On pose $p' = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On appelle p' "l'exposant conjugué" de p . Noter que $p' = \frac{p}{p-1}$, $2' = 2$, $1' = +\infty$ et $(+\infty)' = 1$.

Théorème 3.1 (Inégalité de Hölder) Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$, la fonction fg est sommable et

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Démonstration Supposons d'abord $1 < p < +\infty$. On utilise la concavité du logarithme sur \mathbb{R}^+ . Si $a > 0$, $b > 0$, compte tenu de la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(b^{p'}) = \log(ab). \text{ D'où}$$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \text{ et donc}$$

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'}, \text{ qui donne}$$

$$\int |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{L^{p'}}^{p'}.$$

Pour trouver l'inégalité recherchée, on remplace le couple (f, g) par $(\lambda f, \frac{g}{\lambda})$, où $\lambda > 0$.

On choisit $\lambda = \frac{\|g\|_{L^{p'}}^{\frac{1}{p}}}{\|f\|_{L^p}^{\frac{1}{p'}}$. Alors

$$\int |fg| \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)\|f\|_p \|g\|_{p'},$$

qui est bien l'inégalité annoncée. Si $p = 1$ ou $p = +\infty$, on a $p' = +\infty$ ou $p' = 1$ et l'inégalité est immédiate en choisissant un représentant de g tel que $\sup |g| = \|g\|_\infty$: on a alors $\int |fg| \leq \sup |g| \int |f| = \|g\|_\infty \|f\|_{L^1}$. \circ

Exercice 2 Reprendre brièvement la démonstration précédente pour se débarrasser de l'hypothèse que $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$. En d'autres termes, l'inégalité de Hölder est vraie, que les membres de gauche et de droite soient finis ou pas.

Théorème 3.2 $L^p(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel et $\|f\|_p$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Démonstration On applique l'inégalité de Hölder :

$$\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^p \leq \int |f + g|^{p-1}|f| + \int |f + g|^{p-1}|g| \leq$$

$$\| |f + g|^{p-1} \|_{p'} \|f\|_p + \| |f + g|^{p-1} \|_{p'} \|g\|_p = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1},$$

soit $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Les autres relations caractérisant une norme ($\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$, $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ presque partout) sont immédiates pour $1 \leq p \leq \infty$. \circ

Proposition 3.1 Convergence dominée dans L^p . Si $f_n \rightarrow f$ p.p. et s'il existe un chapeau intégrable $g \in L^p$ ($1 \leq p < +\infty$) tel que $|f_n| \leq g$ p.p., alors f_n converge vers f dans L^p .

Démonstration On pose $h_n = |f_n - f|^p$. Alors $|h_n| \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p |g|^p$ p.p. car $|f_n| \leq g$ p.p. et, en passant à la limite simple, $|f| \leq g$ presque partout. On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée à h_n et conclure que $h_n \rightarrow 0$.
◊

Exercice 3 L'énoncé précédent est faux quand $p = +\infty$: donner un contreexemple.

Dans le même esprit, voici un critère d'appartenance à L^p d'une limite ponctuelle :

Lemme 3.1 (Fatou dans L^p) Prenons $1 \leq p \leq +\infty$. Soit f_k une suite de fonctions telles que $\|f_k\|_{L^p} \leq c$, et que $f_k(x)$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$. Alors f appartient aussi à L^p et $\|f\|_p \leq \liminf_k \|f_k\|_p$.

Démonstration En appliquant le lemme de Fatou, on a

$$c \geq \liminf \int |f_k|^p \geq \int \liminf |f_k(x)|^p = \int |f(x)|^p.$$

Le cas $p = +\infty$ se traite aisément. ◊

Exercice 4 Montrer le lemme précédent quand $p = +\infty$.

Théorème 3.3 Les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$, ($1 \leq p \leq +\infty$) sont des espaces de Banach.

Démonstration Soit h_k une suite de Cauchy dans L^p . Si $p = +\infty$, $h_k(x)$ est de Cauchy pour presque tout x et converge uniformément vers une fonction $h(x)$. Il est alors facile de vérifier que $h(x)$ est essentiellement bornée et que la convergence de h_k vers h est uniforme. Soit maintenant $1 \leq p < \infty$. Une récurrence facile (exercice !) montre que l'on peut extraire une suite de la suite de Cauchy h_k , que nous noterons par commodité $f_n = h_{k_n}$, telle que

$$q, r \geq n \Rightarrow \|f_q - f_r\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^n}.$$

On pose $g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$. La suite de fonctions $g_n(x)$ est croissante. Notons $g(x)$ sa limite. Par l'inégalité triangulaire,

$$\left(\int |g_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \sum_{k=1}^n |f_{k+1} - f_k| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq 1.$$

En appliquant à $|g_n|^p$ le théorème de convergence monotone, on obtient donc

$$\int |g(x)|^p = \lim_n \int |g_n|^p \leq 1.$$

Il en résulte que $g(x)$ est presque partout finie, appartient à L^p et que $g_n(x)$ tend presque partout vers $g(x)$. Comme (pour $n \geq m$), $\sum_m^n |f_{k+1} - f_k|(x) \leq g_n(x) - g_m(x)$, la série $\sum_1^\infty (f_{k+1} - f_k)$ converge également presque partout. Donc $f_n(x) - f_1(x)$ converge presque partout vers une limite que l'on appelle $f(x) - f_1(x)$. De plus, $|f_n(x) - f(x)|^p \leq (\sum_n^\infty |f_{k+1} - f_k(x)|)^p \leq g(x)^p$ qui est chapeau intégrable. Donc $f_n - f$ converge vers 0 dans L^p . Rappelons que $f_n = h_{k_n}$ est une sous-suite extraite de la suite de Cauchy h_k . Mais si une sous-suite d'une suite de Cauchy converge, toute la suite converge. ◊

Exercice 5 Détailler la démonstration du théorème précédent dans le cas $p = +\infty$.

Exercice 6 Soit f une fonction à support borné, i.e. $f(x) = 0$ presque partout pour $|x| \geq R$. Montrer que si $p \geq q \geq 1$, il existe C tel que $\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$. Expliciter la meilleure constante C .

Théorème 3.4 Les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Démonstration La propriété est déjà connue pour $p = 1$. Dans le cas général, on commence par montrer que l'on peut approcher une fonction f de L^p par des fonctions bornées et à support compact. L'approximation se fait par simple troncature : on pose $f_k(x) = f(x)$ si $\|x\| \leq k$ et $|f(x)| \leq k$, $f_k(x) = 0$ sinon. La suite $f_k(x)$ a $f(x)$ pour chapeau intégrable dans L^p et tend presque partout vers 0. Par le théorème de Lebesgue dans L^p (Proposition 3.1), on obtient $f_k \rightarrow f$ dans L^p .

Reste à montrer que si une fonction f est bornée ($|f| \leq k$) et à support compact ($|f(x)| = 0$ si $\|x\| \geq k$), alors elle est approchable dans L^p par des fonctions continues. Mais comme $f \in L^1$, il existe une suite de fonctions continues et à support compact f_n convergeant vers f dans L^1 (Propriété 2.1). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite f_n converge presque partout vers f (réciproque du théorème de Lebesgue). Utilisons une fonction g continue et à support compact valant 1 sur $B(0, k)$. La suite de fonctions $h_n = g \max(-k, \min(k, f_n))$ est encore continue, converge presque partout vers f et a la fonction $k|g|$ comme chapeau intégrable dans L^p . Elle converge donc vers f dans tous les L^p tels que $1 \leq p < \infty$. \circ

Exercice 7 Les fonctions continues à support compact sont-elles denses dans $L^\infty(\mathbb{R})$? Sont-elles denses dans $L^1([0, 1])$? Justifier.

Dans la suite, on note $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions définies presque partout et telles que $\int_B |f(x)| dx < +\infty$ pour tout borné B de \mathbb{R}^N . Remarque que pour tout p , $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (exercice 6).

Corollaire 3.1 Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telle que pour toute fonction continue à support compact $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ on ait $\int f(x)u(x) = 0$. Alors $f = 0$ p.p.

Démonstration En reprenant exactement le même raisonnement que dans la démonstration précédente, on voit qu'il existe pour toute boule $B(0, R) \subset \mathbb{R}^N$ une suite $u_n \in \mathcal{C}_c(B(0, R+1))$ qui converge vers $\text{Signe}(f)$ presque partout dans $B(0, R)$, vers zéro ailleurs, et vérifie $|u_n| \leq 1$. Il vient alors par le théorème de Lebesgue,

$$0 = \int_{B(0, R+1)} f(x)u_n(x) \rightarrow \int_{B(0, R)} f(x)\text{Signe}(f(x)) = \int_{B(0, R)} |f(x)| dx.$$

Donc $f = 0$. \circ

Théorème 3.5 Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p dx = 0.$$

Démonstration Cette propriété de “continuité en moyenne est vraie pour les fonctions continues à support compact car elles sont uniformément continues et on la déduit aisément pour une fonction arbitraire de $L^p(\mathbb{R}^N)$ en utilisant la densité de \mathcal{C}_c dans L^p (théorème 3.4). ◦

3.2 Convolution, approximation et régularisation des fonctions de L^p

Théorème 3.6 et définition Si f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors le produit de convolution $f * g$ est défini par

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy = \int g(x - y)f(y)dy,$$

la fonction de y figurant sous le signe somme étant sommable pour presque tout x . En outre, la fonction $f * g$ appartient à L^1 et on a

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Démonstration On montre d’abord en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli et le théorème de changement de variable que la fonction $|f(x - y)g(y)|$ est sommable. En effet,

$$\begin{aligned} \int \int |f(x - y)g(y)| dx dy &= \int |g(y)| \left(\int |f(x - y)| dx \right) dy = \\ &= \int |g(y)| \left(\int |f(x)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

La fonction $f(x - y)g(y)$ est donc sommable sur \mathbb{R}^{2N} et le théorème de Fubini assure que la fonction $y \rightarrow f(x - y)g(y)$ est sommable pour presque tout x et que la fonction alors définie presque partout par $f * g(x) = \int f(x - y)g(y)dy$ est elle-même sommable sur \mathbb{R}^N . On a finalement

$$\|f * g\|_{L^1} = \int |f * g|(x) dx \leq \int |g(y)| \left(\int |f(x - y)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. ◦$$

Théorème 3.7 (régularisation par convolution) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et soit g une fonction continue et bornée dans \mathbb{R}^N . Alors la fonction $f * g$ définie en tout point par

$$f * g(x) = \int g(x - y)f(y)dy$$

est continue et bornée. Si de plus les dérivées partielles de g existent et sont continues et bornées jusqu’à l’ordre $k \in \mathbb{N}$, il en est de même pour $f * g$ et l’on a

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_j} = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2(f * g)}{\partial x_j \partial x_k} = f * \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \text{etc.}$$

Démonstration On remarque d'abord que la fonction $y \rightarrow g(x-y)f(y)$ est sommable pour tout x . En effet, $|g(x-y)f(y)| \leq \|g\|_\infty |f(y)|$. La continuité de $f * g(x)$ découle du théorème de Lebesgue. En effet, si $x_n \rightarrow x$, alors $g(x_n - y)f(y)$ tend partout vers $g(x-y)f(y)$ et $\|g\|_\infty |f(y)|$ est chapeau intégrable. Donc

$$(f * g)(x_n) = \int g(x_n - y)f(y)dy \rightarrow \int g(x - y)f(y)dy = (f * g)(x).$$

Si g est dérivable par rapport à x_j et de dérivée continue et bornée, appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme. On a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g(x-y)f(y)) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(x-y)f(y)$$

et cette fonction est majorée en module par $\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\|_\infty |f(y)|$, qui est indépendante de x et sommable. Le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique donc et donne bien $\frac{\partial (f * g)}{\partial x_j} = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}$. Ceci montre le résultat pour $k = 1$. Ensuite, il suffit d'itérer puisque qu'on peut appliquer ce résultat au couple formé de f et d'une dérivée première de g , ce qui prouve le théorème pour $k = 2$, etc. \circ

Définition 3.2 On note $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions f telles que pour tout borné B de \mathbb{R}^N , $f \in L^1(B)$. On dit que $f_n \rightarrow f$ dans L^1_{loc} si f_n tend vers f dans $L^1(B)$ pour tout borné B .

Exercice 8 Montrer que les espaces que nous connaissons : $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$ et $C^0(\mathbb{R}^N)$ sont dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Corollaire 3.2 Si $f \in L^1_{loc}$ et $g \in C^k$ est à support compact, alors $f * g$ est C^k .

Exercice 9 Montrer le corollaire 3.2 en adaptant la démonstration du théorème 3.7.

Le théorème qui suit va nous donner un autre exemple d'utilisation de la densité de $C_c(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 3.8 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors $(f * g)(x)$ est défini pour presque tout x et c'est une fonction de carré sommable vérifiant

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2. \quad (3.1)$$

Soient f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors $f * g(x)$ est défini pour tout x et c'est une fonction continue, tendant vers zéro à l'infini et satisfaisant

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad (3.2)$$

Démonstration Pour évaluer

$$I = \int (|f| * |g|)^2(x) dx,$$

on remarque que cette intégrale est égale grâce au théorème de Tonelli à

$$I = \int \int \int |g(x-y)||g(x-z)||f(y)||f(z)| dx dy dz. \quad (3.3)$$

En appliquant à nouveau le le théorème de Fubini pour intégrer I d'abord en x , puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$I = \int \int |f(y)||f(z)| \left(\int |g(x-y)||g(x-z)| dx \right) dy dz \leq \|f\|_1^2 \|g\|_2^2. \quad (3.4)$$

La relation (3.1) vient immédiatement des relations (3.3) et (3.4).

Si maintenant f et g sont de carré sommable, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $(f * g)(x)$ est défini pour tout x et on obtient la relation (3.2). Montrons maintenant que $f * g$ est continue et tend vers zéro à l'infini. On considère deux suites approximantes continues à support compact f_n et g_n telles que $f_n \rightarrow f$ et $g_n \rightarrow g$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Par le théorème 3.7, $f_n * g_n$ est continue et il est immédiat que $f_n * g_n$ est encore à support compact. Finalement on a, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f_n * g_n(x)| &\leq (|f - f_n| * |g|)(x) + (|f_n| * |g - g_n|)(x) \leq \\ &\|f - f_n\|_2 \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \|g - g_n\|_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions $f_n * g_n$, continues et tendant vers zéro à l'infini, tend uniformément vers $f * g$. Il en résulte que $f * g$ est continue et tend vers zéro à l'infini. \circ

3.2.1 Le théorème fondamental du traitement du signal

Le théorème que nous allons maintenant énoncer est appelé théorème fondamental du traitement du signal, car il exprime que tout traitement linéaire continu appliqué à un signal temporel se réduit au choix d'une convolution. En première analyse, le traitement du signal doit être invariant par translation temporelle, puisque ce traitement ne dépend en général pas de l'instant, inconnu, où le signal commence.

Définition 3.3 Si f est une fonction sur \mathbb{R}^N et $x \in \mathbb{R}^N$, on note $(\tau_x f)(y) = f(y-x)$. C'est la translatée de f par le vecteur x . On dit qu'un opérateur T agissant sur des fonctions est invariant par translation si $T(\tau_x f) = \tau_x(Tf)$.

On note $C_b(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées, muni de la norme $\|f\|_\infty$. On vérifie aisément que c'est un espace de Banach.

Théorème 3.9 (L'universalité de la convolution) Soit $T : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$ un opérateur linéaire, invariant par translation et continu. Alors il existe g dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $T(f) = g * f$.

Démonstration On considère la forme linéaire $f \rightarrow (Tf)(0)$, qui appartient par hypothèse à $(L^2(\mathbb{R}^N))'$. En effet,

$$|(Tf)(0)| \leq \|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{L^2},$$

et cette inégalité exprime la continuité de la forme linéaire $(Tf)(0)$ sur L^2 . Par le théorème 4.2, (théorème de Riesz), il existe alors une fonction $g_0 \in L^2$ telle que

$$(Tf)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \overline{g_0}(y) dy. \quad (3.5)$$

Par hypothèse aussi, $T(\tau_x f) = \tau_x Tf$. Donc par (3.5),

$$Tf(x) = (\tau_{-x}(Tf))(0) = T(\tau_{-x}f)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y) \overline{g_0}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) \overline{g_0}(-y) dy = (f * g)(x),$$

avec $g(y) = \overline{g_0}(-y)$. \circ

Proposition 3.2 Soient f et g deux fonctions telles que $(f * g)(x)$ soit défini pour presque tout x . (C'est en particulier le cas si f et g sont dans L^1 , mais il y a bien d'autres cas où l'intégrale définissant la convolution a un sens, par exemple si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $g_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$.) Alors

$$\text{Support}(f * g) \subset \overline{\text{Support}(f) + \text{Support}(g)}. \quad (3.6)$$

Démonstration Soit $x \notin \text{Support}(f) + \text{Support}(g)$, alors $(x - \text{Support}(f)) \cap \text{Support}(g) = \emptyset$ et donc

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int_{(x-\text{Support}(f)) \cap \text{Support}(g)} f(x-y)g(y)dy = 0.$$

Donc $(f * g)(x) = 0$ en tout point n'appartenant pas à $\text{Support}(f) + \text{Support}(g)$ et donc aussi en tout point n'appartenant pas à sa fermeture $\overline{\text{Support}(f) + \text{Support}(g)}$, ce qui donne le résultat. \circ

Exercice 10 Remarquer que si l'un des deux supports $\text{Support}(f)$ et $\text{Support}(g)$ est compact, la somme des deux supports est également compacte et on a égalité dans (3.6). Mais en toute généralité la somme de deux fermés n'est pas nécessairement fermée. Prendre par exemple dans \mathbb{R}^2 les deux ensembles $F = \{(x, y), y = \frac{1}{x}, x > 0\}$ et $G = \{(x, y), y = -\frac{1}{x}, x < 0\}$ et vérifier que $F + G$ n'est pas fermé, alors que F et G le sont.

Définition 3.4 Soit $k \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\int k(x)dx = 1$ et $k(x) \geq 0$ presque partout. On pose pour tout $h > 0$,

$$k_h(x) = h^{-N} k\left(\frac{x}{h}\right).$$

On appelle un tel système de fonctions k_h , $h > 0$, une "approximation de l'identité".

Proposition 3.3 Si f est uniformément continue et bornée sur \mathbb{R}^N , alors $f * k_h$ converge vers f uniformément.

Démonstration On remarque d'abord que

$$\int k_h(x)dx = \int k(x)dx = 1, \quad (3.7)$$

$$k_h * f(x) - f(x) = \int (k_h(y)(f(x-y) - f(x)))dy, \quad (3.8)$$

et que (une conséquence du théorème de Lebesgue), pour η fixé et h assez petit,

$$\int_{|y| \geq \eta} |k_h(y)|dy \leq \varepsilon. \quad (3.9)$$

Donc

$$\begin{aligned} |(k_h * f)(x) - f(x)| &= \left| \int k_h(y)(f(x-y) - f(x))dy \right| \\ &\leq 2 \sup |f| \int_{|y| \geq \eta} |k_h(y)|dy + \sup_{|y| \leq \eta} |f(x-y) - f(x)| \int |k_h(y)|dy \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

pourvu que l'on fixe premièrement η assez petit pour que le deuxième terme soit plus petit que ε , puis h assez petit pour que le premier soit aussi plus petit que ε . \circ

Le théorème précédent s'étend à L^p .

Théorème 3.10 Soit k_h une approximation de l'identité. Alors pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, les fonctions $f * k_h$ convergent vers f dans L^p .

Démonstration Comme $f \in L^p$, on peut choisir par le théorème 3.5 η assez petit pour que

$$|y| \leq \eta \Rightarrow \int |f(x-y) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon. \quad (3.10)$$

L'inégalité de Hölder et le fait que $k_h \geq 0$, $\int k_h = 1$ impliquent que pour toute fonction f dans L^p , on ait

$$\left(\int k_h(x) |f(x)| dx \right)^p \leq \int k_h(x) |f(x)|^p dx. \quad (3.11)$$

En effet,

$$\left(\int k_h |f| \right)^p = \left(\int k_h^{\frac{1}{p}} k_h^{\frac{p-1}{p}} |f| \right)^p \leq \left(\int k_h |f|^p \right) \left(\int k_h \right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

En utilisant les relations (3.7)-(3.11) et le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int |k_h * f(x) - f(x)|^p dx &= \int \left| \int (k_h(y)(f(x-y) - f(x))) dy \right|^p dx \leq \int \int k_h(y) |f(x-y) - f(x)|^p dy dx \leq \\ &2^p \int |f(x)|^p dx \int_{|y| \geq \eta} |k_h(y)| dy + \int_{|y| \leq \eta} |k_h(y)| dy \int |f(x-y) - f(x)|^p dx \leq \\ &2^p \|f\|_{L^p}^p \varepsilon + \int |k_h(y)| \varepsilon = (2^p \|f\|_{L^p}^p + \|k\|_{L^1}) \varepsilon. \end{aligned}$$

◦

Exercice 11 Reprendre la démonstration précédente dans le cas $p = 1$ et montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse que k est positive. Montrer également en construisant un exemple simple que le résultat précédent ne s'étend pas à $p = +\infty$.

Corollaire 3.3 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On appelle $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω et on munit $\mathcal{C}_c(\Omega)$, l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω , de la topologie suivante : on dit que u_n tend vers u si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $\text{Support}(u_n) \subset \text{Support}(u) + B(0, \varepsilon)$ et $\sup_{x \in \Omega} |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$. Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$.

Démonstration Si $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, alors elle est uniformément continue et $k_h * f$ tend vers f uniformément. De plus, par la proposition 3.2, $\text{Support}(k_h * f) \subset \text{Support}(f) + B(0, h)$. Donc $k_h * f$ tend bien vers f dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Enfin, par le théorème 3.7, on a bien $k_h * f \in \mathcal{C}^\infty$. ◦

Exercice 12 Nous avons seulement défini une notion de convergence de suite dans \mathcal{C}_c . Donner une topologie à \mathcal{C}_c qui conduit à cette notion de convergence (donner pour chaque fonction une base de voisinages ouverts).

Pour compléter la démonstration précédente, il nous reste à montrer qu'il existe des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact.

Lemme 3.2 Il existe une fonction $f_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, à support compact, positive et de support contenu dans $\bar{B}(0, 1)$.

Démonstration On pose, en dimension 1, $f_1(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ si $|x| \leq 1$, $f(x) = 0$ sinon. Il est facile de voir que $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0$ pour tout ordre k et que donc f est C^∞ . En dimension N , on pose simplement $g_N(x_1, \dots, x_N) = f_1(x_1) \dots f_N(x_N)$ qui est à support dans l'hypercube $[-1, 1]^N$ puis $f_N(x) = g_N(2\sqrt{N}x)$ pour ramener le support dans $B(0, 1)$. \circ

Exercice 13 Construire une fonction radiale $f_N \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_N(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, $f_N(x) = 0$ si $|x| \geq 2$.

(i) Commencer par le cas de la dimension 1 : Soit f une fonction positive, C^∞ , à support compact dans $[-1, 1]$ et d'intégrale 1. On peut construire une telle fonction par le lemme 3.2. Poser $h(x) = f_1(x+3) - f_1(x-3)$, puis $g(x) = \int_{-\infty}^x h(t)dt$. Dessiner $h(x)$ et $g(x)$, montrer que $f_1(x) = h(2x)$ répond à la question en dimension 1.

(ii) Montrer que $f_N(x) = f_1(\|x\|)$, où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne usuelle, convient en dimension N .

Proposition 3.4 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Démonstration On considère les voisinages intérieurs bornés de Ω , $\Omega_r = \{x, B(x, r) \subset \Omega\} \cap B(0, \frac{1}{r})$. Comme $\Omega = \cup_{r>0} \Omega_r$, on a par le théorème de Lebesgue

$$\forall \varepsilon \exists r, \int_{\Omega} |f(x) - f(x) \mathbb{1}_{\Omega_r}|^p dx < \varepsilon.$$

On choisit alors $r' < r$ tel que

$$\|(f \mathbb{1}_{\Omega_r}) * k_{h_{r'}} - f \mathbb{1}_{\Omega_r}\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

On obtient donc $\|f - (f \mathbb{1}_{\Omega_r}) * k_{h_{r'}}\|_{L^p(\Omega)} < 2\varepsilon$. Comme $r' < r$, le lemme 3.2 et le théorème 3.7 impliquent que $(f \mathbb{1}_{\Omega_r}) * h_{r'} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. \circ

Théorème 3.11 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\omega \subset \subset \Omega$ un ouvert contenu dans un compact, lui-même contenu dans Ω . Soit \mathcal{F} un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta < \text{dist}(\omega, \Omega^c), \forall f \in \mathcal{F}, \forall h < \delta, \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

Alors \mathcal{F} est relativement compacte dans $L^p(\omega)$. (Toute suite $f_n \in \mathcal{F}$ a une sous-suite convergente dans $L^p(\omega)$).

Démonstration On considère des noyaux régularisants $\rho_r, r > 0$ tels que $\int \rho_r(x) dx = 1$, $\rho \geq 0$, support(ρ) $\subset B(0, r)$. On commence par montrer que le théorème d'Ascoli-Arzelà s'applique à la famille $(\rho_r * f), f \in \mathcal{F}$. En effet, si $f \in \mathcal{F}$ et $|z|, r \leq \frac{1}{2} \text{dist}(\omega, \Omega^c)$, $x \in \omega$, on a par l'inégalité de Hölder,

$$|(\rho_r * f)(x+z) - (\rho_r * f)(x)| \leq \int \rho_r(y) |f(x-y) - f(x-y+z)| dy \leq \|\rho_r\|_{L^{p'}}^{p'} \|\tau_z f - f\|_{L^p(\Omega)}.$$

La famille $\rho_r * f$ est donc équicontinue sur ω . Montrons que la famille $\rho_r * f(x)$ est bornée. En reprenant les calculs précédents on a aussi pour $r < \frac{1}{2} \text{dist}(\omega, \Omega^c)$,

$$|\rho_r * f(x)| \leq \int \rho_r(y) |f(x-y)| dy \leq \|\rho_r\|_{L^{p'}}^{p'} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

On conclut que la famille $\rho_r * \mathcal{F}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur ω et donc aussi pour la norme $L^p(\omega)$, ω étant borné.

On montre ensuite que l'on peut approcher uniformément les éléments de \mathcal{F} par les fonctions $\rho_r * f$. On choisit $r < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$, de sorte que $\omega + B(0, r) \subset \Omega$. En utilisant la convexité de la fonction $s \rightarrow s^p$,

$$|\rho_r * f(x) - f(x)| \leq \int_{\omega} \rho_r(y) |f(x-y) - f(x)| dy \leq \left(\int_{\omega} \rho_r(y) |f(x-y) - f(x)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

ce qui donne

$$|\rho_r * f(x) - f(x)|^p \leq \int_{B(0,r)} \rho_r(y) |f(x-y) - f(x)|^p dy.$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli et si $r < \delta(\varepsilon)$, on obtient

$$\int_{\omega} |\rho_r * f(x) - f(x)|^p dx \leq \int_{B(0,r)} \rho_r(y) \|\tau_y f - f\|_{L^p(\Omega)}^p dy \leq \varepsilon^p. \quad (3.12)$$

Pour conclure, on montre que la famille \mathcal{F} peut être pour tout ε recouverte par un nombre fini de boules de rayon arbitrairement petit. On commence par recouvrir la famille $\rho_r * f$ par des boules en nombre fini $B(f_i * \rho_r, \varepsilon)$. Grâce à (3.12), on en déduit que \mathcal{F} est recouverte par les boules en nombre fini $B(f_i, \varepsilon + 2\varepsilon^p)$. En effet, si $f \in \mathcal{F}$, il existe i tel que $\rho_r * f \in B(\rho_r * f_i, \varepsilon)$ et on a donc

$$\|f - f_i\| \leq \|\rho_r * f - \rho_r * f_i\| + \|\rho_r * f - f\| + \|\rho_r * f_i - f_i\| \leq \varepsilon + 2\varepsilon^p.$$

◦

Illustration de la convolution et de la régularisation dans le cas des images

Une image photographique peut être représentée comme une fonction réelle f bornée mesurable, définie sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (voir la fin du chapitre 2). Les images, du fait de leur acquisition par un appareil optique ou de leur transmission ultérieure, sont "bruitées". Il existe de nombreuses définitions du bruit faisant intervenir la théorie des probabilités que nous ne détaillerons pas ici. Il nous suffira de considérer le bruit comme une forme d'irrégularité de l'image, qui rend délicat le calcul de ses dérivées. Une solution à ce problème est de convoluer la fonction f avec une fonction régulière g dont le support est petit. Mais pourquoi vouloir calculer les dérivées d'une image ? A cause de l'importance des points de discontinuité : on appelle contours les traces laissées par les bords des objets sur l'image f , qui forment des courbes de points de discontinuité dans l'image. Plusieurs méthodes très utilisées en traitement des images pour détecter ces points reposent sur le calcul du gradient, puis sur une sélection de points où le module du gradient est élevé. Rappelons que le gradient est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , défini pour une image f par :

$$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Or l'irrégularité de f rend difficile le calcul de ce gradient, dont les valeurs sont très sensibles aux variations brusques présentes dans l'image. Préalablement au calcul du

gradient, l'image est donc convoluée avec une fonction g_h , généralement une gaussienne, $g_h = h^{-2}g(\frac{x}{h}, \frac{y}{h})$, avec

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right).$$

Le théorème 3.7 nous assure alors que $f * g_h$ est différentiable (et même C^∞), car g_h l'est. De plus, on peut montrer que $\int g = 1$, et donc que g satisfait les conditions du théorème 3.10 (approximation de l'identité), ce qui implique que $f * g_h$ converge vers f dans L^p lorsque h tend vers 0. Sur la figure 3.1 nous montrons une image "bruitée" ainsi que deux convolutions avec g_1 et g_3 . Nous remarquons la proximité de ces images à f , même si un effet de flou est très visible. Nous montrons également les images de la norme du gradient pour l'image originale et les convoluées. Un point est représenté avec un gris d'autant plus sombre que la valeur du module du gradient y est élevé. Nous remarquons que les points de gradient élevé sont plus nombreux et moins liés à la structure de la scène sur l'image $|Df|$ que sur les images $|D(f * g_1)|$ et $|D(f * g_3)|$.

3.3 Exercices

Exercice 14 Théorème de Weierstrass

Soit $Q_n(t) = c_n(1 - t^2)^n$ sur $[-1, 1]$ où c_n est choisi pour que $\int_{-1}^1 Q_n dt = 1$.

1) Vérifier que

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nt^2) dt,$$

et en déduire que $c_n < \sqrt{n}$. (Faire un dessin.)

2) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on suppose que $f(0) = f(1) = 0$. On prolonge f et Q_n par 0 à \mathbb{R} tout entier et on pose $P_n(x) = f * Q_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

Vérifier que P_n est polynomial et montrer que P_n converge vers f uniformément sur $[0, 1]$.

3) Montrer que les polynômes à coefficients réels sont denses dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 15

1) Soit $\chi_n(x) = \frac{1}{2n}$ sur $[-n, n]$, $\chi_n(x) = 0$ ailleurs. Etudier sa limite dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2) Utiliser cette suite de fonctions pour montrer que

$$\left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0 \right\}$$

est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 16 (J.M.Bony, Ecole Polytechnique)

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ et soit f définie sur \mathbb{R} . On pose, $\forall n \geq 1$, (lorsque cela a un sens),

$$T_n(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y^n)g(y)dy.$$

1) si $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $T_n(f)$ est définie p.p. et $T_n(f) \in L^1(\mathbb{R})$.

2) Si f est continue et bornée, montrer que $T_n(f)$ est continue et bornée.

3) Si f est continue et $f(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, montrer que $\forall x$, $T_n(f)(x) \rightarrow C f(x)$ où C est une constante à déterminer.

Exercice 17 On note \star le produit de convolution.

Montrer que $(L^1(\mathbb{R}), +, \star)$ est une algèbre de Banach commutative qui ne possède pas d'élément neutre pour \star .

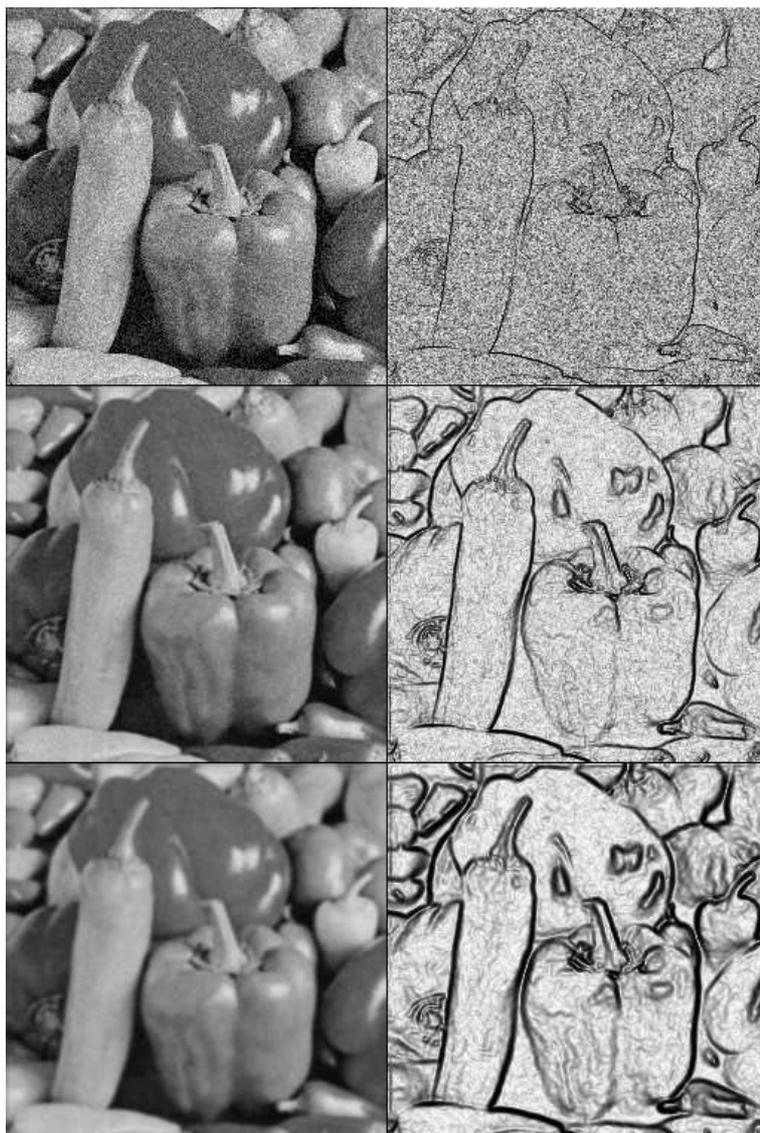


FIGURE 3.1 – Illustration de la convolution et de la régularisation dans le cas des images. Colonne de gauche, de haut en bas : l'image originale f , l'image convoluée $f * g_1$, l'image convoluée $f * g_3$. Colonne de droite, de haut en bas, les gradients correspondants, c'est à dire $|Df|$, $|D(f * g_1)|$, et $|D(f * g_3)|$. Un point est d'autant plus sombre que la valeur du module du gradient en ce point est élevée. La fonction g_h désigne la gaussienne $g_h(x, y) = \frac{1}{2\pi h} \exp(-\frac{x^2}{2h^2} - \frac{y^2}{2h^2})$. Les points où le gradient est fort correspondent aux points de discontinuité de l'image, qui donnent une information sur la présence de contours. L'image originale est très bruitée, ce qui apparaît nettement sur l'image du gradient correspondant. Les deux images suivantes sont proches de l'image originale (malgré un visible effet de flou), mais beaucoup plus régulières. Le théorème 3.10 (approximation de l'identité) nous assure que $f * g_h$ tend vers f dans L^p si h tend vers 0. Le théorème 3.7 (régularisation par convolution) nous assure que les fonctions $f * g_h$ sont différentiables pour tout h . Le calcul du gradient de ces deux images donne un résultat visuellement plus discriminant que sur l'image originale.

Exercice 18

1) Soit $f \in L^p \cap L^q$ avec $1 \leq p < q$. Montrer que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}, \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q},$$

avec $\theta \in [0, 1]$ et donc $f \in L^r, \forall r \in [p, q]$.

2) Soit E un sous-espace vectoriel fermé de L^1 tel que $E \subset \bigcup_{1 < q \leq +\infty} L^q$. On va montrer que $\exists p > 1$ tel que $E \subset L^p$ avec injection continue. On considère les ensembles

$$E_n = \{f \in E \cap L^{1+\frac{1}{n}}, \|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq n\}.$$

- Montrer que $E = \bigcup_n E_n$.
- Montrer que $\forall n, E_n$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
- Montrer que $\exists n_0$ tel que $\text{int}(E_{n_0}) \neq \emptyset$.
- En déduire que $\text{id} : E, \|\cdot\|_1 \longrightarrow L^{1+\frac{1}{n_0}}$ est continue.

Exercice 19 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

1) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Montrer que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Soit $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$, on suppose que $\exists C$ telle que $\|f\|_p \leq C, \forall p$ tel que $1 \leq p < \infty$.

Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

3) Soit $\Omega =]0, 1[$ et $f(x) = \log x$, vérifier que $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$ et que $f \notin L^\infty(\Omega)$.

Exercice 20

On notera $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ les espaces de Lebesgue usuels, où les fonctions considérées sont à valeurs complexes. En particulier $L^2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)dx$. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on notera

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx.$$

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f(x)| < \infty$. On pose $g_k(x) = (-ix)^k f(x)$, montrer que $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{f}^{(k)} = \widehat{g}_k.$$

2) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors montrer que $\forall k$,

$$\widehat{f^{(k)}} = (i\xi)^k \widehat{f}.$$

Première partie :

On notera \mathcal{S} l'espace des fonctions f indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} (et à valeurs complexes), telles que $\forall p, q \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < \infty$.

3) Montrer que

- pour tout polynôme P , pour tout $f \in \mathcal{S}$, le produit $Pf \in \mathcal{S}$,
- pour tout $f \in \mathcal{S}, f' \in \mathcal{S}$,
- $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R})$.

4) Montrer que $f \in \mathcal{S} \implies \widehat{f} \in \mathcal{S}$.

5) On dit que la suite $(f_n)_n \subset \mathcal{S}$ converge vers 0 dans \mathcal{S} si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f_n^{(q)}(x)| \right) = 0.$$

Montrer que si f_n tend vers 0 dans \mathcal{S} alors

- f'_n tend vers 0 dans \mathcal{S} ,
- pour tout polynôme P , Pf_n tend vers 0 dans \mathcal{S} ,
- f_n tend vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f_n}$ tend vers 0 dans \mathcal{S} .

6) Soit $a > 0$ et $\psi_a(x) = e^{-ax^2}$. Vérifier que $\psi_a \in \mathcal{S}$ et montrer que

$$\widehat{\psi_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi_a}(\xi) d\xi = 2\pi.$$

7) Soit $f \in \mathcal{S}$, on veut montrer la formule d'inversion suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

a) Soit $\Phi \in \mathcal{S}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f} \Phi d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(y) f(x+y) dy.$$

b) Soit $\Phi_0 \in \mathcal{S}$ donnée, choisir $\Phi(t) = \Phi_0(\varepsilon t)$ où $\varepsilon > 0$ dans $(*)$ et montrer que

$$\Phi_0(0) \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi = f(x) \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi_0}(y) dy.$$

c) Conclure.

Deuxième partie :

8) Vérifier que \mathcal{S} est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

9) Soient φ et ψ dans \mathcal{S} , montrer que

$$\begin{aligned} a) \quad & \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi} \psi dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi \widehat{\psi} d\xi. \\ b) \quad & \int_{\mathbb{R}} \varphi \overline{\psi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi} \overline{\widehat{\psi}} d\xi. \\ c) \quad & \widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi}. \end{aligned}$$

10) Démontrer le résultat suivant :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F complet, et G un sous-espace vectoriel dense dans E . Si A est un opérateur linéaire continu de G dans F alors il existe un prolongement unique \tilde{A} linéaire continu de E dans F et $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ (voir le théorème 1.5 page 12).

11) Si on note \mathcal{F} l'application définie sur \mathcal{S} , à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$, par $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$, vérifier que $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}^2$ et que \mathcal{F} se prolonge en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

(Un isomorphisme est une application linéaire bijective bicontinue.)

Chapitre 4

Espaces de Hilbert

Définition 4.1 Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire (u, v) et tel que $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ soit une norme pour laquelle H soit complet. Un espace de Hilbert hermitien est un espace vectoriel sur \mathbb{C} muni d'un produit hermitien (u, v) c'est-à-dire vérifiant

$$(u, v) = \overline{(v, u)}, \quad (\lambda u, v) = \lambda(u, v), \quad (u + v, w) = (u, w) + (v, w).$$

et tel que $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ soit une norme rendant H complet. Remarquons aussi que

$$(u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v) \quad \text{et} \quad (u, v + w) = (u, v) + (u, w).$$

Dans toute la suite, nous traiterons le cas général des espaces de Hilbert hermitiens, le cas des Hilbert réels se déduisant immédiatement.

Exemple 4.1 On pose $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $u = (u_1, \dots, u_n, \dots)$ avec $u_n \in \mathbb{C}$ et vérifiant $\sum_n |u_n|^2 < \infty$. Muni du produit scalaire $(u, v) = \sum_n u_n \overline{v_n}$, c'est un espace de Hilbert. $L^2(\mathbb{R}^N)$, muni du produit scalaire $(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} dx$ est également un espace de Hilbert : on a vu qu'il est complet. Remarquer que $l^2(\mathbb{N})$ peut être plongé naturellement dans $L^2(\mathbb{R})$ en posant $u(x) = u_n$ si $x \in [n, n+1[$ et qu'il apparaît alors sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$. La complétude de $L^2(\mathbb{R})$ implique donc la complétude de $l^2(\mathbb{N})$.

Proposition 4.1 Nous avons toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

Démonstration la démonstration est évidemment la même qu'en dimension finie puisqu'elle se fait dans le plan de f et g . On pose $(f, g) = e^{i\theta} |(f, g)|$ et on développe $\|f + te^{i\theta} g\|^2 \geq 0$, ce qui donne

$$\|f\|^2 + t(f, e^{i\theta} g) + t(e^{i\theta} g, f) + t^2 \|g\|^2 \geq 0, \quad \text{soit}$$

$$\|f\|^2 + 2t|(f, g)| + t^2 \|g\|^2 \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime que le discriminant de ce trinôme est négatif.
◦

La relation de Pythagore reste valable : si f et g sont orthogonaux, alors

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Cette relation s'étend à une suite de vecteurs orthogonaux deux à deux, f_k . On a alors

$$\left\| \sum_k f_k \right\|^2 = \sum_k \|f_k\|^2.$$

Grâce à la complétude, le premier membre de cette égalité, $\sum_k f_k$, est bien un élément de H si le deuxième membre est une série convergente. On a donc

Proposition 4.2 *Soit H un Hilbert et u_n une suite d'éléments de H . Si la série u_n est composée d'éléments orthogonaux deux à deux et si $\sum_n \|u_n\|^2$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ converge dans H . Si la série de terme général $\|u_n\|$ est convergente, la série $\sum_n u_n$ converge dans H .*

Démonstration Les deux convergences découlent de la complétude de H . En effet, dans le premier cas, la suite $v_k = \sum_0^k u_n$ est de Cauchy puisque pour $k \geq l$, par le théorème de Pythagore, $\|v_k - v_l\|^2 = \sum_{l+1}^k \|u_n\|^2$. Dans le second cas, elle est également de Cauchy puisque, par l'inégalité triangulaire, $\|v_k - v_l\| \leq \sum_{l+1}^k \|u_n\|$. ◻

Théorème 4.1 *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé et non vide de H . Pour tout $f \in H$ il existe un unique point de C , appelé projection de f sur H dont la distance à f soit minimum. Cette projection se caractérise comme l'unique point g de C tel que*

$$\forall h \in C, \operatorname{Re}(f - g, h - g) \leq 0. \quad (4.1)$$

Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H , la projection de f est l'unique point $g \in C$ tel que $f - g$ soit orthogonal à tous les éléments de C .

Lemme 4.1 *(identité du parallélogramme). La somme des carrés des longueurs des cotés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.*

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2).$$

Démonstration du théorème 4.1 Montrons d'abord l'unicité. S'il existait deux éléments g_1 et g_2 réalisant la projection de f sur C , on aurait en considérant leur milieu $\frac{g_1+g_2}{2}$ et en appliquant l'identité du parallélogramme à $u = f - g_1$ et $v = f - g_2$,

$$\frac{1}{2}\|2f - (g_1 + g_2)\|^2 = \|f - g_1\|^2 + \|f - g_2\|^2 - \frac{1}{2}\|g_1 - g_2\|^2.$$

Donc $\|f - \frac{g_1+g_2}{2}\|^2 < d(f, C)^2$. Mais comme $\frac{g_1+g_2}{2}$ est dans C , c'est impossible. On montre maintenant l'existence de la projection. Soit g_n une suite de C telle que $\|f - g_n\| \rightarrow d(f, C)$. En utilisant de nouveau l'inégalité du parallélogramme,

$$\frac{1}{2}\|g_n - g_m\|^2 = \|f - g_n\|^2 + \|f - g_m\|^2 - 2\|f - \frac{g_n + g_m}{2}\|^2.$$

Quand n et m tendent vers l'infini, le membre de droite tend vers 0. En effet, $\|f - g_n\|$ et $\|f - g_m\|$ tendent vers $d(f, C)$ et on a $-2\|f - \frac{g_m+g_n}{2}\| \leq -2d(f, C)$, puisque $\frac{g_m+g_n}{2}$ appartient à C .

La suite g_n est donc de Cauchy et converge vers un élément g de C , car C est fermé. Donc $\|f - g_n\| \rightarrow \|f - g\|$ et donc $\|f - g\| = d(f, C)$. Montrons l'inégalité variationnelle (4.1). Pour tout $h \in C$, et $t \in [0, 1]$, les points $g + t(h - g)$ du segment $[g, h]$ appartiennent à C . On a donc

$$\forall t \in [0, 1], \|f - g\|^2 \leq \|f - g - t(h - g)\|^2 \text{ ce qui est équivalent à} \quad (4.2)$$

$$\forall t \in [0, 1], t^2 \|h - g\|^2 - 2t \operatorname{Re}(f - g, h - g) \geq 0.$$

On divise par $t > 0$ et on fait tendre t vers 0^+ pour obtenir (4.1). Réciproquement, si (4.1) est vérifiée pour tout $h \in C$, (4.2) aussi et en faisant $t = 1$ on voit que $\|f - g\|$ réalise la distance minimale de f à un point de C .

Considérons pour terminer le cas où C est un sous-espace vectoriel fermé de H . Soit g la projection de f . Pour tout v dans C , $g + e^{i\theta}v$ appartient à C . On a donc $\operatorname{Re}(e^{i\theta}(v, g - f)) \leq 0$ pour tout θ et donc $(v, g - f) = 0$. Réciproquement, si $g \in C$ vérifie $(v, g - f) = 0$ pour tout $v \in C$, on a $(v - g, g - f) = 0$ pour tout v dans C et par la deuxième partie du théorème 4.1, g est bien la projection de f sur C . \circ

Exercice 1 Démontrer en utilisant (4.1) que la projection P sur un convexe fermé est une application contractante : $\|Pf_1 - Pf_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$.

Définition 4.2 On appelle orthogonal d'un sous-ensemble A de H et note A^\perp l'ensemble

$$A^\perp = \{v, \forall f \in A, (v, f) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de H .

Corollaire 4.1 Si F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H , alors tout élément de H se décompose de manière unique sous la forme

$$f = g + h, \quad g \in F, \quad h \in F^\perp \quad (4.3)$$

où g est la projection de f sur F et h la projection de f sur F^\perp . On a donc

$$H = F + F^\perp, \quad (F^\perp)^\perp = F, \quad H^\perp = \{0\}. \quad (4.4)$$

Si $A \subset H$, on a toujours

$$(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Vect}(A)}.$$

Démonstration La relation (4.3) est une conséquence du théorème 4.1. Par (4.1), la projection g de f sur F est caractérisée par le fait que $f - g = h \in F^\perp$. Comme $f - h = g \in F \subset F^{\perp\perp}$, h est par cette même caractérisation la projection de f sur F^\perp . On a donc $H = F \oplus F^\perp$. Montrons que $F = F^{\perp\perp}$. On a immédiatement $F \subset F^{\perp\perp}$. Donc la décomposition $f = g + h$ sur F et F^\perp est aussi une décomposition sur $F^{\perp\perp}$ et F^\perp . F^\perp étant fermé, cette dernière décomposition est unique. Or si $f \in F^{\perp\perp}$ on a $f = f + 0$ qui est une décomposition sur $F^{\perp\perp}$ et F^\perp . Par identification on obtient $f = g$ et donc $f \in F$.

On remarque enfin que $A^\perp = \overline{\operatorname{Vect}(A)}^\perp$. En effet, si un élément f est orthogonal à A , il est orthogonal aux combinaisons linéaires d'éléments de A et donc à $\operatorname{Vect}(A)$ et par un passage à la limite immédiat à $\overline{\operatorname{Vect}(A)}$. Utilisant (4.4), on obtient alors

$$(A^\perp)^\perp = (\overline{\operatorname{Vect}(A)})^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Vect}(A)}.$$

\circ

Corollaire 4.2 et définition On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est total si l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}(A)$ engendré par A est dense dans H . Pour que A soit total dans H , il faut et il suffit que A^\perp soit réduit à $\{0\}$.

Démonstration Si A est total, $\overline{\text{Vect}(A)}$ est égal à H et donc $A^\perp = \overline{\text{Vect}(A)}^\perp = H^\perp = \{0\}$. Réciproquement, si $A^\perp = 0$, on a $\overline{\text{Vect}(A)}^\perp = \{0\}$ et donc par (4.4) $\overline{\text{Vect}(A)} = H$, ce qui signifie que A est total. \circ

Théorème 4.2 (Riesz) *Pour tout $f \in H$, l'application $v \in H \rightarrow (v, f)$ est une forme linéaire continue sur H . Réciproquement, si \tilde{f} est une forme linéaire continue sur H , il existe un unique élément $f \in H$ tel que*

$$\tilde{f}(v) = (v, f).$$

En d'autres termes, H est son propre dual. Il est donc aussi le dual de son dual, propriété que l'on appelle la réflexivité.

Démonstration La première assertion découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrons la réciproque. Soit \tilde{f} une forme linéaire continue et non nulle sur H et L son noyau, qui est un espace vectoriel fermé. Comme $\tilde{f} \neq 0$, L est un sous-espace propre de H (c'est-à-dire strictement inclus dans H). Comme L est fermé, par la relation (4.4) L^\perp n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $g \in L^\perp$, non nul. On a donc $\tilde{f}(g) \neq 0$ et on pose pour tout $v \in H$

$$v = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)}g + (v - \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)}g) = v_1 + v_2.$$

Le second terme vérifie $\tilde{f}(v_2) = 0$ et appartient donc à L . Comme $g \in L^\perp$, on a donc

$$(v, g) = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)}\|g\|^2.$$

Il en résulte que

$$\tilde{f}(v) = (v, \frac{\tilde{f}(g)}{\|g\|^2}g).$$

\circ

4.1 Bases hilbertiennes

On rappelle qu'un espace métrique est dit séparable s'il contient une suite dense.

Définition 4.3 *Soit un espace de Hilbert séparable. On appelle base hilbertienne de H un système orthonormé fini ou infini $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est total. En d'autres termes, (e_n) est une base hilbertienne si $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$ et $\overline{\text{Vect}((e_n)_n)} = H$.*

Théorème 4.3 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Démonstration Soit $(f_n)_n$ une suite dense de H . On en extrait par récurrence sur n un sous-système libre (que nous appellerons encore par commodité (f_n)), c'est-à-dire tel qu'aucun vecteur de la suite n'est combinaison linéaire des autres. Le système obtenu n'est plus nécessairement dense, mais il reste total. On applique alors le procédé de Gram-Schmidt à la suite f_n . Cela veut dire qu'on pose par récurrence

$$g_1 = f_1, \quad g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^n (f_{n+1}, g_k) \frac{g_k}{\|g_k\|^2},$$

ce qui donne un système orthogonal et on pose finalement $e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$, ce qui donne une suite e_n orthonormée. Le système est bien total, puisque les e_n engendrent les f_n . Cela peut se vérifier par une simple récurrence, ou bien en remarquant que pour tout n la matrice de passage de (g_1, \dots, g_n) à (f_1, \dots, f_n) est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Donc le système (e_n) est une base hilbertienne. \circ

Théorème 4.4 Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H . Alors tout élément de H peut s'écrire comme la somme d'une série convergente

$$f = \sum_n (f, e_n) e_n = \sum_n c_n(f) e_n \quad (4.5)$$

et les coordonnées sur la base vérifient l'égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_n |c_n(f)|^2. \quad (4.6)$$

Réciproquement, si c_n est une suite vérifiant $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, la série $\sum_n c_n e_n$ converge dans H et sa somme f vérifie $(f, e_n) = c_n$.

Démonstration On pose $f_m = \sum_1^m c_n(f) e_n$. On vérifie que $(f - f_m, e_n) = 0$ pour $n \leq m$. Par le théorème 4.1 des projections, cela veut dire que f_m est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les e_n pour $0 \leq n \leq m$. Par la relation (4.3) et le théorème de Pythagore, on déduit que $\|f_m\|^2 \leq \|f\|^2$. Toujours par le théorème de Pythagore, on a donc

$$\|f_m\|^2 = \sum_1^n |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2, \quad (4.7)$$

ce qui prouve que la série $\sum_n c_n(f) e_n$ est convergente dans H (proposition 4.2). Appelons g sa somme. Reste à montrer que $f = g$. Mais si $n \leq m$, on voit que $(f_m - g, e_n) = 0$ et en passant à la limite quand $m \rightarrow \infty$, on obtient $(f - g, e_n) = 0$. Donc $f - g$ est orthogonal à un système total et est donc nul. La relation de Parseval s'obtient en passant à la limite dans (4.7).

La réciproque du théorème est immédiate en reprenant les arguments précédents.

\circ

Exercice 2 (Inégalité de Parseval) Montrer que si (e_n) est un système orthonormé quelconque de H , alors $\sum_n |(e_n, f)|^2 \leq \|f\|^2$. Montrer que si cette inégalité est une égalité pour tout $f \in H$, alors (e_n) est une base hilbertienne. Montrer que tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.

Corollaire 4.3 Tout espace de Hilbert séparable est isométrique à $l^2(\mathbb{N})$. Il suffit d'associer à $f \in H$ son vecteur de coordonnées sur une base hilbertienne, $c = (c_1(f), \dots, c_n(f), \dots)$. En particulier, on a

$$(f, g) = \sum_n c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

Exercice 3 Montrer qu'une forme bilinéaire $a(u, v)$ sur un espace vectoriel normé est continue si et seulement si il existe C tel que $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$.

4.2 Convergence faible

Définition 4.4 On dit qu'une suite u_n dans un Hilbert converge faiblement vers $u \in H$ si pour tout $v \in H$ on a $(v, u_n) \rightarrow (v, u)$. On écrit alors $u_n \rightharpoonup u$.

Proposition 4.3 Si $u_n \in H$ séparable est bornée ($\|u_n\| \leq C$), alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge faiblement :

$$\forall v \in H, (u_{n_k}, v) \rightarrow (u, v)$$

et on a

$$\|u\| \leq \liminf_n \|u_n\|.$$

Démonstration On utilise l'isomorphisme avec $l^2(\mathbb{N})$ muni de la base canonique $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Par commodité on notera encore u_n une sous-suite de u_n extraite par un procédé d'extraction diagonale de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $(u_n, e_k) \rightarrow x_k$. Ceci est possible car par le théorème de Cauchy-Schwartz, $|(u_n, e_k)| \leq \|u_n\| \leq C$ est borné. Pour plus de détails sur le procédé d'extraction diagonale, voir le théorème 1.6. En appliquant le lemme de Fatou à la suite de suites (u_n, e_k) , $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\sum_k x_k^2 \leq \liminf_n \sum_k |(u_n, e_k)|^2 = \liminf_n \|u_n\|^2 \leq C^2.$$

Posons $u = \sum_k x_k e_k$. Alors $u \in H$ et

$$\|u\|^2 = \sum_k |x_k|^2 \leq \liminf_n \|u_n\|^2.$$

Finalement montrons que $(u_n, v) \rightarrow (u, v)$ pour tout $v \in H$. C'est immédiat quand v est une combinaison linéaire finie des e_n et donc pour v dans un sous-ensemble dense D de H . Prenons maintenant v quelconque dans H . On fixe ε , puis $w \in D$ tel que $\|v - w\| \leq \varepsilon$. On a $|(u_n - u, v)| \leq |(u_n - u, w)| + |(u_n - u, w - v)|$. Le premier terme est petit pour n grand. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité triangulaire, le second est plus petit que $2C\varepsilon$. \circ

Exercice 4 On pose dans $H = L^2(0, 2\pi)$, $u_n(x) = \sin(nx)$ et $v_n(x) = |\sin(nx)|$. Montrer que ces suites convergent faiblement dans H mais pas fortement. Calculer leur limite faible.

4.3 Décomposition d'images sur la base de Haar

Nous nous plaçons dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Nous considérons tout d'abord la fonction de $L^2(\mathbb{R})$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Nous définissons ensuite $I(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$, puis les trois fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H_1(x, y) = H(x)I(y), \quad H_2(x, y) = I(x)H(y) \quad \text{et} \quad H_3(x, y) = H(x)H(y).$$

Enfin nous définissons

$$H_{i,j_1,j_2}^k(x, y) = 2^k H_i(2^k x - j_1, 2^k y - j_2), \quad k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3.$$

On peut montrer (voir l'exercice 2) que ces fonctions forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Donc si pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ nous définissons les coefficients

$$c_{i,j_1,j_2}^k(f) = \langle f, H_{i,j_1,j_2}^k \rangle,$$

alors

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{k,j_1,j_2 \in \mathbb{Z}} c_{i,j_1,j_2}^k(f) H_{i,j_1,j_2}^k$$

dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour illustrer cette décomposition dans le cas d'une image, nous considérons, pour k_1 fixé, une fonction v_{k_1} appartenant à l'espace V_{k_1} des fonctions constantes sur les hypercubes $C^{k_1,z} = 2^{-k_1}(z + [0, 1]^2)$, $z \in \mathbb{Z}^2$, et supposons de plus que le support de v_{k_1} est inclus dans $[0, 1]^2$. Une telle fonction représente une image numérique. Dans ce cas, les coefficients $c_{i,j_1,j_2}^k(v_{k_1})$ sont nuls pour $j_1 \geq 2^k$, $j_1 < 0$, $j_2 \geq 2^k$, $j_2 < 0$ ou $k > k_1$ (le vérifier!). Dans la figure 4.1, nous représentons les coefficients de l'image numérique représentée figure 4.2, en haut à gauche (il s'agit donc de v_8 , image prenant 256×256 valeurs). Pour chaque valeur de k ("échelle") entre 6 et 8, et chaque valeur de i ("orientation") entre 1 et 3, nous représentons une fonction constante par morceaux, dont la valeur prise en $2^{-k}((j_1, j_2) + [0, 1]^2)$ est $\log(1 + |c_{i,j_1,j_2}^k|)$, pour $j_1, j_2 = 0, \dots, 2^k - 1$ (la fonction $\log(1 + |x|)$ est utilisée car c'est une fonction croissante qui permet d'atténuer les très fortes variations des modules des coefficients $|c|$, tout en donnant une idée de leur valeurs respectives).

Dans le cadre des espaces de Hilbert, les images v_k sont les projections d'une fonction v de $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur les espaces V_k . D'autre part, pour montrer que les (H_{i,j_1,j_2}^k) forment une base de $L^2(\mathbb{R}^2)$, on montre que si W_k est l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur les hypercubes de côtés 2^{-k} et à moyenne nulle, les $(H_{i,j_1,j_2}^k(x, y))$ forment une base de W_k (voir l'exercice 2). On peut en fait montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $V_{k+1} = V_k \oplus W_k$. En ce sens, la décomposition de la figure 4.1 représente les détails ajoutés à l'image v lorsque l'on passe de la représentation v_k à la représentation v_{k+1} . Le fait de s'intéresser aux familles de fonctions $(H_{i,j_1,j_2}^k(x, y))$ à i fixé permet de voir les détails correspondant aux trois directions associées aux fonctions H_1, H_2 et H_3 : respectivement verticale, horizontale et diagonale. Remarquons également qu'en vertu des propriétés énoncées ci-dessus, l'image v_{k_1} peut s'écrire, pour $0 \leq k_0 \leq k_1 - 1$, :

$$v_{k_1} = v_{k_0} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \sum_{j_1,j_2=0}^{2^k-1} c_{i,k,j_1,j_2} H_{i,j_1,j_2}^k. \quad (4.9)$$

Ce type de décomposition en une image à une certaine précision, et en images de détails, utilisant des fonctions de moyenne nulle et à support compact, est à la base de la théorie mathématique des ondelettes, qui a de nombreuses applications en traitement du signal et des images. La décomposition particulière présentée ici repose sur les fonctions H_{i,j_1,j_2}^k , et les coefficients c_{i,j_1,j_2}^k sont les coefficients d'ondelettes de l'image dans cette base.

A titre d'exemple, nous illustrons une application classique de la théorie des ondelettes : la compression d'images. Le but de la compression est de représenter un signal discret $(s_n)_{n=0,\dots,N}$ par un nombre minimum de coefficients $(c_n)_{n=0,\dots,N'}$, $N' < N$. On parle de compression sans perte lorsque l'on peut retrouver le signal (s_n) à partir des (c_n) , et de compression avec perte lorsque l'on ne peut que retrouver une approximation (\tilde{s}_n) de (s_n) . Nous montrons figure 4.2 un exemple de compression avec perte dans le cas des images. Pour un certain $k_1 \in \mathbb{N}$, nous considérons l'image numérique v_{k_1} (projection de v sur l'espace V_{k_1}). Nous supposons à nouveau que la fonction v est nulle en dehors de $[0, 1]^2$. Nous utilisons ensuite la formule 4.9. L'idée de la compression par ondelettes est de ne garder qu'un petit nombre des coefficients c_{i,k,j_1,j_2} pour

représenter l'image. Pour $i = 1, \dots, 3$, $k = k_0, \dots, k_1 - 1$, nous définissons $E_{i,k}$ ensemble des 10 % des coefficients de plus grand module parmi $\{c_{i,k,j_1,j_2} | j_1, j_2 = 0, \dots, 2^k - 1\}$. Sur la figure 4.2, nous montrons l'image obtenue par la formule suivante avec $k_1 = 8$ et $k_0 = 6$:

$$\tilde{v}_{k_1} = a_{k_0} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \sum_{E_{i,k}} c_{i,k,j_1,j_2} H_{i,j_1,j_2}^k(x, y). \quad (4.10)$$

Bien que le nombre de coefficients utilisé pour décrire le signal ait été grandement réduit (10 fois si on néglige la fonction a_{k_0}), le résultat reste visuellement acceptable. En pratique, les fonctions de base utilisées sont plus complexes que les H_i^k (plus régulières) et le choix du nombre de coefficients à garder plus subtil (pas forcément le même pour chaque "échelle" k). Ceci permet en particulier d'atténuer les zones carrées homogènes, visibles sur la figure 4.2.

4.4 Exercices

Exercice 5

1) Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx,$$

et trouver

$$\max \int_{-1}^1 x^3 g(x) dx,$$

où g est soumis aux contraintes

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 xg(x) dx = \int_{-1}^1 x^2g(x) dx = 0; \quad \int_{-1}^1 |g(x)|^2 dx = 1.$$

2) Si $x_0 \in H$ et si M est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H , énoncer le problème de maximum correspondant à $\min\{\|x_0 - x\|, x \in M\}$ comme dans la question précédente.

Exercice 6 Lemme de Grothendieck

Soit Ω un espace mesuré et μ une mesure de probabilité sur Ω . Soit S un sous-espace vectoriel fermé de $L^1(\mu)$ tel que $S \subset L^\infty(\mu)$. On va montrer que $\dim S < \infty$.

1) Montrer que $\exists C, M$ tels que $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leq C \|f\|_1$ puis que $\|f\|_\infty \leq M \|f\|_2$.

2) Vérifier que $(S, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert. Soit Φ_1, \dots, Φ_n une famille orthonormée quelconque de S . Pour $c = (c_i)_i \in \overline{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, on définit $f_c(x) =$

$$\sum_1^n c_i \Phi_i(x).$$

Vérifier que $\forall c \in \overline{B}(0, 1), \|f_c\|_\infty \leq M$.

Montrer qu'il existe $\Omega' \subset \Omega$ avec $\mu(\Omega') = 1$ tel que $\forall x \in \Omega', \forall c \in \overline{B}(0, 1)$ on ait $|f_c(x)| \leq M$. En déduire que

$$\sum_1^n |\Phi_i(x)|^2 \leq M^2, \quad \text{p.p.}$$

Conclure.

Exercice 7 Base de Haar

On pose $H(x) = 1$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $H(x) = -1$ si $\frac{1}{2} \leq x < 1$. C'est la fonction de Haar. On pose

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$



FIGURE 4.1 – Décomposition d’une fonction sur la base hilbertienne de Haar. Nous nous intéressons à une fonction v_{k_1} à support dans $[0, 1]^2$, constante sur les hypercubes dyadiques de côté 2^{-k_1} . Cette fonction est représentée par la formule (4.9), avec $c_{i,k,j_1,j_2} = \langle v_{k_1}, H_{i,j_1,j_2}^k \rangle$, et H_{i,j_1,j_2}^k les fonctions de Haar. Ici $k_1 = 8$, avec la même image que dans la figure 4.2. Pour chaque valeur de k (“échelle”) entre 6 et 8, et chaque valeur de i (“orientation”) entre 1 et 3, nous représentons une fonction constante par morceaux, dont la valeur prise sur les hypercubes $2^{-k}((j_1, j_2) + [0, 1]^2)$ est $|c_{i,j_1,j_2}|$, pour $j_1, j_2 = 0, \dots, 2^k - 1$. Un point est d’autant plus sombre que le module du coefficient c est important. Première ligne : $j = 1$, et de droite à gauche, $i = 1, i = 2, i = 3$; deuxième ligne, $j = 2$, troisième ligne, $j = 3$. En se référant à la forme des fonctions H , les images de la colonne de gauche font apparaître les contours verticaux de l’image, celles du milieu les contours horizontaux, alors qu’à droite on retrouve des contours obliques ainsi que des coins. Remarque : le module des coefficients est souvent très petit, et le contraste des images a été rehaussé pour éviter qu’elles ne soient blanches.

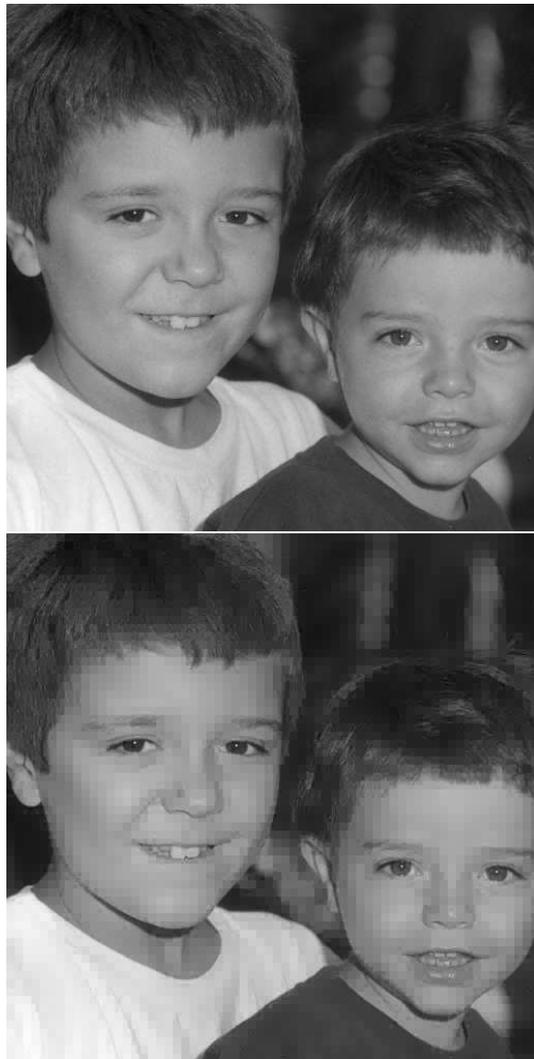


FIGURE 4.2 – Exemple de compression d’images dans une base hilbertienne. A gauche, l’image originale (même image que figure 4.2), à droite l’image obtenue en ne gardant que 10% des coefficients dans la base de Haar (voir la formule (4.10)).

- 1) Dessiner les fonctions de Haar pour $l = 1, 2$. Démontrer que ces fonctions forment un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.
- 2) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]$ et qui sont constantes sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j} . On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j , l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des intervalles de longueur 2^{-j} et à moyenne nulle.
- 3) Montrer que les fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ dont l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx$ est nulle forment un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Indication : montrer que si $f \in L^2 \cap L^1$, $f - \frac{\int f(x)dx}{\text{mes}(B(0,R))} \mathbb{1}_{B(0,R)}$ converge vers f dans L^2 quand $R \rightarrow +\infty$ et est d'intégrale nulle.
- 4) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)$ d'intégrale nulle sur $(-2^j, 0)$ et $(0, 2^j)$.
- 5) Nous nous plaçons dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit $I(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$, puis les trois fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H_1(x, y) = H(x)I(y), \quad H_2(x, y) = I(x)H(y) \quad \text{et} \quad H_3(x, y) = H(x)H(y).$$

Ensuite on définit la "base d'ondelettes de Haar en dimension 2",

$$H_{i,j_1,j_2}^k(x, y) = 2^k H_i(2^k x - j_1, 2^k y - j_2), \quad k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3.$$

Commencer par dessiner les fonctions H_1, H_2, H_3 .

- 6) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]^2$ et qui sont constantes sur les carrés dyadiques de côté 2^{-j} . On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j , l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des carrés de côté 2^{-j} et d'intégrale nulle.
- 7) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)^2$ d'intégrale nulle.
- 8) Pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ considérons les coefficients

$$c_{i,j_1,j_2}^k(f) = \langle f, H_{i,j_1,j_2}^k \rangle.$$

Conclure que

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{k,j_1,j_2 \in \mathbb{Z}} c_{i,j_1,j_2}^k(f) H_{i,j_1,j_2}^k$$

dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel normé dont la norme vérifie l'identité du parallélogramme, c'est à dire

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2), \quad \forall a, b \in E.$$

On se propose de montrer que l'expression suivante

$$(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2), \quad x, y \in E,$$

définit un produit scalaire sur E tel que $(x, x) = \|x\|^2$.

- 1) Vérifier que $(x, y) = (y, x)$, $(-x, y) = -(x, y)$ et $(x, 2y) = 2(x, y)$, $\forall x, y \in E$.

2) Montrer que $(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \forall x, y, z \in E$.

On pourra appliquer l'identité du parallélogramme successivement avec

- (1) $a = x, b = y,$
- (2) $a = x + z, b = y + z,$
- (3) $a = x + y + z, b = z.$

3) Montrer que $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$. (Le faire d'abord pour $\lambda \in \mathbb{N}$, puis $\lambda \in \mathbb{Q}$ et enfin $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Exercice 9

Soit $w(x) = x^{-\log x}$. On considère l'espace de Hilbert $L_w^2(0, +\infty) = \{f : f\sqrt{w} \in L^2(0, +\infty)\}$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^\infty fgwdx$. Soit $\mathbf{P} = \{p \text{ polynôme à coefficients réels}\}$.

1) Vérifier que $\mathbf{P} \subset L_w^2(0, +\infty)$.

2) Soit $f(x) = \sin(2\pi \log x)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (x^n, f) = 0$.

En déduire que \mathbf{P} n'est pas dense dans $L_w^2(0, +\infty)$.

Exercice 10 Soit V un espace de Hilbert réel tel que $\dim V = \infty$.

Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue et coercive c'est à dire telle que $\exists \beta > 0, |a(u, v)| \leq \beta \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V$ et $\exists \alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V$.

Soit $\ell \in V'$.

1) Montrer que $\exists! u \in V$ tel que $a(u, v) = \ell(v), \forall v \in V$ et que $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{V'}$.

2) On suppose dans toute la suite de l'exercice que V satisfait l'hypothèse suivante : il existe une suite de sous-espaces $(V_n)_{n \geq 1}$ de V telle que

$$(H) : \begin{cases} (i) & \dim V_n = p_n, \\ (ii) & V_n \subset V_{n+1}, \\ (iii) & \bigcup_n V_n \text{ est dense dans } V. \end{cases}$$

Vérifier que $\exists! u_n \in V_n$ tel que $a(u_n, v) = \ell(v), \forall v \in V_n$ et que l'on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite qui converge faiblement dans V vers une limite u_\star .

3) Démontrer que $u = u_\star$. En déduire que toute la suite $(u_n)_n$ converge faiblement dans V vers u .

On veut montrer que $(u_n)_n$ converge fortement vers u dans V .

4) Première démonstration : En développant $a(u_n - u, u_n - u)$, montrer que $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

5) Deuxième démonstration : On note $\delta_n = \inf\{\|u - w\|, w \in V_n\}$.

a) Montrer que δ_n est atteint.

b) Montrer (sans utiliser la forme bilinéaire a) que $\delta_n \rightarrow 0$.

c) Montrer que $\|u_n - u\| \leq \frac{\beta}{\alpha} \delta_n$ et en déduire que u_n converge fortement vers u dans V .

Questions subsidiaires :

1) Montrer que $p_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2) Montrer que l'hypothèse (H) $\implies V$ séparable.

Exercices du 7 Février 2008**Exercice 1**

- 1) Soit $\chi_n(x) = \frac{1}{2n}$ sur $[-n, n]$, $\chi_n(x) = 0$ ailleurs. Etudier sa limite dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- 2) Utiliser cette suite de fonctions pour montrer que

$$\{f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0\}$$

est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Base de Haar

On pose $H(x) = 1$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $H(x) = -1$ si $\frac{1}{2} \leq x < 1$. C'est la fonction de Haar. On pose

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

- 1) Dessiner les fonctions de Haar pour $l = 1, 2$. Démontrer que ces fonctions forment un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.
- 2) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]$ et qui sont constantes sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j} . On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j , l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des intervalles de longueur 2^{-j} et à moyenne nulle.
- 3) Montrer que les fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ dont l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$ est nulle forment un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Indication : montrer que si $f \in L^2 \cap L^1$, $f - \frac{\int f(x) dx}{\text{mes}(B(0, R))} \mathbb{1}_{B(0, R)}$ converge vers f dans L^2 quand $R \rightarrow +\infty$ et est d'intégrale nulle.
- 4) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)$ d'intégrale nulle sur $(-2^j, 0)$ et $(0, 2^j)$.
- 5) Nous nous plaçons dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit $I(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}$, puis les trois fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H_1(x, y) = H(x)I(y), \quad H_2(x, y) = I(x)H(y) \quad \text{et} \quad H_3(x, y) = H(x)H(y).$$

Ensuite on définit la "base d'ondelettes de Haar en dimension 2",

$$H_{i, j_1, j_2}^k(x, y) = 2^k H_i(2^k x - j_1, 2^k y - j_2), \quad k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3.$$

Commencer par dessiner les fonctions H_1, H_2, H_3 .

- 6) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]^2$ et qui sont constantes sur les carrés dyadiques de côté 2^{-j} . On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j , l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des carrés de côté 2^{-j} et d'intégrale nulle.
- 7) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)^2$ d'intégrale nulle.
- 8) Pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ considérons les coefficients

$$c_{i, j_1, j_2}^k(f) = \langle f, H_{i, j_1, j_2}^k \rangle.$$

Conclure que

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}} c_{i, j_1, j_2}^k(f) H_{i, j_1, j_2}^k$$

dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 3 On note \star le produit de convolution.

Montrer que $(L^1(\mathbb{R}), +, \star)$ est une algèbre de Banach commutative qui ne possède pas d'élément neutre pour \star .

Exercice 4 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

1) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Montrer que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Soit $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$, on suppose que $\exists C$ telle que $\|f\|_p \leq C, \forall p$ tel que $1 \leq p < \infty$.

Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

3) Soit $\Omega =]0, 1[$ et $f(x) = \log x$, vérifier que $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$ et que $f \notin L^\infty(\Omega)$.

Exercice 5 (J.M.Bony, Ecole Polytechnique)

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ et soit f définie sur \mathbb{R} . On pose, $\forall n \geq 1$, (lorsque cela a un sens),

$$T_n(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y^n)g(y)dy.$$

1) si $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $T_n(f)$ est définie p.p. et $T_n(f) \in L^1(\mathbb{R})$.

2) Si f est continue et bornée, montrer que $T_n(f)$ est continue et bornée.

3) Si f est continue et $f(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, montrer que $\forall x, T_n(f)(x) \rightarrow C f(x)$ où C est une constante à déterminer.

CORRIGES

Exercice 1

1) On a $\chi_n(x) \geq 0, \int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1, \chi_n \rightarrow 0$ p.p. et $\int_{\mathbb{R}} \chi_n^2 = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$. Donc $\chi_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\chi_n \not\rightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

2) L'ensemble $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car contient $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ par exemple. Soit $E = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0\}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $g_n = f - (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \in E$ et $f - g_n = (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc E est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

1) Le support de H_k^l est $I_k^l = [\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}]$. Donc si $l = l'$ et $k \neq k'$, les supports de H_k^l et $H_{k'}^{l'}$ sont disjoints donc $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Si $l \neq l'$, par exemple $l > l'$ alors $H_{k'}^{l'}$ est constante sur les intervalles dyadiques de longueur $2^{-l'-1}$ donc est constante sur le support de H_k^l . Comme H_k^l est de moyenne nulle, on en déduit que $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Enfin $\|H_k^l\|_{L^2}^2 = 2^l \int_{I_k^l} 1 dx = 1$.

Donc $(H_k^l)_{l,k}$ forme un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

2) Il y a

1	fonction constante par morceaux sur les intervalles de longueur	$\frac{1}{2}$,
1 + 2	$\frac{1}{4}$,
...
1 + 2 + ... + 2 ^{j-1}	$\frac{1}{2^j}$.

Donc $\text{card}(S_j) = 2^j - 1$. Or W_j est un espace de codimension 1 dans un espace de dimension 2^j , l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j} , donc le système S_j forme une base de W_j .

3) Les fonctions indicatrices des intervalles dyadiques sont denses dans $L^2(0, 1)$ donc $\{1, H_k^l, l \geq 0, k = 0, \dots, 2^l - 1\}$ forme une base orthogonale de $L^2(0, 1)$. Si on enlève la fonction égale à 1, les H_k^l forment une base orthogonale de $\{f \in L^2(0, 1), f \text{ à moyenne nulle}\}$, et par symétrie par rapport à 0 et dilatations, les $H_k^l, l \geq -j, k = -2^l, \dots, 2^l - 1$ forment une base

orthogonale des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)$ d'intégrale nulle sur $[-2^j, 0]$ et $[0, 2^j]$.

3) Soit maintenant $f \in L^2(\mathbb{R})$, comme les fonctions à supports compacts sont denses dans L^2 , on peut supposer que f est à support compact. On découpe f en $f = \mathbb{1}_{(0, +\infty)}f + \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}f$. Soit $g = \mathbb{1}_{(0, +\infty)}f$ alors g est à support compact dans \mathbb{R}^+ , soit $[0, A]$ son support alors $A \leq 2^j$ pour un j . On connaît une base de $L^2(0, 2^j)$ en ajoutant aux H_k^1 la fonction $e_1 = 2^{-\frac{j}{2}}\mathbb{1}_{(0, 2^j)}$ donc $g = (g, e_1)e_1 + \sum_{i \geq 2} (g, e_i)e_i$ où les e_i pour $i \geq 2$ sont les H_k^1 . Alors

$$\|g - \sum_{i \geq 2} (g, e_i)e_i\|_2 = |(g, e_1)|. \text{ Montrons que pour } \varepsilon > 0 \text{ on peut choisir } j \text{ tel que } |(g, e_1)| \leq \varepsilon.$$

On a

$$|(g, e_1)| = \left| \int_0^A 2^{-\frac{j}{2}} g(x) dx \right| \leq 2^{-\frac{j}{2}} \|g\|_2 \sqrt{A},$$

et on veut rendre ce terme plus petit que ε , il est clair que c'est vrai pour j assez grand. On raisonne de la même façon pour le terme $\mathbb{1}_{(-\infty, 0)}f$, donc on approxime arbitrairement bien toute fonction à support compact et par densité toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Par le théorème de Fubini, $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

$(f, g) \mapsto (f \star g)$ est bilinéaire donc \star est distributive par rapport à l'addition. Enfin, il est évident que \star est commutative, donc il reste à voir que \star est associative. Soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, en appliquant le théorème de Fubini et en effectuant un changement de variables, on a

$$\begin{aligned} (f \star g) \star h(x) &= \int_{\mathbb{R}} f \star g(x-y) h(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y-u) g(u) h(y) dy du, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(y) g(v-y) f(x-v) dv dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-v) g \star h(v) dv = f \star (g \star h)(x). \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe un élément neutre δ pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $f_n \geq 0$, de support $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et telle que $f_n(0) = \|f_n\|_\infty = 1$. Alors $\delta \star f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\delta \star f_n(x) = f_n \star \delta(x) = f_n(x)$, donc en particulier

$$f_n \star \delta(0) = f_n(0) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f_n(-y) \delta(y) dy.$$

Soit $g_n(y) = f_n(-y) \delta(y)$ alors $g_n(y) \rightarrow 0$ p.p. et $|g_n(y)| \leq |\delta(y)| \in L^1(\mathbb{R})$. Le théorème de convergence dominée montre que $\int_{\mathbb{R}} g_n \rightarrow 0$, d'où contradiction.

Exercice 4

1) On a $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{p}}$ donc $\limsup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

Soient $0 < k < \|f\|_\infty$ et $A = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}$, alors $|A| \neq 0$ et $\|f\|_p \geq k |A|^{\frac{1}{p}}$. Donc $\liminf \|f\|_p \geq k$ et ceci $\forall k < \|f\|_\infty$. D'où $\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$ et $\lim \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Soit $k > C$ et soit $A = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}$ alors

$$k^p |A| \leq \|f\|_p^p \leq C^p \implies |A| \leq \left(\frac{C}{k}\right)^p, \quad \forall p.$$

Quand $p \rightarrow \infty$, on obtient $|A| = 0$, donc p.p. $|f(x)| \leq k$ et $f \in L^\infty$.

3) Soit $f(x) = \log x$, alors $f \notin L^\infty(0, 1)$. Soit $1 \leq p < +\infty$ comme $\sqrt{x} |\log x|^p \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|x| \leq \varepsilon \implies |\log x|^p \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors

$$|f(x)|^p \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0, \varepsilon)} + |\log x|^p \mathbb{1}_{(\varepsilon, 1)} \in L^1(0, 1),$$

donc $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$.

Exercice 5

1) Soit $F(x, y) = f(x - y^n)g(y)$ alors $\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx = \|f\|_{L^1} |g(y)|$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

donc par le théorème de Fubini-Tonelli, $F \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. De plus, p.p. x , $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x, y) dy$ est définie et est dans $L^1(\mathbb{R})$. Enfin, $\|T_n(f)\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.

2) On a

$$\begin{aligned} \forall x, \quad y &\mapsto f(x - y^n)g(y) \in L^1(\mathbb{R}), \\ \text{p.p. } y, \quad x &\mapsto f(x - y^n)g(y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

et $\forall x$, $|f(x - y^n)g(y)| \leq \|f\|_{\infty} |g(y)| \in L^1(\mathbb{R})$, donc par le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, $T_n(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\forall x$, $|T_n(f)(x)| \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{L^1}$ donc $T_n(f)$ est bornée.

3) On écrit $T_n(f)(x) = A_n + B_n$ où $A_n = \int_{|y| < 1} f(x - y^n)g(y) dy$ et $B_n = \int_{|y| > 1} f(x - y^n)g(y) dy$.

Etude de A_n :

Quand $n \rightarrow \infty$, $f(x - y^n)g(y) \rightarrow f(x)g(y)$ p.p. et $|f(x - y^n)g(y)| \leq M|g(y)| \in L^1$. Par le théorème de convergence dominée, $A_n \rightarrow f(x) \int_{|y| < 1} g(y) dy$.

Etude de B_n :

Quand $n \rightarrow \infty$, $x - y^n \rightarrow \pm\infty$ et par hypothèse $f(x - y^n) \rightarrow 0$ donc $f(x - y^n)g(y) \rightarrow 0$ p.p. Enfin, $|f(x - y^n)g(y)| \leq M|g(y)| \in L^1$, donc le théorème de convergence dominée montre que $B_n \rightarrow 0$.

D'où $T_n(f)(x) \rightarrow C f(x)$ avec $C = \int_{|y| < 1} g(y) dy$.

Chapitre 5

Séries de Fourier

On considère l'espace de Hilbert hermitien $L^2([-\pi, \pi])$ que l'on notera aussi $L^2(-\pi, \pi)$. Ces fonctions sont à valeurs réelles ou complexes. On va montrer que le système orthonormé

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(-\pi, \pi)$. Cette base s'appelle la base de Fourier. On notera

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx,$$

en sorte que pour toute f dans $L^2([-\pi, \pi])$ on puisse écrire

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx},$$

la série précédente convergeant au sens L^2 . Les $c_n(f)$ s'appellent les coefficients de Fourier de f et sont proportionnels aux coordonnées de f dans la base de Fourier. Pour montrer ce résultat, on va commencer par analyser le comportement des coefficients de Fourier selon la régularité de f .

Lemme 5.1 (*Lemme de Riemann-Lebesgue*)

i) On pose pour $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} dx.$$

Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est k fois continûment différentiable et telle que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{iax} dx \rightarrow 0$ quand $|a| \rightarrow \infty$.

iii) Application aux coefficients de Fourier : si $f \in L^1(-\pi, \pi)$,

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n(f) = 0.$$

Remarque 5.1 Si $f \in L^2$, on sait immédiatement que $c_n(f) \rightarrow 0$ car $c_n(f)$ s'interprètent comme les coordonnées de f sur un système orthonormé.

Démonstration i) En intégrant par parties k fois l'intégrale définissant \hat{f} , on obtient pour $\xi \neq 0$,

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{(i\xi)^k} \int f^{(k)}(x) e^{-ix\xi} dx \right| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

ii) Soit f_n une suite de fonctions \mathcal{C}^∞ et à support compact qui tendent vers f dans L^1 (proposition 3.4). On a, pour n fixé assez grand : $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$, ce qui implique $|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$ pour tout ξ . En utilisant (i), on voit que $|\hat{f}_n(\xi)| \rightarrow 0$ quand n est fixé et $|\xi| \rightarrow \infty$. Donc $|\hat{f}_n(\xi)| \leq \varepsilon$ pour ξ assez grand. Finalement,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| + |\hat{f}_n(\xi)| \leq 2\varepsilon$$

pour ξ assez grand. ◦

La proposition suivante nous dit que la série de Fourier de f converge vers $f(x)$ en tout point x où f est suffisamment régulière.

Proposition 5.1 (*Principe de localisation*)

Si $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et si la fonction $y \rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ est intégrable sur un voisinage de x , alors $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N f(x) = f(x)$, où on a noté : $s_N f(x) =: \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e^{inx}$.

Expliquons pourquoi le résultat précédent s'appelle principe de localisation. Alors que $s_N(f)$ est le résultat d'un calcul intégral sur tout l'intervalle $[-\pi, \pi]$, et donc d'un calcul global, le comportement de $s_N f(x)$ dépend du comportement local de f au voisinage de x . Il y a donc "localisation".

Démonstration **Etape 1** On se ramène au cas $f(x) = 0, x = 0$.

Supposons la proposition démontrée pour $x = 0, f(x) = 0$. Soit maintenant $g \in L^1(-\pi, \pi)$ telle que $\frac{g(y) - g(x)}{y - x}$ soit intégrable au voisinage de x . Alors on pose $f(y) = g(x + y) - g(x)$. On a bien $f(0) = 0$ et $\frac{f(y)}{y} = \frac{g(x + y) - g(x)}{y}$ est intégrable au voisinage de 0. Donc, par hypothèse, $s_N f(0) \rightarrow f(0) = 0$. Mais

$$\begin{aligned} s_N f(0) &= \sum_{|n| \leq N} c_n(g(x + y) - g(x)) = \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(x + y) - g(x)) e^{-iny} dy \\ &= \left(\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) e^{-in(z-x)} dz \right) - g(x) = \left(\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) e^{-inz} dz \right) - g(x) \\ &= s_N g(x) - g(x). \end{aligned}$$

Donc $s_N g(x) \rightarrow g(x)$. En fait, l'argument précédent montre que s_N commute avec les translations :

$$s_N[g(\cdot + x)] = (s_N g)(\cdot + x).$$

Etape 2 On a

$$s_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dy. \quad (5.1)$$

En effet, $\sum_{-N}^N e^{iky} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}}$, ce qui se prouve aisément en sommant la suite géométrique.

Etape 3 Par l'étape 1 il suffit de montrer que si $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et si $\frac{f(y)}{y}$ est intégrable autour de 0, alors $s_N f(0) \rightarrow 0$. Comme sur $[-\pi, \pi]$, $|\sin \frac{y}{2}| \geq \frac{|y|}{\pi}$, on a

$$\left| \frac{f(y)}{\sin \frac{y}{2}} \right| \leq \frac{\pi |f(y)|}{|y|} \in L^1(-\pi, \pi).$$

Donc on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction $\frac{f(y)}{\sin \frac{y}{2}}$. On conclut que l'intégrale de (5.1) définissant $s_N f(0)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. \circ

Corollaire 5.1 *si $f \in L^1([-\pi, \pi])$ est Höldérienne d'exposant $0 < \alpha \leq 1$ en x (c'est-à-dire $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$), alors $s_N f(x) \rightarrow f(x)$. Cette conclusion s'applique si f est une primitive sur $[-\pi, \pi]$ d'une fonction de $L^2(-\pi, \pi)$.*

Démonstration L'application du principe de localisation est immédiate :

$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq |x - y|^{\alpha - 1}$ qui est bien intégrable au voisinage de x . Soit maintenant f une fonction qui est la primitive sur $[-\pi, \pi]$ d'une fonction de $L^2(-\pi, \pi)$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t) dt \right| \leq |y - x|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La fonction f est donc Hölderienne d'exposant $\frac{1}{2}$ et le principe de localisation s'applique. \circ

Exercice 1 Une preuve rapide et une généralisation du principe de localisation.

Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$, 2π -périodique. On note $s_{N,M} f$ la série partielle de Fourier de f , définie par

$$s_{N,M} f(x) = \sum_{k=-N}^{k=M} c_k(f) e^{ikx},$$

où $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$. On rappelle que par le Lemme de Riemann-Lebesgue, $c_k(f) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \pm\infty$. Nous allons montrer le théorème suivant, qui est une version du "principe de localisation".

Théorème 5.1 (i) *Soit $f(x)$ une fonction 2π -périodique telle que*

$$\frac{f(x)}{e^{ix} - 1} = g(x) \in L^1(0, 2\pi).$$

Alors $s_{N,M} f(0) \rightarrow 0$ quand $N, M \rightarrow +\infty$.

(ii) *Plus généralement, si $x \rightarrow \frac{f(x) - c}{x - y} \in L^1(0, 2\pi)$, alors $s_{N,M} f(y) \rightarrow c$.*

Remarque : si f est continue en 0, la première hypothèse entraîne $f(0) = 0$. Si f est continue en y , la deuxième hypothèse entraîne $f(y) = c$.

On appelle l'énoncé précédent le principe de localisation car il dit, en termes informels, que "si f est régulière en x , alors la série de Fourier de f tend vers $f(x)$ au point x ". Bien que $s_{N,M} f$ soit définie par une formule globale (une intégrale sur

l'intervalle $[0, 2\pi]$), la série de Fourier reconnaît les points réguliers et son comportement dépend du comportement local de f . La démonstration qui suit est vraiment élémentaire grâce à l'astucieuse démonstration due à Ronald Coifman, de l'Université de Yale (démonstration communiquée par Yves Meyer).

1) Dédurre (ii) de (i).

2) Sous l'hypothèse de (i), on appelle γ_k les coefficients de Fourier de g . Montrer que $c_k = \gamma_{k-1} - \gamma_k$. En déduire que $\sum_N^M c_k \rightarrow 0$ et conclure en appliquant le Lemme de Riemann-Lebesgue.

Corollaire 5.2 *Le système*

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} (e^{ikt})_{k \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(-\pi, \pi)$. Notant $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$, on a donc pour toute f dans $L^2([-\pi, \pi])$,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx},$$

la série précédente convergeant au sens L^2 .

Démonstration On appelle polynôme trigonométrique toute expression de la forme $P(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt}$, où les a_k sont des nombres complexes. Pour montrer que le système de Fourier est une base hilbertienne, il nous suffit de montrer que c'est un système total, c'est-à-dire que les polynômes trigonométriques forment un sous-espace vectoriel dense de $L^2(-\pi, \pi)$. Mais le lemme 5.1 (Principe de localisation) nous assure que si f est \mathcal{C}^2 et à support compact dans $[-\pi, \pi]$, alors $s_N(f)(x) \rightarrow f(x)$ en tout point (On peut aussi utiliser directement le théorème de Stone-Weierstrass). Comme de plus les coefficients de la série de Fourier de f vérifient $|c_k(f)| \leq \frac{C}{|k|^2}$, la série de Fourier est en fait uniformément convergente et donc converge aussi dans $L^2([-\pi, \pi])$ vers f . Or, par la proposition 3.4, les fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans $[-\pi, \pi]$ sont denses dans $L^2(-\pi, \pi)$. On conclut que le système de Fourier est total, et donc une base hilbertienne. \circ

5.1 Convolution des fonctions périodiques et séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([-\pi, \pi])$ implique qu'on la considère comme une fonction 2π -périodique, puisque la série de Fourier l'est. On note $L_{per}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ qui sont 2π -périodiques. Toute fonction $f \in L^2([-\pi, \pi])$ définit un élément unique de $L_{per}^2(\mathbb{R})$.

Définition 5.1 et proposition Si $f \in L^1([-\pi, \pi])$ et $g \in L^1([-\pi, \pi])$, on prolonge f et g en des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} et on pose $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$. La fonction $f * g$ ainsi définie appartient à $L^1(-\pi, \pi)$ et est 2π -périodique.

Exercice 2 En reprenant l'argument du théorème 3.9, montrer que si $T : L_{per}^2([-\pi, \pi]) \rightarrow C_{per}^0([-\pi, \pi])$ est linéaire, continu et commute avec les translations, alors il existe une fonction $g \in L^2([-\pi, \pi])$ telle que $Tf = g * f$, où "*" désigne la convolution périodique.

Théorème 5.2 Si $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$, alors $f * g$ est continue et $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f)c_n(g)$. De plus, la série de Fourier de $f * g$ converge uniformément vers $f * g$.

Remarquons que la relation précédente montre l'effet régularisant de la convolution : les hautes fréquences de $f * g$ sont plus faibles que celles de f , puisque $c_n(g)$ tend vers zéro.

Démonstration i) On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f * g)(x)| \leq \int |f(x-y)||g(y)|dy \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Donc $f * g$ est majorée et appartient aussi à $L^2(-\pi, \pi)$. On a, en appliquant plusieurs fois le théorème de Fubini (les intégrales se font sur $[-\pi, \pi]$ ou, indifféremment, sur n'importe quel intervalle de longueur 2π) :

$$\begin{aligned} c_n(f * g) &= \frac{1}{2\pi} \int \int f(x-y)g(y)e^{-int} dy dx = \frac{1}{2\pi} \int \int f(x-y)e^{-in(x-y)} g(y)e^{-iny} dy dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int g(y)e^{-iny} dy \right) \left(\int f(u)e^{-inu} du \right) = 2\pi c_n(f)c_n(g). \end{aligned}$$

Le terme général de la série de Fourier de $f * g$ vérifie

$$|c_n(f * g)e^{inx}| = |c_n(f)||c_n(g)| \leq |c_n(f)|^2 + |c_n(f)|^2.$$

Cette dernière série est convergente. La série de Fourier de $f * g$, $F_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n(f * g)e^{inx}$, est donc uniformément convergente. Sa F limite est donc continue. Donc d'une part F_N tend vers $f * g$ dans L^2 et donc par la réciproque du théorème de Lebesgue une sous-suite tend vers cette fonction presque partout. De l'autre F_N tend uniformément vers F . On en déduit que $f * g = F$ presque partout et on en déduit aussi que $f * g$ est égale presque partout à une fonction continue (et donc peut être appelée continue). ◻

Exercice 3 Transformée de Fourier discrète et transformée inverse.

La transformée de Fourier discrète est l'application de $L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ qui associe à une fonction u la suite de ses coefficients de Fourier $c(f) = (c_k(u))_{k \in \mathbb{Z}}$. la transformée inverse est la série de Fourier associée à $c \in l^2(\mathbb{Z})$, notée

$$S(c)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

On a donc $S(c(f)) = f$, ce qui constitue une *formule d'inversion de Fourier*. Si $a, b \in l^2(\mathbb{Z})$, on note ab le produit terme à terme, défini par $(ab)_k = a_k b_k$.

1) Avec le formalisme précédent, vérifier que $S(ab) = \frac{1}{2\pi} S(a) * S(b)$.

2) Cette formule nous permet de mieux comprendre. La démonstration que nous avons donnée pour le principe de localisation. Considérons le "filtre passe-bas" $b^N \in l^2(\mathbb{Z})$ défini par $b_k^N = 1$ si $|k| \leq N$, $b_k^N = 0$ sinon. Calculer $S(b^N)$.

3) En déduire que la série de Fourier tronquée de f , $s_N f$, est obtenue par convolution 2π -périodique de f avec ce qu'on appelle le noyau de Féjer, $s_N f = h_N * f$, où

$$h_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}}.$$

4) Dessiner le noyau de Féjer. En déduire qu'une coupure brutale des fréquences dépassant un seuil peut faire apparaître des oscillations dans le signal : comparer avec le paragraphe sur le phénomène de Gibbs.

5.1.1 Autres bases de Fourier

Corollaire 5.3 Bases en sinus et en cosinus

i) On pose pour $T > 0$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$, c'est la fréquence de base associée à la période T . Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}} e^{ik\omega t}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

forment une base hilbertienne de $L^2(0, T)$. Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$$

forment également une base hilbertienne de $L^2(0, T)$: c'est en fait la base originale de Fourier !

ii) Il en est de même pour les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$$

La transformée associée à la base en cosinus s'appelle la "transformée en cosinus."

Il y a également une "base en sinus", $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$

Démonstration i) La deuxième base résulte de l'application à la base de Fourier de la remarque générale suivante. Si $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne, alors le système $f_0 = e_0, \dots, f_{2k} = \frac{e_k + e_{-k}}{\sqrt{2}}, f_{2k+1} = \frac{e_k - e_{-k}}{\sqrt{2}}, \dots$ aussi.

ii) Si $f \in L^2(0, T)$, on lui associe la fonction paire \tilde{f} sur $[-T, T]$ qui coïncide avec f sur $[0, T]$. On décompose \tilde{f} sur la base de Fourier de $[-T, T]$. La base de Fourier sur $[-T, T]$ est formée des fonctions $\frac{1}{\sqrt{2T}} e^{\frac{i\pi kt}{T}}$. Donc on a

$\tilde{f}(x) =_{L^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{-\frac{i\pi kt}{T}} dt \right) e^{\frac{i\pi kx}{T}}$. Comme \tilde{f} est paire, on voit en faisant le changement de variables $t \rightarrow -t$ dans les intégrales que les coefficients de $e^{\frac{i\pi kx}{T}}$ et $e^{-\frac{i\pi kx}{T}}$ sont égaux. On remarque aussi que $\int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{\frac{i\pi kt}{T}} dt = 2 \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right) dt$.

Aussi,

$$\tilde{f}(x) =_{L^2} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{f}(t) dt + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{-\frac{i\pi kt}{T}} dt \right) \left(e^{\frac{i\pi kx}{T}} + e^{-\frac{i\pi kx}{T}} \right), \text{ et donc}$$

$f(x) =_{L^2} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{T} \left(\int_0^T f(t) \cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right) dt \right) \cos\left(\frac{\pi kx}{T}\right)$. Comme les fonctions $\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{\pi kx}{T}\right)$ forment un système orthonormé de $L^2(0, T)$, l'égalité précédente exprime qu'elles forment en fait une base hilbertienne.

(iii) Si on prolonge la fonction f en une fonction impaire sur $[-T, T]$ et que l'on reprend le raisonnement précédent, on trouve la base en sinus. Cette base a la propriété, utile pour modéliser les cordes vibrantes, que ses éléments valent 0 aux extrémités de l'intervalle.

◦

Exercice 4 Détailler la preuve de (iii) en vous inspirant de la preuve de (ii).

Remarque : Le résultat ii), relatif à la transformée en cosinus, s'obtient en considérant la série de Fourier du signal pair \tilde{f} obtenu par symétrie par rapport à l'axe des y . Ceci est très important en pratique, car l'introduction de cette symétrie, qui se généralise sans mal au cas des images, permet d'éviter la présence de discontinuités aux frontières du domaine du signal ou de l'image (supposés périodique dans le cadre de la décomposition en séries de Fourier), qui sont à l'origine d'effets de Gibbs (voir le paragraphe 5.4). Ce type de transformée en cosinus est souvent utilisé en compression des images (comme dans le standard JPEG). Un autre avantage de cette décomposition, pour la compression, est présenté ci-dessous.

5.2 Bases de Fourier en dimension 2

Les énoncés qui suivent se généralisent sans changement de démonstration à la dimension N . Nous traitons le cas $N = 2$ pour éviter des indices de sommation inutiles. On pose $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ et on note $k \cdot x = k_1 x_1 + k_2 x_2$ leur produit scalaire.

Lemme 5.2 *Les fonctions à variables séparées, c'est-à-dire de la forme $w(x) = u(x_1)v(x_2)$ avec $u, v \in L^2(0, 2\pi)$ forment un système total de $L^2([0, 2\pi]^2)$.*

Démonstration Les fonctions caractéristiques de rectangles sont à variables séparées et elles forment un système total de $L^2([0, 2\pi]^2)$. \circ

Lemme 5.3 *Si $u_k(x) \rightarrow u(x)$ et $v_l(x) \rightarrow v(x)$ dans $L^2(0, 2\pi)$, alors $u_k(x_1)v_l(x_2) \rightarrow u(x_1)v(x_2)$ dans $L^2([0, 2\pi]^2)$ quand $k, l \rightarrow +\infty$.*

Démonstration On remarque que par le théorème de Fubini,

$$\|u(x_1)v(x_2)\|_{L^2([0, 2\pi]^2)} = \|u(x_1)\|_{L^2([0, 2\pi])} \|v(x_2)\|_{L^2([0, 2\pi])}.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|u_k(x_1)v_l(x_2) - u(x_1)v(x_2)\|_{L^2([0, 2\pi]^2)} &\leq \|(u_k - u)v_l\|_{L^2([0, 2\pi]^2)} + \|u(v_l - v)\|_{L^2([0, 2\pi]^2)} = \\ &\|u_k - u\|_{L^2([0, 2\pi])} \|v_l\|_{L^2([0, 2\pi])} + \|u\|_{L^2([0, 2\pi])} \|v_l - v\|_{L^2([0, 2\pi])}. \end{aligned}$$

Les deux termes de droite tendent vers zéro quand $k, l \rightarrow +\infty$. \circ

Théorème 5.3 *Les fonctions $e_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ik \cdot x}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, forment une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi]^2)$ et on a donc pour toute fonction $u \in L^2([0, 2\pi]^2)$,*

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k(u) e^{ik \cdot x}, \text{ avec } c_k(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0, 2\pi]^2} u(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad (5.2)$$

la convergence de la série se vérifiant au sens de L^2 .

Démonstration On vérifie facilement que e_k est un système orthonormé. Pour montrer qu'il est total, il suffit de montrer, par le lemme 5.2, que les e_k engendrent les fonctions séparables. Mais si $w(x) = u(x_1)v(x_2) \in L^2([0, 2\pi]^2)$ est une telle fonction, par une application directe du théorème de Fubini, $u(x_1)$ et $v(x_2)$ sont dans $L^2(0, 2\pi)$. Les fonctions u et v sont donc sommes au sens L^2 de leurs séries de Fourier :

$$u(x_1) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} c_{k_1} e^{ik_1 x_1}, \quad c_{k_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} u(x_1) e^{-ik_1 x_1};$$

$$v(x_2) = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_2} e^{ik_2 x_2}, \quad c_{k_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} v(x_2) e^{-ik_2 x_2}.$$

En appliquant le lemme 5.3 à $u_N(x_1) = \sum_{-N}^N c_{k_1}(u) e^{ik_1 x_1}$ et $v_M(x_2) = \sum_{-M}^M c_{k_2}(v) e^{ik_2 x_2}$ qui convergent respectivement vers $u(x_1)$ et $v(x_2)$ dans $L^2([0, 2\pi])$, on obtient une série double convergente dans $L^2([0, 2\pi]^2)$. On obtient donc (5.2) dans le cas d'une fonction séparable $w(x) = u(x_1)v(x_2)$ avec $c_k(w) = c_{k_1}(u)c_{k_2}(v)$. Il en résulte que le système $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi]^2)$ et (5.2) est donc valide. \circ

5.3 Décroissance des coefficients de Fourier et problèmes de compression du signal

On s'intéresse au comportement des coefficients de Fourier quand la 2π -périodisée de f est C^1, C^2 , etc... Si f est C^p et 2π -périodique, en intégrant par parties p fois sur $[0, 2\pi]$,

$$c_n(f) = \int e^{-inx} f(x) dx = \frac{1}{(in)^p} \int e^{-inx} f^{(p)}(x) dx.$$

Donc, les coefficients décroissent d'autant plus vite que f est plus régulière.

Si maintenant f présente un saut en 0, on montre que si f est C^1 sur $[0, 2\pi]$ mais pas 2π -périodique, alors $c_n(f) = O(\frac{1}{n})$. Plus précisément, si nous notons $f(0^+)$ la valeur en 0 par la droite et $f(2\pi^-)$ la valeur en 2π par la gauche

$$c_n(f) = \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f'(x) dx + \frac{f(0^+) - f(2\pi^-)}{in}.$$

Or on montre (par le lemme de Riemann-Lebesgue) que le premier terme est $o(\frac{1}{n})$. On sait que $\sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} = O(\frac{1}{N})$, et la décroissance des coefficients de Fourier de la fonction est donc très lente (1000 termes pour une précision de 10^{-3}), dès que la fonction présente une discontinuité.

En ce qui concerne les coefficients de Fourier $c_{k,l}$ d'une "image", c'est-à-dire une fonction $f(x, y)$ définie sur un carré $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, C^1 , mais pas $2\pi \times 2\pi$ -périodique, le résultat est identique. On montre que $c_{n,m} = O(\frac{1}{nm})$ et le reste (pour la norme L^2) de la série double est donc en $O(\frac{1}{nm})$. Donc, pour une précision de 10^{-3} , il faut encore 1000 termes.

Une bonne alternative lorsque la fonction présente une discontinuité du type précédent consiste à utiliser la transformée en cosinus : $c_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) f(x) dx$. On a, en intégrant par parties et en remarquant que $\sin(nx)$ s'annule en 0 et 2π ,

$$c_n(f) = \frac{1}{i\pi n} \int_0^{2\pi} \sin(nx) f'(x) dx.$$

On a $c_n(f) = o(\frac{1}{n})$ par le lemme de Riemann-Lebesgue. Les coefficients de Fourier “en cosinus” décroissent donc plus vite qu’avec la transformée de Fourier classique et on peut donc en transmettre moins pour une qualité d’image égale. Pour transmettre une image, on la découpe en petits carrés et on transmet une partie des coefficients de Fourier de chaque imagerie (principe utilisée par le standard JPEG). On augmente ainsi la probabilité qu’une imagerie présente une couleur homogène et soit donc régulière. L’utilisation de la transformée en cosinus permet donc de comprimer l’information dans les sous-carrés de l’image où celle-ci est régulière. Par contre, les calculs précédents prouvent qu’on ne gagne rien quand un “bord” est présent dans l’imagerie. En effet, un calcul du même type que ci-dessus implique que les coefficients $c_{n,0}(f)$ décroissent en $O(\frac{1}{n})$. C’est ce qui explique les phénomènes de “halo” autour des objets sur un fond contrasté : le petit nombre de coefficients transmis ne suffit pas à approcher bien l’imagerie. Nous verrons au paragraphe 5.4 qu’il y a plus grave : le phénomène de Gibbs (voir la figure 5.2). Le long des discontinuités de l’image, apparaissent toujours des oscillations résiduelles, quel que soit le nombre de coefficients transmis.

En conclusion, la transformée en cosinus, s’affranchissant des discontinuités aux frontières du domaine de l’image, présente un double avantage sur la transformée de Fourier. En termes d’économie de la représentation, elle tire mieux partie de l’éventuelle régularité de la fonction à l’intérieur de son domaine (régularité souvent élevée dans le cas d’images). De plus, elle évite l’apparition d’oscillations résiduelles le long de ces frontières.

5.4 Phénomène de Gibbs

La représentation d’un signal par sa série de Fourier conduit à l’apparition d’oscillations résiduelles, dont l’amplitude ne dépend pas du nombre de coefficients utilisés pour représenter la fonction. Ce résultat mathématique sur l’approximation d’un signal par les sommes partielles de sa série de Fourier porte le nom de phénomène de Gibbs. Ce phénomène est observé à la sortie de tout système physique ou numérique mesurant ou calculant une fonction f . Si la fonction $f(t)$ (t désignant par exemple le temps) “saute” brusquement d’une valeur à une autre, alors l’expérimentateur observe une série d’oscillations avant et après le saut. Il se gardera bien de les interpréter comme faisant partie du signal. En effet, le phénomène est dû au fait que les appareils de mesure (et les programmes numériques sur ordinateur) “tronquent” nécessairement les hautes fréquences. Cela veut aussi dire que l’on n’observe jamais les fonctions elles-mêmes, mais des sommes partielles de leur série de Fourier. Et on observe donc aussi les “parasites” dus à cette troncature en fréquence ; en particulier, le phénomène de Gibbs. Du point de vue mathématique, on peut énoncer le phénomène comme suit : “ Si une fonction f , par ailleurs régulière, présente un saut en un point, alors les sommes partielles $s_N f$ de sa série de Fourier accentuent ce saut en le multipliant par un facteur qui ne dépend pas de N .”

On commence par donner le résultat précis dans un cas simple : on considère la fonction “en dents de scie” $s(x)$, 2π -périodique et telle que $s(x) = \frac{\pi-x}{2}$ sur $]0, 2\pi[$. Le calcul des coefficients de Fourier de s et le corollaire 5.2 montrent que $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ au sens de la convergence L^2 , ainsi qu’en tout point de l’intervalle ouvert $]0, 2\pi[$, d’après la proposition 5.1. On considère les sommes partielles de cette série de Fourier, $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.

Proposition 5.2 (Phénomène de Gibbs) :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, x \rightarrow 0^+} s_n(x) = (1+c)s(0^+); \quad \liminf_{n \rightarrow \infty, x \rightarrow 0^+} s_n(x) = (1-c')s(0^+). \quad (5.3)$$

Démonstration On va étudier la suite $s_n(\frac{\pi}{n})$ quand $n \rightarrow \infty$. On commence par étudier les variations de $G(a) =: \int_0^a \frac{\sin(t)}{t} dt$ pour en déduire que $G(\pi) > G(+\infty)$. La fonction $G(a)$ est croissante sur les intervalles pairs $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ et décroissante sur les intervalles impairs. On voit aisément que $|G((n+1)\pi) - G(n\pi)|$ est une suite décroissante. Il en résulte que la suite $G(2n\pi)$ est une suite croissante strictement, la suite $G((2n+1)\pi)$ une suite strictement décroissante, et les deux convergent vers une valeur commune notée $G(+\infty)$. On a donc $G(\pi) > G(+\infty)$. On sait par ailleurs que $G(+\infty) = \frac{\pi}{2}$. Revenons à la suite $s_n(\frac{\pi}{n})$. On a

$$s_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{k} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\frac{k\pi}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du.$$

La dernière limite vient du fait que l'on reconnaît la somme de Riemann associée à l'intégrale. Mais

$$s_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow G(\pi) > G(+\infty) = \frac{\pi}{2} = s(0^+),$$

car $s(0^+) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$. Donc pour tout n , il y a une valeur très proche de 0, en l'occurrence $\frac{\pi}{n}$, telle que la somme partielle de la série de Fourier dépasse d'un facteur constant $\frac{G(\pi)}{G(+\infty)}$ la valeur de la limite $s(0^+)$. Pour raisons de symétrie, la même chose se produit en 0^- avec la suite $s_n(-\frac{\pi}{n})$. Nous avons donc montré l'existence des limites sup et inf de l'équation (5.3). \circ

Exercice 5 On peut préciser un peu plus le résultat précédent en donnant le comportement asymptotique de $s_n(x)$ au voisinage de 0, ce qui permet de tracer les oscillations de s_n au voisinage de la discontinuité. Montrer que pour $|x| \leq 1$ et uniformément en x ,

$$s_n(x) = \int_0^x \frac{\sin(nt)}{t} dt - \frac{x}{2} + O\left(x, \frac{1}{n}\right).$$

Numériquement, les constantes positives c et c' sont de l'ordre de 0,18. Plus précisément, la somme partielle s_n de la série de Fourier de f présente des oscillations, maximales aux points $\frac{k\pi}{n}$. Les oscillations de cette approximation ont donc une fréquence de plus en plus élevée avec l'ordre d'approximation n , mais l'erreur reste proportionnelle au saut de la fonction f . Ce résultat se généralise au cas d'une fonction C^1 sur $[0, 2\pi]$, mais pas 2π périodique. Pour ce faire, on soustrait à la fonction f une fonction en "dents de scie" $\lambda s + \mu = \tilde{s}$, où λ et μ ont été choisis de manière à la rendre Lipschitzienne et on applique à la différence $f - \tilde{s}$ le principe de localisation. Il y a donc convergence uniforme de la série de Fourier de $f - \tilde{s}$ vers $f - \tilde{s}$, alors que la série de Fourier de \tilde{s} présente le phénomène de Gibbs. Le développement de Fourier de f présente donc aussi le phénomène de Gibbs.

Nous illustrons, à la figure 5.1, le phénomène dans le cas de la fonction 2π -périodique, impaire, et valant 1 sur l'intervalle $]0, \pi]$. Nous montrons les sommes partielles de sa série de Fourier. Remarquons en particulier le fait que l'erreur maximum ne varie pas avec le nombre de coefficients de l'approximation. En revanche, la fréquence de ces oscillations augmente avec l'ordre d'approximation. Nous présentons ensuite une illustration du phénomène de Gibbs dans le cas des images numériques : partant d'une image, nous calculons sa série de Fourier (en fait une approximation finie de cette série présentée au paragraphe suivant : la transformée de Fourier discrète), mettons les hautes fréquences à zéro, puis calculons l'image dont la série de Fourier est celle ainsi obtenue (anticipant sur les définitions et notations du paragraphe suivant sur la transformée de Fourier discrète, nous multiplions l'image \tilde{u}_{mn} par la fonction

indicatrice d'un carré centré sur $\tilde{u}_{0,0}$, puis appliquons la TFD inverse). Nous montrons le résultat figure 5.2, où l'image originale est placée à gauche. Le résultat, image obtenue après troncature des hautes fréquences, à droite, présente de très nombreuses oscillations.

Ce phénomène apparaît également lorsque le spectre est utilisé à des fins de manipulation d'image, comme nous le verrons au chapitre suivant.

5.5 Note historique

5.5.1 Gammes, harmoniques

L'audition humaine va de 25 Hz à 20000 Hz (chez l'enfant). Le piano (voir le site <http://fr.wikipedia.org/wiki/Fréquencesdestouchesdupiano>) de 27,5 Hz à 4186 Hz, note la plus aigüe, pour 88 touches.

Sur les harmoniques et la gamme naturelle :

Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Gamme_naturelle

Un harmonique est l'élément de décomposition primaire d'une fonction périodique exprimé dans la base de Hilbert.

En d'autres termes, un harmonique correspond à une fonction trigonométrique sinusoidale (sinus ou cosinus) dont la fréquence est un multiple de la fréquence de la fonction périodique décomposée. La somme infinie de tous les harmoniques d'une fonction périodique reconstitue la fonction.

Comme un signal périodique peut se décomposer en une somme de sinus et cosinus dont les fréquences sont des multiples de la fréquence du signal (dite fréquence fondamentale), le << poids >> de certains harmoniques dans la décomposition spectrale d'un son correspond au module de leur coefficient harmonique dans le plan complexe.

Le son le plus simple acoustiquement parlant n'a qu'un harmonique, la fréquence fondamentale, les autres harmoniques ayant un module nul. C'est donc une sinusoïde, mais sa phase dépend de la répartition entre la partie réelle (cosinus) et imaginaire (sinus) de l'harmonique, autrement dit de son argument complexe.

Il y d'abord la gamme musicale fondée sur le choix d'harmoniques simples du son fondamental (ou tonique). Du fait de cette définition, on parle aussi de gamme des physiciens.

Il ne fait pas de doute que les phénomènes de consonance ont été identifiés par les premiers musiciens avant que les mathématiciens n'en élaborent une théorie. Les premières gammes naturelles, créées de façon empirique, ont donc certainement précédé de très longtemps la gamme pythagoricienne, édifice algébrique assez complexe.

La gamme pythagoricienne est construite à partir d'un harmonique particulier, la quinte, puis par des montées successives de quintes le nombre de fois nécessaires pour parcourir une octave complète.

Il est à remarquer que les sons obtenus par cette méthode sont des harmoniques de plus en plus complexes du son fondamental. On a vu aussi que cette méthode ne permet pas de retrouver directement la quarte qui est pourtant un harmonique très simple (4/3) de celle-ci (et complément obligatoire de la quinte).

La gamme pythagoricienne, d'ailleurs, résultat de spéculations théoriques remarquables, n'est pas sans défauts :

** le problème du comma, résolu faute de mieux par la << quinte du Loup >>, interdit certaines combinaisons de notes et certaines modulations ; * certains intervalles très intuitifs, et particulièrement la tierce majeure (DO-MI) ne sont pas générés de façon parfaite, et sonnent, en réalité, assez faux.*

D'où les tentatives des théoriciens pour mettre en uvre d'autres méthodes, basées sur d'autres considérations.

Les sons harmoniques ou partiels

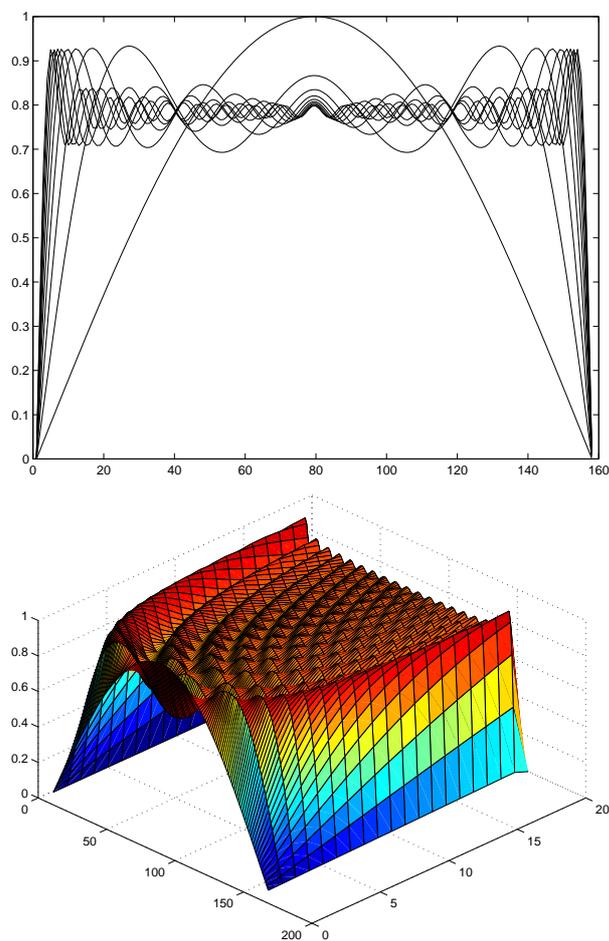


FIGURE 5.1 – Sommes partielles de la série de Fourier de la fonction 2π -périodique, impaire, valant 1 sur $]0, \pi]$. Haut : les approximations sont représentées sur le même graphe, sur l'intervalle $]0, \pi]$. Bas : les différentes approximations sont tracées selon un troisième axe (nombre de termes entre 1 et 20). On remarque que l'erreur maximale d'approximation ne varie pas avec le nombre de termes, tandis que la fréquence des oscillations augmente.



FIGURE 5.2 – Illustration de l'effet de Gibbs. Gauche : l'image originale; droite : l'image après que l'on ait tronqué ses hautes fréquences, et sur laquelle sont visibles de nombreuses oscillations. L'image de droite est obtenue en ne conservant que les fréquences dont le module est inférieur au quart de la fréquence maximale. Le phénomène est particulièrement visible le long des frontières du domaine de l'image (voir en particulier le côté droit) et le long des discontinuités de l'image. Remarquons que l'image est également devenue floue par suppression des hautes fréquences.

Un son musical invariable continu résulte de la superposition (ou combinaison) d'un son simple et de ses sons harmoniques dont les fréquences sont des multiples entiers de sa propre fréquence. On appelle le seconde harmonique le son de fréquence double, troisième le son de fréquence triple etc. On appelle sons partiels des sons plus aigus que l'on peut entendre ou extraire par analyse lorsqu'un instrument émet un son, et qui sont très proches des sons harmoniques.

Si l'on part du DO 0 en prenant sa fréquence comme unité :

- partiel 1 : fréquence 1 (=DO 0)
- partiel 2 : fréquence 2 (=DO 1)
- partiel 3 : fréquence 3 (=SOL 1)
- partiel 4 : fréquence 4 (=DO 2)
- partiel 5 : fréquence 5 (=MI 2, tierce pure)
- partiel 6 : fréquence 6 (=SOL 2)
- partiel 7 : fréquence 7
- partiel 8 : fréquence 8 (=DO 3)
- partiel 9 : fréquence 9 (=RE 3)
- partiel 10 : fréquence 10 (=MI 3, tierce pure)
- partiel 11 : fréquence 11
- partiel 12 : fréquence 12 (=SOL 3)
- partiel 13 : fréquence 13
- partiel 14 : fréquence 14
- partiel 15 : fréquence 15
- partiel 16 : fréquence 16 (=DO 4)
- etc.

Les noms des notes ci-dessus correspondent aux hauteurs définies dans la gamme de Pythagore sauf pour les MI. Comme on le voit, la note SOL est un harmonique de la note DO, mais pas de celle qui la précède dans son octave : DO 0 pour SOL 1, DO 1 pour SOL 2 etc. Donc l'intervalle de quinte (rapport $3/2$) relie deux notes DO 1 et SOL 1 par exemple dont la plus aiguë n'est pas un harmonique de la plus grave ; cependant les deux sont des harmoniques d'une même troisième note plus grave. C'est donc par un abus de langage, qu'autorise le principe de l'équivalence des octaves, que l'on peut énoncer que SOL est un harmonique de DO. C'est aussi par commodité que, de même, on considèrera dans ce qui suit comme en rapport harmonique des sons dont les fréquences relatives sont en rapport rationnel l'une par rapport à l'autre : il existe alors une note suffisamment grave (mais peut-être inaudible !) dont elles sont toutes deux de vrais partiels.

5.5.2 Séries trigonométriques

NOTE HISTORIQUE (WIKIPEDIA)

Les premières considérations sur les séries trigonométriques apparaissent vers 1400 en Inde, chez Madhava, chef de file de l'école du Kerala[1]. En Occident, elles apparaissent au XVIIe siècle chez James Gregory, au début du XVIIIe chez Brook Taylor. C'est l'ouvrage de ce dernier, *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, paru en 1715, qui donne le coup d'envoi à l'étude systématique des cordes vibrantes et de la propagation du son, thème de recherche majeur pendant tout le siècle.

Une controverse éclate dans les années 1750 entre d'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli sur le problème des cordes vibrantes. D'Alembert détermine l'équation d'onde et ses solutions analytiques. Bernoulli les obtient également, sous forme de décomposition en série trigonométrique. La controverse porte sur la nécessité de concilier ces points de vue avec les questions de régularité des solutions. Selon J.-P. Kahane[2], elle aura un rôle majeur dans la genèse des séries de Fourier.

Bernoulli avait introduit des séries trigonométriques dans le problème des cordes vibrantes pour superposer des solutions élémentaires. Le trait de génie de Joseph Fourier est de considérer cette décomposition comme un outil systématique d'analyse. Il en fait usage en 1822 pour résoudre l'équation de la chaleur dans son ouvrage *Théorie analytique de la chaleur*.

Fourier énoncé qu'une fonction arbitraire peut être décomposée sous forme de série trigonométrique, et qu'il est facile de prouver la convergence de celle-ci. Dans un article de 1829, Dirichlet donne un premier énoncé correct, et correctement démontré de convergence, mais, faute d'une théorie de l'intégration adaptée, il se limite à une classe très particulière de fonctions.

Avancée conjointe des séries de Fourier et de l'analyse réelle

Le *Mémoire sur les séries trigonométriques* de Riemann, publié en 1867, constitue une avancée décisive. L'auteur lève un obstacle majeur en définissant pour la première fois une théorie de l'intégration satisfaisante. Il démontre notamment que les coefficients de Fourier ont une limite nulle à l'infini, et un résultat de convergence connu comme le théorème de sommabilité de Riemann.

Georg Cantor publie une série d'articles sur les séries trigonométriques entre 1870 et 1872, où il démontre son théorème d'unicité. Cantor raffine ses résultats en recherchant des "ensembles d'unicité", pour lesquels son théorème reste vérifié. C'est l'origine de l'introduction de la théorie des ensembles.

En 1873 Du Bois-Reymond donne le premier exemple de fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge en un point. Le dernier quart du XIXe siècle voit relativement peu d'avancées dans le domaine des séries de Fourier ou de l'analyse réelle en général, alors que l'analyse complexe connaît une progression rapide.

Dans un note de 1900[3], Fejér démontre son théorème de convergence uniforme utilisant le procédé de sommation de Cesàro. Surtout, il dégage un principe nouveau : l'association systématique entre régularisation au moyen d'un << noyau >> et procédé de sommation pour la série de Fourier.

5.6 Exercices

Exercice 6

1) Soit $(s_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que $s_n \rightarrow s$. Montrer que

$$\frac{1}{n+1} \sum_0^n s_j \rightarrow s.$$

2) Montrer qu'il existe $(s_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que $(s_n)_n$ ne converge pas et

$$\frac{1}{n+1} \sum_0^n s_j \text{ converge.}$$

Exercice 7

On note $\mathcal{C}(\mathbb{I}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), 2\pi\text{-périodiques}\}$, que l'on munit de $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$. On notera $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |f(t)| dt$. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$, on définit les coefficients de Fourier de f par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On note

$$S_n(f, t) = \sum_{-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ et}$$

$$\sigma_n(f, t) = \frac{1}{n+1} \sum_0^n S_j(f, t).$$

1) On pose $D_N(t) = \sum_{-N}^N e^{ikt}$ et $K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_0^N D_j(t)$, pour $N \in \mathbb{N}$.

Montrer que

$$D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad t \neq 0, \quad D_N(0) = 2N + 1,$$

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2, \quad t \neq 0, \quad K_N(0) = N + 1.$$

2) Vérifier que $K_N(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \|K_N\|_1 = 1$ et que $\forall \delta > 0, K_N \rightarrow 0$ uniformément sur $\delta \leq |t| \leq \pi$.

3) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}), \sigma_n(f) \rightarrow f$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$. (Remarquer que $\sigma_n(f, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) K_n(t-x) dx = K_n \star f(t) = f \star K_n(t)$.)

4) On appelle polynôme trigonométrique, toute fonction de la forme $\sum_{-n}^n a_k e^{ikt}$.

En déduire que les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ et que si $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ alors $f = g$.

5) Théorème de Du Bois-Reymond :

$\exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ telle que $\limsup |S_n(f, 0)| = +\infty$.

Pour démontrer ce résultat, on définit $\Lambda_n : \mathcal{C}(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\Lambda_n(f) = S_n(f, 0)$.

a) Vérifier que $\Lambda_n \in (\mathcal{C}(\mathbb{I}))'$.

b) Montrer que $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$.

c) Montrer que $\|D_n\|_1 \rightarrow +\infty$ (par exemple : $\|D_n\|_1$ est plus grand que la somme partielle d'une série divergente.)

d) En déduire que $\exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ telle que $\sup_n |S_n(f, 0)| = +\infty$.

6) Soit $f \in L^1(-\pi, \pi)$ telle que $\int_{-\pi}^\pi f(x) p(x) dx = 0$ pour tout polynôme p trigonométrique, vérifier que $f = 0$ p.p.

7) Soit $f \in L^1(-\pi, \pi)$, on note $c(f) = (\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Vérifier que

$$c(f) \in C_0(\mathbb{Z}) = \{c = (c_n)_n : c_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \pm\infty\}.$$

Montrer que l'application $T : L^1(-\pi, \pi) \rightarrow C_0(\mathbb{Z})$ définie par $T(f) = (\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est linéaire continue injective mais non surjective.

Exercices, séries de Fourier

Exercice 8 $L_{per}^2(\mathbb{R}^N)$ désigne l'espace des fonctions $2\pi \times \dots \times 2\pi$ périodiques appartenant à $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$, muni de la norme $\|u\|_{per} = \int_{[0, 2\pi]^N} |u|^2(x) dx$.

1) Est-ce bien un espace de Hilbert ?

2) Montrer que tout opérateur invariant par translation et continu de $L_{per}^2(\mathbb{R}^N)$ dans $C_{per}^0(\mathbb{R}^N)$ peut s'écrire sous la forme $Tf = g * f$, où $g \in L^2([0, 2\pi]^N)$ et “*” désigne la convolution $2\pi \times \dots \times 2\pi$ périodique.

Exercice 9 Soient f, g dans $L_{per}^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer par un argument de densité, sans utiliser la transformée de Fourier, que $f * g$ est continue et périodique.

Exercice 10 Etudier les variations du noyau de Dirichlet, $h_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{inx}$. Le dessiner. Montrer qu'il est d'intégrale 1 sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 11 Montrer que la base en sinus $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right)$, $k = 1, 2, \dots$ est bien une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$. On commencera par étendre $u \in L^2(0, 2\pi)$ en une fonction impaire sur $[-2\pi, 2\pi]$, puis on utilisera la base de Fourier standard de $L^2(-2\pi, 2\pi)$.

Exercice 12 Montrer que si $u_k \rightarrow u$ et $v_k \rightarrow v$ dans $L^2(0, 2\pi)$, alors $u_k(x_1)v_k(x_2) \rightarrow u(x_1)v(x_2)$ dans $L^2([0, 2\pi]^2)$.

Chapitre 6

Le cas discret

6.1 Transformée de Fourier Discrète, applications

6.1.1 La dimension 1

La transformée de Fourier discrète est un moyen de calculer les coefficients de Fourier d'une fonction a -périodique u à partir de ses N échantillons $u(\frac{ka}{N})$, $k = 0, \dots, N-1$. Cela n'est possible que si la fonction présente un nombre de fréquences inférieur ou égal à N . Pour coller à la pratique numérique, nous supposerons toujours dans ce chapitre que N est pair. En général, N est une puissance de 2. Tous les résultats énoncés (sauf ceux du paragraphe 6.1.6 relatifs à la transformée de Fourier rapide) s'adaptent toutefois sans difficulté au cas N impair. Soit $u(x)$ une fonction réelle ou complexe de période a , et N un entier pair. On cherche un polynôme trigonométrique de la forme

$$P(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{a}\right), \quad (6.1)$$

qui soit égal à u aux points $\frac{ka}{N}$ pour $k = 0, \dots, N-1$. On dira dans la suite que P est de degré $\frac{N}{2}$. Le but est donc d'interpoler les échantillons $u(\frac{ka}{N}) = u_k$.

Pourquoi choisir un polynôme trigonométrique ? La raison est physique : tous les dispositifs d'acquisition de signaux (sons) ou images ont une *bande passante*, c'est-à-dire un intervalle de fréquences captées par le dispositif d'enregistrement ; les autres fréquences sont perdues ou tellement atténuées qu'on les néglige : on suppose donc ici que la "bande passante" est contenue dans l'intervalle $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$. Il n'y a par contre aucune raison de supposer que le signal ou l'image soit périodique, et en plus d'une période qui coïncide avec la fenêtre d'observation $[0, a]$ comme nous sommes en train de le supposer pour P . Cette hypothèse est donc imposée à la donnée par une périodisation abusive, et provoque une distorsion près des bords de l'image que l'on peut voir et évaluer : c'est le phénomène de Gibbs. Si la fonction u dont on possède les N échantillons n'avait pas une bande de fréquence contenue dans $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$, son interpolation par un polynôme trigonométrique de degré $\frac{N}{2}$ provoque une autre distorsion, très grave, que nous allons évaluer précisément dans ce chapitre : l'aliasage. On va commencer par calculer les coefficients de P .

Exercice 1 On pose $\omega_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$, racine N -ième de l'unité. Montrer que $\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^k = 0$, puis que $\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kl} = 0$ pour $l \neq 0$ modulo N et finalement que pour tout k_0 , $\sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} \omega_N^{kl} = 0$ pour tout $l \neq 0$ modulo N .

Définition 6.1 On pose $u_k = u\left(\frac{ka}{N}\right)$ et, pour $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$,

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl}. \quad (6.2)$$

Les N coefficients \tilde{u}_n sont appelés transformée de Fourier discrète (TFD) des N échantillons u_k . On appelle transformée de Fourier discrète inverse l'application de \mathbb{C}^N dans lui-même définie par

$$u_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{kn}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (6.3)$$

Proposition 6.1 Les coefficients (\tilde{u}_n) définis par (6.2) sont les uniques coefficients tels que le polynôme trigonométrique (6.1) vérifie $P\left(\frac{ka}{N}\right) = u_k$, pour tout $k = 0, \dots, N-1$. En d'autres termes, la transformée de Fourier discrète composée avec son inverse donne bien l'identité.

Démonstration Pour $k = 0, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{ka}{N}\right) &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl} \right) \omega_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \left(\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \omega_N^{nk-nl} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} N \delta(k-l) u_l = u_k, \end{aligned}$$

où on a noté δ la fonction définie sur les entiers, valant 1 en 0, et 0 ailleurs. L'unicité provient du fait que toute application linéaire surjective de \mathbb{C}^N dans lui-même est aussi injective. \circ

Corollaire 6.1 Si u est un polynôme trigonométrique $u(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{a}\right)$, les coefficients \tilde{u}_n sont obtenus à partir des échantillons de u par la formule (6.2). Ce sont les coefficients de Fourier de u .

Exercice 2 On note u un vecteur de \mathbb{C}^N et $\text{TFD}(u) = \tilde{u}$ sa transformée de Fourier discrète. Vérifier que \sqrt{N} TFD est unitaire et calculer TFD^{-1} grâce à la formule $\text{TFD}^{-1} = N {}^t\overline{\text{TFD}}$.

On rappelle d'autre part que si $u \in L^2(0, a)$, les coefficients de la série de Fourier de u sont définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par

$$c_n(u) = \frac{1}{a} \int_0^a u(x) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{a}\right). \quad (6.4)$$

Les coefficients \tilde{u}_n de la transformée de Fourier discrète sont approchés par les termes de la TFD de (u_k) au sens suivant :

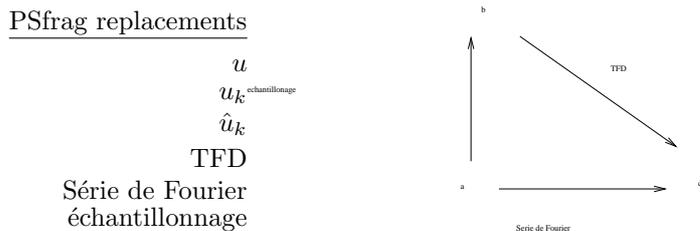


FIGURE 6.1 – La TFD après échantillonnage calcule bien les coefficients de Fourier **si la fonction u est un polynôme trigonométrique** (corollaire 6.1)

Proposition 6.2 *Soit u continue et a -périodique. Alors les \tilde{u}_n sont des approximations des $c_n(u)$ par la formule des trapèzes, pour $n = \frac{-N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.*

Démonstration Il suffit d’écrire l’approximation de l’intégrale (6.4) par la méthode des trapèzes en tenant compte du fait que $u(a) = u(0)$ pour une fonction a -périodique. \circ

Proposition 6.3 *On suppose que les échantillons u_k sont réels. Alors \tilde{u}_0 et $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}}$ sont réels, et pour $k = 1 \dots \frac{N}{2} - 1$, $\tilde{u}_k = \overline{\tilde{u}_{-k}}$.*

Démonstration $\tilde{u}_0 = \frac{1}{N} \sum_k u_k$, et $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum (-1)^k u_k$; ces deux coefficients sont donc réels. D’autre part

$$\tilde{u}_{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \overline{\omega_N^{-nk}} = \overline{\tilde{u}_n}.$$

\circ

Remarquons le rôle particulier joué par le terme $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}}$, qui n’a pas de terme conjugué lui correspondant.

Proposition 6.4 *si u est un polynôme trigonométrique réel dont les fréquences sont parmi $-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$, le terme $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}}$ est nul.*

Démonstration En effet, en regroupant les termes conjugués, on a, pour le polynôme trigonométrique P dont les coefficients sont les \tilde{u}_n :

$$P(x) = \tilde{u}_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} (\tilde{u}_n e^{\frac{2in\pi x}{a}} + \tilde{u}_{-n} e^{-\frac{2in\pi x}{a}}) + \tilde{u}_{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{iN\pi x}{a}}.$$

Tous les termes de la somme sont réels sauf le dernier, qui ne l’est que si $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}} = 0$. \circ

La Figure 6.2 montre un exemple de signal (représentant le son A) et le module de sa TFD.

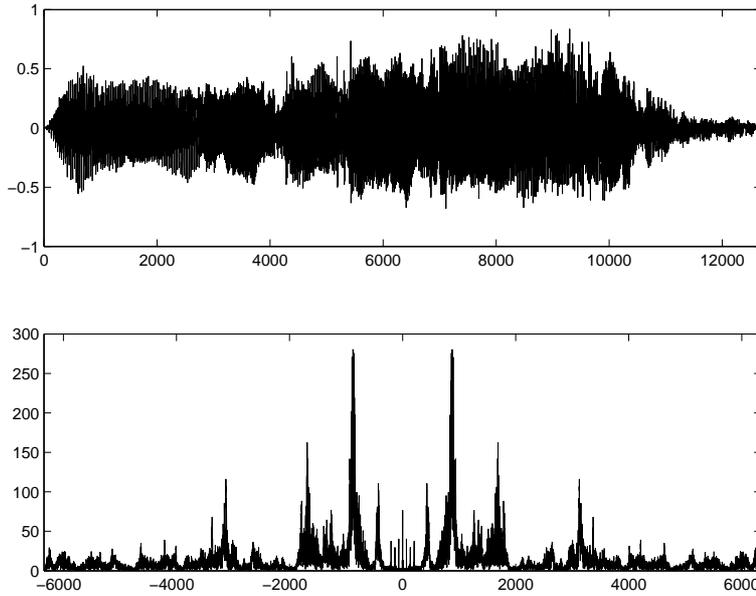


FIGURE 6.2 – Haut : un signal correspondant à la voyelle "Ah" (le signal représente la pression de l'air en fonction du temps); bas : module de la TFD (coefficients $|\tilde{u}|$, voir le texte). On remarque que le module du spectre est symétrique, et qu'il existe trois pics importants correspondant aux fréquences dominantes.

6.1.2 La dimension 2

On considère un réel a , une fonction u de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , telle que $u(x+a, y+a) = u(x, y)$. On fixe à nouveau un entier N , et l'on pose $u_{k,l} = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$. On définit la TFD des $u_{k,l}$ comme la suite des coefficients, pour $m, n \in \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\}$,

$$\tilde{u}_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} u_{k,l} \omega_N^{-mk} \omega_N^{-nl}. \quad (6.5)$$

Exercice 3 Montrer que la transformation ainsi définie est "séparable", c'est-à-dire que le passage des $u_{k,l}$ aux $\tilde{u}_{m,n}$ s'effectue par deux TFDs à une dimension successives.

De même qu'en dimension 1, nous avons la propriété d'interpolation suivante :

Proposition 6.5 Soient les coefficients $\tilde{u}_{m,n}$ définis, pour $m, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$, par (6.5). Considérons le polynôme trigonométrique

$$P(x, y) = \sum_{m, n = -\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_{m,n} \exp\left(\frac{2i\pi mx}{a}\right) \exp\left(\frac{2i\pi ny}{a}\right).$$

Les coefficients $\tilde{u}_{m,n}$ sont les seuls nombres complexes tels que, pour tout $k, l \in \{0, \dots, N-1\}$, on ait $P\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right) = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$. Par conséquent, la transformée discrète inverse de $u_{k,l} \rightarrow \tilde{u}_{m,n}$ est donnée par le calcul du polynôme aux échantillons $\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$, $0 \leq k, l \leq N-1$:

$$u(k, l) = P\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right) = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_{m,n} \omega_N^{km+ln}.$$

Exercice 4 Montrer la proposition précédente. Le calcul est exactement le même qu'en dimension 1. De même qu'en dimension 1, nous pouvons identifier un certain nombre de symétries des $\tilde{u}_{m,n}$ si l'image est à valeurs réelles. On suppose à nouveau que N est pair. Montrer également la proposition suivante.

Proposition 6.6 *Supposons que les échantillons $u_{k,l}$ soient réels. Alors les coefficients $\tilde{u}_{0,0}$, $\tilde{u}_{0,-\frac{N}{2}}$, $\tilde{u}_{-\frac{N}{2},0}$, et $\tilde{u}_{-\frac{N}{2},-\frac{N}{2}}$ sont réels; de plus*

$$\forall m, n \in \left\{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\} \quad \tilde{u}_{m,n} = \overline{\tilde{u}_{-m,-n}}$$

Exercice 5 A nouveau, comme en dimension 1, les coefficients $(\tilde{u}_{m,n})$ correspondent aux fréquences de l'image u , ordonnées des négatives aux positives. Plus précisément, si $u \in L^1$ et que l'on définit les coefficients de la série de Fourier de u par

$$c_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0, 2\pi]^2} u(x, y) \exp\left(\frac{-2i\pi mx}{a}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi ny}{a}\right),$$

alors, pour $m, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ les $\tilde{u}_{m,n}$ sont des approximations des $c_{m,n}$ par la méthode des trapèzes.

La figure 6.3 présente une image et le logarithme du module de sa transformée de Fourier discrète (le logarithme est utilisé car le module des TFD des images usuelles décroît très vite lorsque l'on s'éloigne des basses fréquences).

6.1.3 Le phénomène du repliement de spectre ou aliasage

Le but de ce paragraphe est de calculer les perturbations auxquelles est exposée la transformée de Fourier discrète d'un signal lorsque celui-ci est sous-échantillonné. On vient de voir que la transformée de Fourier discrète calculait exactement les coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique de degré $\frac{N}{2}$, $P(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{a}\right)$, dont on connaissait N échantillons $u\left(\frac{ka}{N}\right)$, $N = 0, \dots, N-1$. Dans cette section, on considère une fonction $u \in L^2(0, a)$ et sa série de Fourier

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{\frac{2in\pi x}{a}}.$$

Dans toute la suite, on supposera que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(u)| < +\infty$, ce qui implique que u est continue et a -périodique. Cette hypothèse n'est pas irréaliste. En effet, étant donné un signal v régulier (C^2 par exemple) sur $[0, a/2]$, on peut le rendre pair en posant $u(-x) = \tilde{v}(x)$ pour $x \in [-a/2, 0]$, $u(x) = v(x)$ sur $[0, a]$. On voit que la a -périodisée de cette extension u reste Lipschitz et C^2 par morceaux et on peut en déduire (exercice!) que la série des coefficients de Fourier de u est convergente. On suppose également, ce qui est réaliste, qu'un signal u n'est en fin de compte connu que par ses échantillons sur $[0, a]$, $u(0), \dots, u\left(\frac{N-1}{N}a\right)$.

Théorème 6.1 *Soit u définie sur $[0, a]$, vérifiant $\sum_n |c_n(u)| < +\infty$. Alors la transformée de Fourier discrète des N échantillons de u sur $[0, a]$ est la N -périodisée de la suite des coefficients de Fourier de u :*

$$\tilde{u}_n = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{n+qN}(u), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (6.6)$$



FIGURE 6.3 – Gauche : une image numérique de taille 256×256 ; droite : application d'un changement de contraste logarithmique $s \rightarrow C + D \log s$ au module de sa TFD. (Les constantes C et D sont choisies pour que l'image résultante ait ses valeurs entre 0 et 255). Le spectre décroît rapidement aux hautes fréquences (rappelons que l'image étant bornée, son spectre est dans L^2). C'est la grande vitesse de décroissance du spectre qui rend nécessaire l'utilisation du logarithme pour la visualisation. La symétrie centrale du module de la TFD est visible. Les lignes blanches horizontale et verticale correspondent aux bords verticaux et horizontaux de l'image, respectivement. En effet, l'image étant implicitement périodisée elle présente un contraste brusque entre bord haut et bord bas d'une part, coté droit et coté gauche d'autre part. Remarquer également les lignes obliques qui correspondent aux bords obliques de l'image (voir en particulier les dalles sur le sol).

Démonstration On rappelle la notation $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ et $(\omega_N)^N = 1$. Comme

$$u(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(u) e^{\frac{2im\pi x}{a}},$$

on a

$$u\left(\frac{ka}{N}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(u) \omega_N^{mk}.$$

On pose pour $m \in \mathbb{Z}$, $m = qN + n$, $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$. En regroupant les termes de la série de Fourier on obtient

$$u\left(\frac{ka}{N}\right) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left(\sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{n+qN}(u) \right) \omega_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Mais on a aussi (formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète) :

$$u\left(\frac{ka}{N}\right) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Ces deux dernières formules définissent toutes deux la transformée de Fourier discrète et par identification on obtient la formule de "repliement de spectre" (6.6). ◦

On a le résultat analogue en deux dimensions :

Théorème 6.2 Soit u définie sur $[0, a]^2$, vérifiant $\sum_n |c_{m,n}(u)| < +\infty$. Alors la transformée de Fourier discrète de u est la (N, N) -périodisée de la suite des coefficients de Fourier de u :

$$\tilde{u}_{m,n} = \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} c_{m+pN,n+qN}(u), \quad m, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (6.7)$$

Exercice 6 Montrer le théorème 6.2.

Ce théorème va nous permettre d'interpréter les effets de moiré visibles dans beaucoup d'images digitales ou de films digitalisés (DVD). Ces effets de moiré sont dus à un "repliement de spectre", ou "aliasage". Le repliement de spectre provient d'un sous-échantillonnage abusif. Le terme aliasage se réfère à la présence des coefficients parasites $c_{m+pN,n+qN}$, pour $(p, q) \neq (0, 0)$ dans le calcul du coefficient de la fréquence (m, n) , $\tilde{u}_{m,n}$. Quand la transformée de Fourier discrète fait correctement son travail, qui est de retrouver le coefficient $c_{m,n}$ de la fréquence (m, n) de u , on doit avoir $\tilde{u}_{m,n} = c_{m,n}$. Les coefficients $c_{m+pN,n+qN}$ qui s'y ajoutent dans (6.7) sont des répliques, ou "alias" de coefficients correspondant aux fréquences plus grandes $(m + pN, n + qN)$, $(p, q) \neq (0, 0)$. D'où le terme d'aliasage. Dans une expérience sur ordinateur, les signaux et images sont toujours déjà échantillonnés. Voyons donc maintenant comment interpréter l'expérience pratique suivante : un signal est donné par ses échantillons, et on le sous-échantillonne.

Définition 6.2 Soit un signal échantillonné (u_k) , $k = 0, \dots, N-1$, et soit p un entier divisant N . On définit l'opérateur "sous-échantillonnage d'ordre p " comme suit :

$$S_p : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N/p}$$

$$(u_k)_{k=0, \dots, N-1} \longrightarrow (v_k) = (u_{kp})_{k=0, \dots, N/p}.$$

Le signal (v_k) est dit sous-échantillonné d'un facteur p .

Nous commençons par le cas, technologiquement classique, où $p = 2$.

Corollaire 6.2 Soit $(v_k) = S_2((u_k))$ (on suppose que $\frac{N}{2}$ est pair). Alors (\tilde{v}_n) , la transformée de Fourier discrète de (v_k) , s'écrit, pour $n = -\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1$,

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-\frac{N}{2}} + \tilde{u}_{n+\frac{N}{2}}, \quad (6.8)$$

le deuxième terme étant par ailleurs nul si $n < 0$ et le troisième étant nul si $n \geq 0$.

Démonstration Appliquons le théorème 6.1 à l'unique polynôme trigonométrique P à N coefficients qui a pour échantillons les u_k . Alors par définition de la transformée de Fourier discrète, $\tilde{u}_n = c_n(P)$. On a donc pour $\frac{N}{4} \leq n \leq \frac{N}{4} - 1$,

$$\tilde{v}_n = \sum_{q \in \mathbb{Z}} c_{n+q\frac{N}{2}}(P) = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-\frac{N}{2}} + \tilde{u}_{n+\frac{N}{2}}.$$

Remarquons que si $n \geq 0$ cela donne $\tilde{v}_n = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-\frac{N}{2}}$, l'autre coefficient étant nul. De même, si $n < 0$, on obtient $\tilde{v}_n = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+\frac{N}{2}}$. ◦

Cette proposition indique que le spectre du signal sous-échantillonné d'un facteur deux s'obtient en superposant à lui-même le spectre du signal original avec un décalage de $\frac{N}{2}$. On dit qu'il y a repliement de spectre. Ainsi, le spectre du signal sous-échantillonné contient généralement des informations non présentes dans le spectre du signal de départ, ce qui se traduit sur le signal sous-échantillonné par l'apparition de structures périodiques n'ayant pas de lien direct avec le contenu du signal. Ceci est particulièrement frappant dans le cas des signaux bi-dimensionnels, pour lesquels on a un résultat identique à celui de la proposition 6.2.

Corollaire 6.3 Soit $(v_{k,l}) = S_2((u_{k,l}))$ la sous-échantillonnée d'un facteur 2 d'une image discrète. (on suppose que $\frac{N}{2}$ est pair). Alors $(\tilde{v}_{m,n})$, la transformée de Fourier discrète de $(v_{k,l})$, s'écrit, pour $m, n = -\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1$,

$$\tilde{v}_{m,n} = \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{0, 1, -1\}} \tilde{u}_{m+\varepsilon_1\frac{N}{2}, n+\varepsilon_2\frac{N}{2}}. \quad (6.9)$$

Exercice 7 Montrer le corollaire 6.3. Parmi les neuf termes de la somme de droite de (6.9), il y a en général quatre termes non nuls : lesquels ? Faire un dessin.

Pour illustrer ce résultat, nous montrons deux exemples d'images sous-échantillonnées aux figures 6.1.3 (image synthétique) et 6.1.3, exemple où l'apparition de structures périodiques est due à la superposition, lors du sous-échantillonnage, des hautes fréquences de l'image. La manipulation numérique à faire pour créer des effets de moiré dans une image est aussi simple que son interprétation est subtile : il suffit de prendre "un point sur deux" de l'image. L'interprétation de l'opération se fait en Fourier : on a créé de basses fréquences parasites en c_n qui correspondent au "repliement" de hautes fréquences $c_{n+\frac{N}{2}}$. D'où l'apparition de sinusoides qui n'ont rien à voir avec le signal original et qui créent des effets de moiré.

Le résultat de la proposition 6.2 se généralise dans le cas d'un sous-échantillonnage d'ordre plus élevé, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 6.7 Soit $(v_k) = S_p((u_k))$ (on suppose que $N = pM$, pour un certain entier M). Alors (\tilde{v}_k) , la transformée de Fourier discrète de (v_k) , s'écrit, pour $k = 1 \dots M - 1$,

$$\tilde{v}_k = \sum_{a=-p+1}^{p-1} \tilde{u}_{k+\frac{aN}{p}}. \quad (6.10)$$

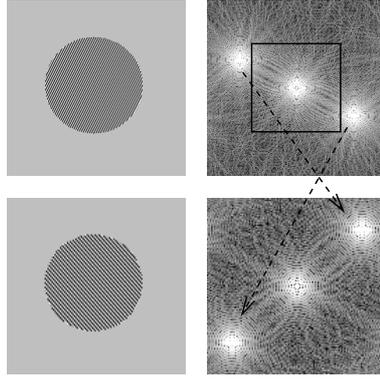


FIGURE 6.4 – Exemple de repliement avec une image synthétique. En haut à gauche : image originale, à droite son spectre. En bas à gauche : l'image sous-échantillonnée d'un facteur deux dans chaque direction, à droite le spectre correspondant. Le spectre de l'image sous-échantillonnée est obtenu en périodisant le spectre de l'image originale avec pour période le carré visible en surimpression.

Démonstration Appliquer de nouveau le théorème 6.1 à l'unique polynôme trigonométrique à N coefficients qui a pour échantillons les u_k . Ce polynôme vérifie $c_n(P) = \tilde{u}_n$. \circ

On peut comparer les propositions 6.2 et 6.7 et le corollaire 6.3 aux théorèmes 6.1 et 6.2. Ces théorèmes nous donnent les conditions générales de Shannon et Whittaker pour qu'un signal ou une image soient correctement échantillonnés : ces conditions sont que le spectre soit borné (nombre fini N ou N^2 de coefficients de Fourier) et que l'on dispose d'au moins N (ou N^2) échantillons. Les propositions 6.2 et 6.7 sont plus pratiques : elles ne donnent aucune hypothèse sur le signal ou l'image qui ont été échantillonnés et ont l'avantage de s'appliquer donc à un signal ou une image discrets, quelconques, qu'ils soient ou non issus d'un bon échantillonnage.

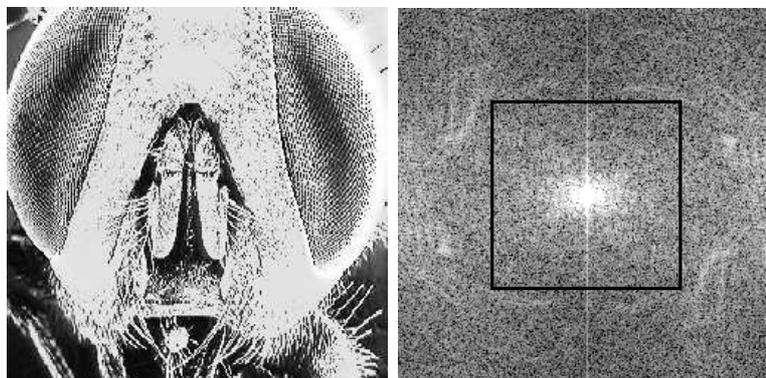
6.1.4 Manipulations propres et simples et leur visualisation

Corollaire 6.4 (Représentation d'une image à partir de ses coefficients de Fourier) Les $\tilde{u}_{m,n}$ étant donnés pour $m, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$, on désire représenter une image qui a ces coefficients de Fourier. Pour cela, on fixe le domaine de l'image comme étant $[0, b]^2$ et on pose donc

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\}^2} \tilde{u}_{\mathbf{m}} e^{\frac{2i\pi \mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}{b}}.$$

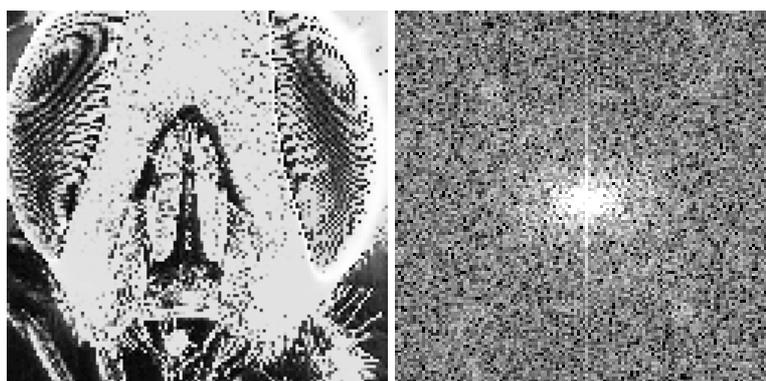
On peut donc construire une image ayant des coefficients de Fourier donnés sur un domaine carré de largeur arbitraire b , et l'image reconstruite est donc b -périodique. Ses échantillons $u(\frac{\mathbf{k}b}{N})$, $\mathbf{k} \in \{0, \dots, N - 1\}^2$ redonnent par DFT les $\tilde{u}_{\mathbf{m}}$, et inversement ces échantillons sont obtenus par DFT inverse à partir des $\tilde{u}_{\mathbf{m}}$. Il en résulte que, les coefficients de Fourier $\tilde{u}_{\mathbf{m}}$ étant donnés l'on doit toujours fixer le domaine de reconstruction en donnant b . Les images reconstruites à partir de différents b se déduisent l'une de l'autre par simple homothétie.

On part d'une image digitale donnée par ses échantillons $\mathbf{u} = (u(k, l))$, $k, l \in [0, N - 1]^2$. Donc l'image qui apparaît sur l'écran est de taille $N \times N$. Si on procède



(a) Image originale

(b) Sa TFD, non nulle en dehors du carré visible en surimpression



(c) Image sous-échantillonnée d'un facteur 2

(d) La TFD correspondante, sur laquelle il y a repliement

FIGURE 6.5 – Sous-échantillonnage et repliement : le cas d'une image mal échantillonnée. Pour les images (a), (b), (c), (d), le principe est le même que dans la figure 6.1.3, mais le détail de la transformation du spectre est plus difficile à suivre ! les effets du repliement (*aliasing* en anglais) sont particulièrement visibles sur les yeux de la mouche, image (c), qui présentent des oscillations à basse fréquence. Les structures quasi-périodiques de l'image originale sont visibles sous formes de taches et de filaments sur le spectre (b). Le repliement est dû à la présence de ces structures aux hautes fréquences : la TFD de l'image originale n'est pas nulle en dehors du carré visible en surimpression figure (b). Ce type d'effet de moiré est visible dans de nombreux DVD commerciaux.

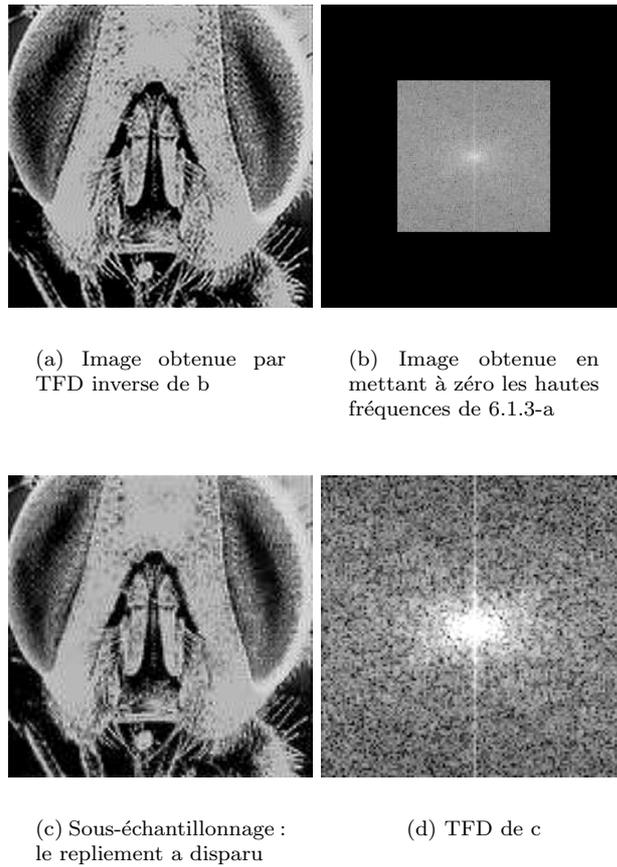


FIGURE 6.6 – Une solution possible pour éviter les effets de repliement illustrés sur la figure 6.1.3. L'image (a) est l'image dont le spectre est le même que celui de l'image 6.1.3-(a) à l'intérieur du carré, et est nul à l'extérieur (filtrage passe-bas). L'image (c) est l'image sous-échantillonnée correspondante. On observe que l'effet de repliement a disparu.

par exemple à un sous-échantillonnage de deux : $\mathbf{v} := S_2\mathbf{u}$ est une image avec quatre fois moins d'échantillons, et donc de dimensions deux fois plus petites sur l'écran. Pour visualiser \mathbf{v} et \mathbf{u} à la même taille, on procède par *zero-padding*. Soit v l'unique polynôme trigonométrique N -périodique et de degré $N/2$ passant par les échantillons pairs de \mathbf{u} . On a donc $\mathbf{v} = S_2v$. Les coefficients $\tilde{v}_{\mathbf{m}}$ de v sont obtenus par la formule d'aliasage ?? à partir de ceux de u . Ces coefficients sont en nombre $(\frac{N}{2})^2$. Donc pour comparer visuellement l'image sous-échantillonnée \mathbf{v} à \mathbf{u} , il faut zoomer \mathbf{v} pour en montrer autant d'échantillons. Pour cela on procède par zéro-padding, en posant $\tilde{v}_{\mathbf{m}} = 0$ pour $\mathbf{m} \in \{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\}^2 \setminus \{-\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1\}^2$. Alors on voit autant d'échantillons (N^2) pour v que pour u et on peut donc les comparer sur un écran à la même taille. On notera ZP_M l'opération qui consiste à border de zéros un spectre de manière à passer d'une largeur N à une largeur $M + N$, et donc à $(M + N)^2$ échantillons.

Pour avoir une notation computationnellement complète, il faut préciser donc quand on fait une DFT le nombre d'échantillons N^2 . On notera donc DFT_N pour la DFT à N échantillons si c'est un signal et DFT_N également si c'est la DFT à N^2 échantillons d'une image. Avec ce formalisme simple et qui correspond à ce qui est programmé, les opérations d'intérêt à mener sont :

- Partant de N^2 échantillons $\mathbf{u} = u(\mathbf{k})$, faire $DFT_N^{-1} DFT(\mathbf{u})$ (simple vérification : on doit retrouver \mathbf{u}) ;
- Faire $\mathbf{v} = DFT_N^{-1} ZP_{\frac{N}{2}} DFT_{\frac{N}{2}} S_2\mathbf{u}$: met en évidence les effets néfastes de l'aliasage ;
- Faire $\mathbf{w} = DFT_N^{-1} ZP_{\frac{N}{2}} (DFT_N\mathbf{u})_{|\{-\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1\}}$. En d'autres termes on fait les choses correctement : on annule les coefficients de Fourier plus grands que $N/4$, ce qui autorise un sous-échantillonnage de 2.
- Comparer \mathbf{v} et \mathbf{w}

6.1.5 L'équation de la chaleur

Consider a digital image $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ with $\mathbf{k} = (k, l) \in [0, N - 1]^2$ and its DFT interpolate

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}=(m,n) \in [-N/2, N/2-1]^2} \tilde{u}_{\mathbf{m}} e^{\frac{2i\pi\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}{N}}, \quad (6.11)$$

where $\tilde{u}_{\mathbf{m}}$ with $\mathbf{m} = (m, n)$ are the Discrete Fourier Transform (DFT) coefficients of the N^2 samples $u(\mathbf{k})$. The scale space convolves u with a Gaussian $G_{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\mathbf{m}^2}{2\sigma^2}}$. A direct calculation shows that the result of the convolution of u with G_{σ} is

$$v(\mathbf{x}) := (G_{\sigma} * u)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]^2} \tilde{u}_{\mathbf{m}} \hat{G}_{\sigma} \left(\frac{2\mathbf{m}\pi}{N} \right) e^{\frac{2i\pi\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}{N}} \quad (6.12)$$

with $\hat{G}_{\sigma}(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$. Indeed,

$$G_{\sigma} * e^{\frac{2i\pi\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}{N}} = \int_{\mathbb{R}^2} G_{\sigma}(\mathbf{y}) e^{\frac{2i\pi\mathbf{m}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{N}} d\mathbf{y} = e^{\frac{2i\pi\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}{N}} \int_{\mathbb{R}^2} G_{\sigma}(\mathbf{y}) e^{-\frac{2i\pi\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}}{N}} d\mathbf{y} = e^{\frac{2i\pi\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}{N}} \hat{G}_{\sigma} \left(\frac{2\pi\mathbf{m}}{N} \right).$$

The convolved digital image is

$$v(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{m} \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]^2} \tilde{v}_{\mathbf{m}} e^{\frac{2i\pi\mathbf{m}\cdot\mathbf{k}}{N}}. \quad (6.13)$$

Thus, the algorithm giving the *exact* solution $u(\sigma, \mathbf{x})$ of the heat equation starting from an initial trigonometric polynomial $u_0(\mathbf{x}) = u(0, \mathbf{x})$ will be a simple formula : Denote by \mathbf{u}_0 the N^2 samples of u_0 and $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}} = DFT_N(\mathbf{u}_0)$ its DFT coefficients. Call $\mathbf{u}(\sigma)$ the N^2 samples of $u(\sigma, \mathbf{x})$. Then

$$\mathbf{u}(\sigma) = DFT_N^{-1} \left(\left(\hat{G}_\sigma \left(\frac{2\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}{N} \right) \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}} \right)_{\mathbf{m} \in \{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1\}} \right).$$

We denote this discrete filter by $\mathbf{G}_\sigma : \mathbf{u}(\sigma) = \mathbf{G}_\sigma \mathbf{u}_0$.

Finally we can make the experiment checking on what kind of Gaussian convolution is enough to make a subsampling. Trying $t = 2, 4, 8$ and taking an initial digital image \mathbf{u}_0 with N^2 samples, we just have to compare for several values of \mathbf{c} the digital images

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{S}_1 \mathbf{G}_{t\mathbf{c}} \mathbf{u} \text{ and } \mathbf{u}_2 = \mathbf{S}_{\frac{1}{t}} \mathbf{S}_t \mathbf{G}_{t\mathbf{c}} \mathbf{u}_0.$$

Notice that $\mathbf{S}_{\frac{1}{t}}$ is an oversampling, obtained therefore by zero padding. More precisely,

$$\mathbf{S}_{\frac{1}{t}} =: DFT_N^{-1} ZP_{N(1-\frac{1}{t})}.$$

Thus it is not true in general that $\mathbf{S}_{\frac{1}{t}} \mathbf{S}_t$ is the identity. The difference between \mathbf{u}_1 and \mathbf{u}_2 can be visualized, but can also be reliably computed as the root mean square error per pixel (RMSE). If the RMSE is lower than 1 or 2, the visual difference is tiny, and if the RMSE is lower than, say, 0.1, it becomes outright negligible.

6.1.6 La transformée de Fourier rapide

Comme nous l'avons vu plus haut, le calcul des coefficients de Fourier \tilde{u}_n revient à l'évaluation d'un certain polynôme aux racines N -ièmes de l'unité. Dans le cas général, l'évaluation classique (ex. méthode de Hörner) d'un polynôme de degré $N-1$ en un point prend $\mathcal{O}(N)$ opérations. Donc si l'on répète cela pour les N racines de l'unité on devra effectuer $\mathcal{O}(N^2)$ opérations. L'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide (TFR) permet de résoudre le problème en $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations. Appelons "calcul d'ordre N " l'évaluation d'un polynôme de degré $N-1$ aux racines N -ièmes de l'unité. Et soit $T(N)$ le nombre d'opérations (additions et multiplications) demandées par ce calcul.

On se place dans le cas $N = 2^n$ et soit un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k.$$

On pose

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k} X^k,$$

$$R(X) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k+1} X^k.$$

Alors

$$P(\omega_N^k) = Q\left((\omega_N^k)^2\right) + \omega_N^k R\left((\omega_N^k)^2\right). \quad (6.14)$$

Or, si N est pair les $(\omega_N^k)^2$ sont exactement les racines d'ordre $\frac{N}{2}$ de l'unité. Il suffit donc d'évaluer les deux polynômes Q et R aux racines d'ordre $\frac{N}{2}$ de l'unité ce qui est

un problème d'ordre $\frac{N}{2}$. On a donc, en tenant compte des additions et multiplications demandées par (6.14),

$$T(N) = 2T\left(\frac{N}{2}\right) + 2N.$$

On en tire aisément $T(N) = \mathcal{O}(N \log(N))$. \circ

Exercice 8 Démontrer la relation $T(N) = \mathcal{O}(N \log(N))$.

Remarque 6.1 Les programmes usuels de calcul numérique ne calculent pas les coefficients \tilde{u}_n , mais les coefficients \hat{u}_n , définis par la formule suivante, pour $n = 0, \dots, N-1$:

$$\hat{u}_n = \begin{cases} \tilde{u}_n & \text{si } n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ \tilde{u}_{n-N} & \text{si } n = \frac{N}{2}, \dots, N \end{cases}$$

6.1.7 L'utilisation de la transformée de Fourier discrète pour définir zoom, translations et rotations des images

Le zoom Nous présentons une méthode d'interpolation reposant sur une extension de la TFD d'un signal ou d'une image. Nous détaillons la méthode, dite du "prolongement par des zéros ("zéro-padding"), en une dimension, le principe se généralisant sans mal pour une image. Comme précédemment, considérons des échantillons u_k , k variant de 0 à $N-1$, et $\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega_N^{-kn}$. On suppose que N est pair et que l'on veut zoomer d'un facteur 2, c'est à dire que l'on veut construire un signal de taille deux fois plus grande (avec deux fois plus d'échantillons) que le signal de départ. On définit un nouveau signal v , de taille $2N$ comme étant la TFD inverse de \tilde{v} , donné par

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n \text{ si } -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \quad \tilde{v}_n = 0 \text{ si } n \in [-N, -\frac{N}{2} - 1] \cup [\frac{N}{2}, N - 1]. \quad (6.15)$$

Proposition 6.8 Le signal v dont la TFD est donnée par la formule (6.15) vérifie $v_{2k} = u_k$, pour $k = 0, \dots, N-1$.

Démonstration On a

$$v_{2k} = \sum_{-N}^{N-1} \tilde{v}_n \omega_{2N}^{2nk} = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{nk} = u_k.$$

En effet, $\omega_{2N}^{2nk} = \omega_N^{nk}$. \circ

Remarque 6.2 Ce résultat est évident sans démonstration : en effet, on peut considérer l'unique polynôme trigonométrique de degré $\frac{N}{2}$ passant par les échantillons u_k . Les échantillons v_k s'interprètent immédiatement comme des échantillons de ce même polynôme.

Remarque 6.3 On remarquera que les nouveaux échantillons obtenus par cette méthode peuvent être complexes, même lorsque le signal original est réel (ceci étant dû au terme d'aliasage $u_{-\frac{N}{2}}$). Aussi, on ne retient que la partie réelle à des effets de visualisation.



FIGURE 6.7 – Zoom sur une partie de l'image 6.3. Haut : zoom par TFD (zéro-padding), bas : zoom par réplication des pixels. Le zoom par TFD est obtenu en prolongeant par des zéros le spectre de l'image initiale. Celui par réplication des pixels en remplaçant chaque pixel par quatre pixels de la même valeur. Remarquons tout d'abord la plus grande régularité du zoom par TFD, qui supprime les effets de "blocs" très visibles sur le zoom par réplication. En contrepartie, le phénomène de Gibbs (voir paragraphe 5.4) est très visible sur le zoom par TFD, puisque l'on a mis à zéro brutalement des coefficients de la TFD. Ce phénomène est particulièrement visible le long des frontières de l'image, qui correspondent à des discontinuités puisque l'image est périodisée (par exemple zone a). On observe aussi le phénomène de Gibbs le long des contours des objets (par exemple zone b).

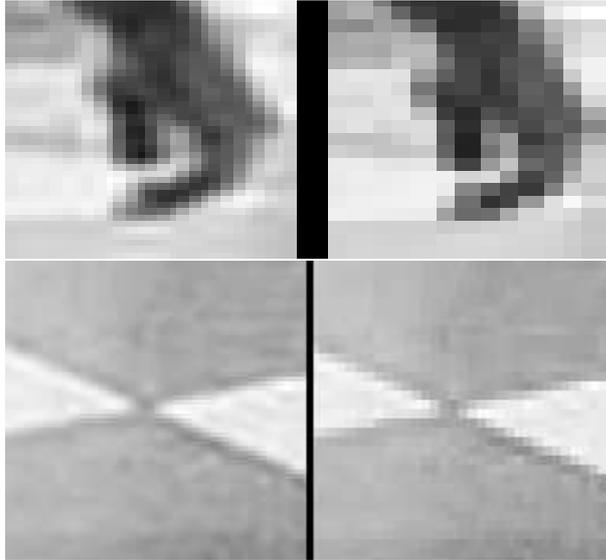


FIGURE 6.8 – détails après zoom, à gauche par TFD, à droite par réplcation des pixels.

La méthode se généralise aux cas des images. Nous considérons une image numérique $(u_{k,l})$, et nous définissons une image zoomée $(v_{i,j})_{i,j=0,\dots,2N-1}$ comme étant la transformée de Fourier discrète inverse de $\tilde{v}_{i,j}$ définie pour $i, j = -N, \dots, N-1$ par

$$\tilde{v}_{m,n} = \tilde{u}_{m,n} \text{ si } -\frac{N}{2} \leq m, n \leq \frac{N}{2} - 1, \quad \tilde{v}_{m,n} = 0 \text{ sinon.} \quad (6.16)$$

Exercice 9 Ecrire l'équivalent de la proposition 6.8 et la montrer en dimension 2.

La figure 6.7 montre la partie réelle d'une partie de l'image 6.3 zoomée par zéro-padding, et la compare celle obtenue par réplcation des pixels (chaque pixel est remplacé par quatre pixels de la même valeur). On remarque que le zoom par TFD produit une image bien plus régulière, et évite l'effet "marche d'escalier" visible sur l'image zoomée par réplcation. La figure 6.8 illustre ce point sur un détail. Une autre remarque concerne l'effet de Gibbs (cf. paragraphe 5.4). Ce phénomène produit des rebonds le long de la frontière du domaine de l'image. En effet, et comme nous l'avons déjà mentionné, le calcul des coefficients de Fourier de l'image (dont les coefficients de la TFD sont une approximation) suppose l'image périodique, ce qui fait apparaître des discontinuités le long des frontières de son domaine de définition. Le phénomène de Gibbs est également visible le long des discontinuités dans l'image, les contours. Le phénomène est mis en évidence sur la figure 6.7. Expliquons pourquoi le phénomène apparaît dans le cas du zoom : une nouvelle image $v_{k,l}$ de taille $2N \times 2N$ est obtenue en utilisant les valeurs prises par le polynôme $P(x)$ entre les points dont on dispose au départ. Cette utilisation de P fait apparaître des oscillations du polynôme trigonométrique qui étaient invisibles sur les échantillons de départ $(u_{k,l})$. Comme nous l'avons déjà évoqué, les oscillations aux frontières du domaine de l'image peuvent être supprimées par utilisation de la transformée en cosinus. En revanche, le problème subsistera le long des discontinuités présentes à l'intérieur de l'image, à moins de faire un "filtre anti-aliasage". Ce filtre consiste à atténuer les fréquences près du bord, pour que leur transition à zéro soit moins brutale.

La translation La méthode présentée au paragraphe précédent permet de définir une translation d'une quantité $1/2$ (ou $a/(2N)$ pour revenir à notre définition première du signal u), en ne gardant que les points d'indice impair du signal zoomé v . Plus généralement, nous pouvons définir une translation d'un signal d'une quantité $0 < \alpha < 1$. Comme d'habitude, l'opération de translation sur la fonction u dont nous connaissons les échantillons u_k se fait sous l'hypothèse que celle-ci est un polynôme trigonométrique. En d'autres termes, on translate le polynôme d'interpolation, la "vraie" fonction u étant inconnue en dehors des échantillons. Le polynôme d'interpolation est

$$P(x) = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n e^{\frac{2i\pi n x}{a}}.$$

En translatant de α , on obtient

$$\tau_\alpha P(x) = P(x - \alpha) = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n e^{-\frac{2i\pi n \alpha}{a}} e^{\frac{2i\pi n x}{a}}.$$

On a donc :

Proposition 6.9 La TFD (\tilde{v}_n) de $P(x - \alpha)$ s'obtient à partir de la TFD de $P(x)$, \tilde{u}_n , par

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n e^{-\frac{2i\pi n \alpha}{a}}.$$

Cette méthode de translation se généralise sans mal au cas des images, en remarquant qu'une translation à deux dimensions peut se décomposer en deux translations, une selon les lignes et une selon les colonnes.

Exercice 10 Donner les formules de la translation par TFD en dimension 2.

La rotation Décrivons maintenant une méthode pour implémenter une rotation discrète, due à L. Yaroslavsky. En bref, cette méthode réduit une rotation à des translations en ligne ou en colonne de l'image. Commençons par remarquer que

$$R(-\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tan(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := T(\theta)S(\theta)T(\theta) \quad (6.17)$$

(sauf si $\theta = \pi$ auquel cas il suffit de retourner l'image).

Une rotation d'angle θ de l'image discrète $u(i, j)$ consiste à calculer $u(R(-\theta)(i, j))$ que l'on notera $(R(-\theta)u)(i, j)$. Mais on a $R(-\theta)u = T(\theta)S(\theta)T(\theta)u$. Donc il suffit d'expliquer comment calculer $T(\theta)u$ et $S(\theta)u$. Or ces deux opérations ont la même structure, à savoir une translation ligne par ligne ou une translation colonne par colonne. Traitons par exemple le cas de $T(\theta)$. On a $(T(\theta)u)(i, j) = u(i + j \tan(\frac{\theta}{2}), j)$. Donc partant de la matrice $u_{i,j}$, on translate sa première ligne de $\tan(\frac{\theta}{2})$, la deuxième de $2 \tan(\frac{\theta}{2})$, etc. Appliquer $S(\theta)$ revient à faire une opération similaire sur les colonnes. Enfin on réapplique $T(\theta)$ et on fait donc à nouveau une translation sur les lignes. Or comme on vient de le voir ces translations ligne à ligne ou colonne à colonne se font en temps $N \log N$ en utilisant la TFD à une dimension.

La figure 6.9 montre une image après une rotation de $\pi/4$ par la méthode décrite ci-dessus. Puis, pour illustrer la stabilité de la méthode, nous montrons figure 6.10 le résultat de l'application successive de douze rotations de $\pi/4$, et, à titre de comparaison, le résultat de ces douze rotations successives implémentés par interpolation bilinéaire (les valeurs aux nouveaux points sont des combinaisons linéaires des quatre points à coordonnées entières les plus proches). Cette figure illustre clairement la supériorité de la méthode par FFT dans le cas de rotations multiples.



FIGURE 6.9 – Rotation de $\pi/4$ par TFD. La rotation est implémentée en remarquant qu'elle peut se décomposer en trois transformations consistant en des translations selon les lignes ou les colonnes de l'image (formule 6.17). Chacune de ces transformations est ensuite effectuée grâce à une TFD sur la ligne ou colonne considérée, en utilisant la méthode présentée au paragraphe précédent.

Remarque 6.4 *Du fait que l'on manipule des fonctions périodiques, une translation conduirait à faire sortir une partie de l'image par un bord pour la faire entrer par l'autre. Ce qui conduirait à l'apparition, sur les bords de l'image d'un certain nombre de détails qui sont en fait mal placés. On se débarrasse facilement de ce problème en insérant l'image dans un cadre deux fois plus grand. . .*

Remarque 6.5 *La méthode de rotation n'est pas parfaite. En effet, l'image u continue associée à $u(i, j)$ est dans l'interpolation supposée implicitement N -périodique, ce qui revient à dire qu'elle est de la forme (pour une image carrée)*

$$u(x, y) = \sum_{k,l=0}^{N-1} c_{i,j} e^{2i \frac{\pi}{N} (kx+ly)}.$$

Mais, si on lui applique une "translation" suivant l'axe des x de valeur λy , la formule devient

$$u_1(x, y) = \sum_{k,l=0}^{N-1} c_{i,j} e^{2i \frac{\pi}{N} (kx+(l-\lambda k)y)}.$$

La fonction u_1 n'est pas (pour $\lambda \notin \mathbb{Z}$) N -périodique en y . Or, après la première translation on ne dispose plus que des échantillons du signal u_1 sur une grille carrée $N \times N$. D'après la théorie de Shannon un tel ensemble de données ne permet pas de capturer toute l'information sur u_1 (à la seconde étape on effectue des translations suivant y qui est justement l'axe qui pose problème). On rencontre encore ce problème à la troisième translation. Le seul moyen d'avoir une rotation exacte serait d'évaluer u aux points de l'image de $[0, N-1] \times [0, N-1]$ par une rotation d'angle $-\theta$, mais cette méthode est en N^4 ce qui la rend inopérante. . .



FIGURE 6.10 – Bas : après douze rotations successives de $\pi/4$ par TFD ; haut : même expérience en utilisant une interpolation bilinéaire (la valeur en un nouveau point (x, y) est obtenue par combinaisons linéaires des valeurs aux quatre points à coordonnées entières de l'image originale les plus proches de (x, y)).

6.1.8 Importances relatives de la phase et du module de la TFD pour une image

Nous nous intéressons à la pertinence visuelle des caractéristiques de la transformée de Fourier discrète dans le cas des images, et plus particulièrement à la phase et au module de la TFD, au moyen de deux exemples. Tout d'abord nous montrons, figure 6.11, deux images A et B, ainsi que les images obtenues en échangeant les phases de leurs TFD. Nous remarquons grâce à cette expérience qu'une part très importante de l'information géométrique d'une image est contenue dans la phase de sa TFD. Rappelons que si l'on translate une fonction, les coefficients de sa série de Fourier sont multipliés par des exponentielles complexes de module 1, et que par conséquent la phase de la TFD contient en sens des informations sur le placement des constituants de l'image.

Dans la figure 6.12, nous montrons deux images de textures, qui visuellement semblent invariantes par translation, ainsi que les deux images obtenues à partir de ces textures en ne conservant que le module de leur TFD, et en tirant au hasard les phases (selon une loi uniforme). On voit cette fois que le module de la TFD contient l'information. Cette propriété est caractéristique des textures homogènes du type présenté figure 6.12, et l'on peut même donner une définition des "microtextures" comme images caractérisées uniquement par le module de leur transformée de Fourier.

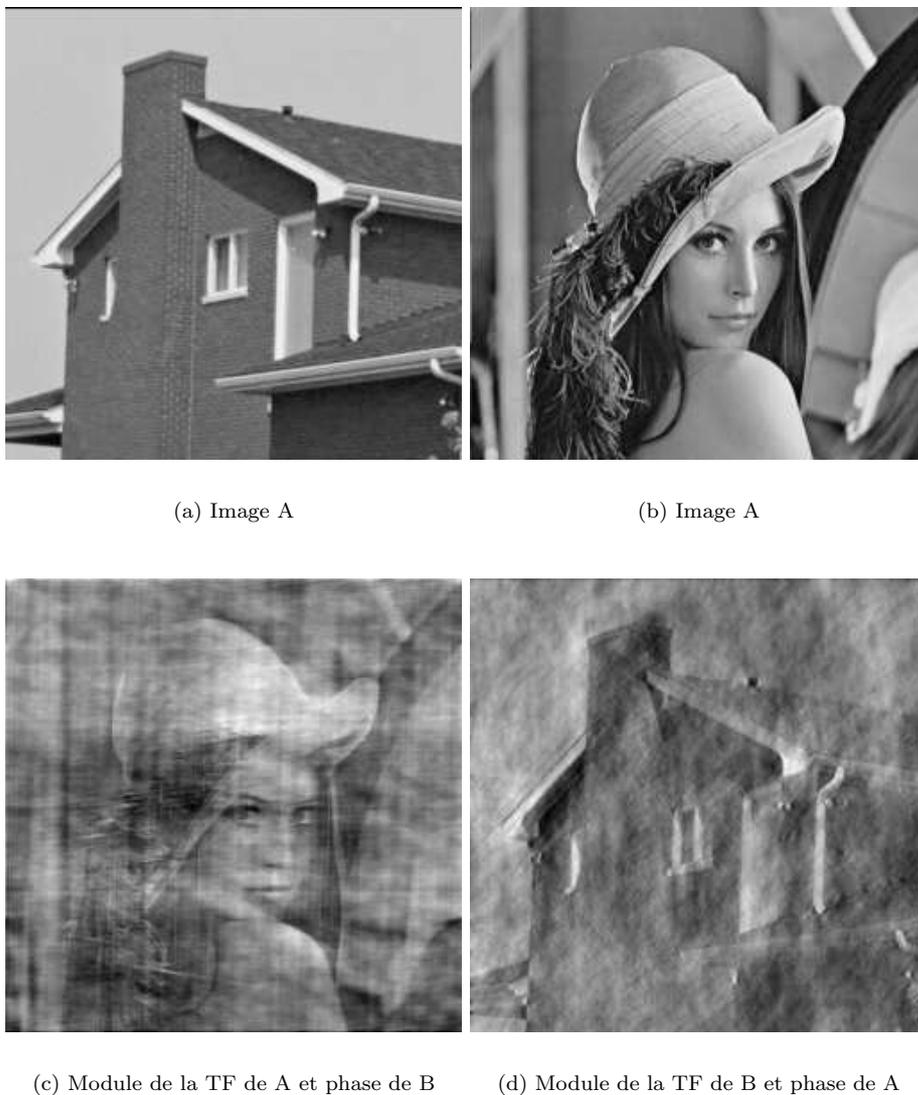


FIGURE 6.11 – Haut : les deux images de départ ; bas : les deux images après échange des phases de leurs TFD. L'information géométrique est contenue dans la phase ! Les formes sont principalement codées dans l'argument des coefficients de Fourier de l'image. Bien que les images (a) et (c) d'une part, et (b) et (d) d'autre part, aient des modules complètement différents, on y distingue les mêmes formes géométriques. Remarquons également que les directions horizontales et verticales très présentes sur l'image (a) apparaissent sous forme de texture dans l'image (c). Cette remarque est précisée par l'expérience de la figure 6.12.

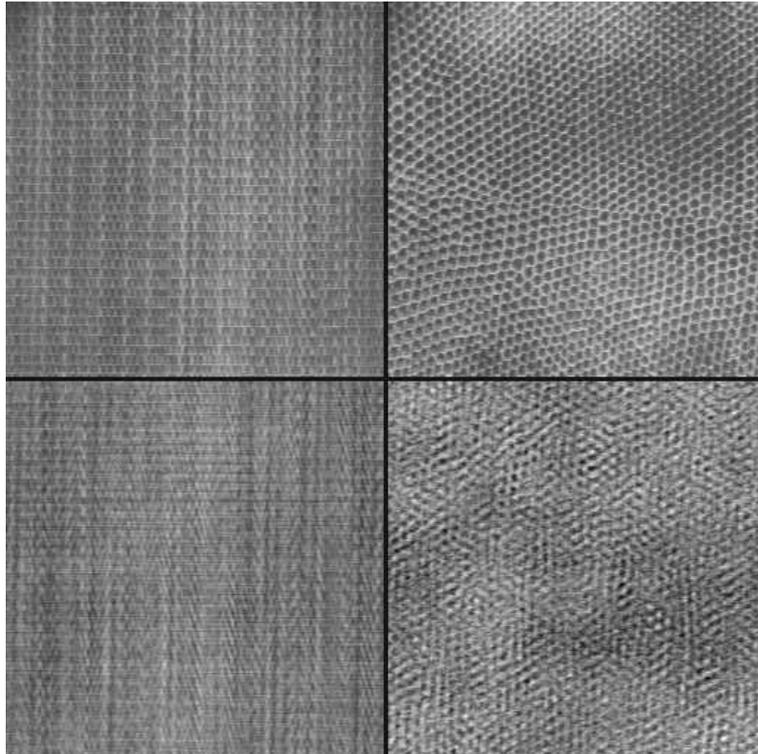


FIGURE 6.12 – Haut : deux images de textures ; bas : les deux images après remplacement des phases de leurs TFD par des phases aléatoires. Une information essentielle sur la texture est donc présente dans le module des coefficients de Fourier de l'image. Pour la texture de gauche, il semble que la plupart de l'information soit contenue dans le module de la TFD. A droite, quelques aspects de la texture sont perdus. Nous renvoyons le lecteur intéressé à un article (en anglais) sur une méthode de synthèse de texture par modification de la phase : [Van Wijk]

Chapitre 7

Séries de Fourier et espaces de Sobolev

7.1 Distributions

Un exemple clé, l'intégration par parties.

Prenons une fonction u qui est C^k sur \mathbb{R} et une autre fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ que l'on s'habitue à appeler "fonction test". On peut intégrer par parties

$$\int u^{(k)}(x)\varphi(x)dx = (-1)^k \int u(x)\varphi^{(k)}(x)dx.$$

Si $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, le membre de droite garde un sens. On peut donc considérer l'application linéaire

$$\varphi \rightarrow (-1)^k \int u(x)\varphi^{(k)}(x)dx = l_k(\varphi)$$

comme une généralisation de la dérivée k -ième de u . Cette dérivée n'est donc plus une fonction, c'est une forme linéaire ayant la notable propriété de continuité

$$|l(\varphi)| \leq C \max |\varphi^{(k)}(x)|,$$

où C dépend de u et du support de φ .

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N , borné ou pas. On note $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω , encore appelées fonctions test. Nous allons définir les distributions sur un ouvert quelconque de \mathbb{R}^N . On notera $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \mathbb{Z}^N$, $|\mathbf{i}| = i_1 + \dots + i_N$ et

$$\partial^{\mathbf{i}}u := \frac{\partial^{|\mathbf{i}|}u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}}.$$

Définition 7.1 On appelle distribution dans Ω toute forme linéaire u sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ayant la propriété de continuité suivante : Pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe un entier $p = p(K)$ et une constante C_K tels que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ à support inclus dans K , on ait

$$| \langle u, \varphi \rangle | \leq C_K \max_{|\mathbf{i}| \leq p} \max_{\mathbf{x} \in K} |\partial^{\mathbf{i}}\varphi(\mathbf{x})|. \quad (7.1)$$

Cette relation exprime que la forme linéaire u agit continûment sur φ et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à p . Aussi, il ne faut pas se surprendre si beaucoup d'exemples de distributions sont des formules explicites où $u(\varphi)$ dépend de φ et de ses dérivées,

mais toujours jusqu'à un ordre fini sur chaque compact. Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est une fonction intégrable sur tout borné de Ω , on voit immédiatement que l'on peut lui associer une distribution \tilde{u} dans Ω en posant, pour φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Exercice 1 Montrer en utilisant le corollaire 3.1 page 36 que si deux distributions \tilde{u} et \tilde{v} dans \mathbb{R}^N sont associées à des fonctions u et v appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et si elles sont deux distributions égales, alors $u = v$ p.p.

Grâce à ce résultat d'unicité, nous considérerons les fonctions $u \in L^1_{loc}$ comme des distributions et identifions u et \tilde{u} .

Exercice 2 Montrer que $\langle \delta_{\mathbf{x}}, \varphi \rangle := \varphi(\mathbf{x})$ est une distribution dans \mathbb{R}^N , appelée masse de Dirac en \mathbf{x} . Montrer qu'il en est de même pour le "peigne de Dirac" $u = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} \delta_{2\mathbf{n}\pi}$ et pour $\langle \partial^{\mathbf{i}} \delta_{\mathbf{x}}, \varphi \rangle := (-1)^{|\mathbf{i}|} \partial^{\mathbf{i}} \varphi(\mathbf{x})$.

Définition 7.2 Soient $(u_n)_n$ une suite de distributions sur Ω et u une distribution sur Ω . On dit que u_n converge vers u au sens des distributions si pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, la suite $(\langle u_n, \varphi \rangle)_n$ converge vers $\langle u, \varphi \rangle$.

On admettra le théorème suivant, qui est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus :

Théorème 7.1 si u_n est une suite de distributions dans Ω telle que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, la suite $\langle u_n, \varphi \rangle$ converge vers une valeur que l'on note $\langle u, \varphi \rangle$, alors u est aussi une distribution dans Ω .

Voir l'exercice 10 à la fin de ce chapitre. On dit que u_n tend vers u dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si elle tend vers u dans $L^1(B)$ pour tout borélien borné de \mathbb{R}^N .

Exercice 3 Montrer que si $u_n \in L^1_{loc}$ converge vers u dans L^1_{loc} , alors aussi $u_n \rightarrow u$ au sens des distributions.

Définition 7.3 et proposition : "On a toujours le droit de dériver une distribution". Si u est une distribution dans Ω et $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^N$, alors on appelle dérivée partielle d'ordre \mathbf{i} de u la distribution dans Ω définie par $\langle \partial^{\mathbf{i}} u, \varphi \rangle = (-1)^{|\mathbf{i}|} \langle u, \partial^{\mathbf{i}} \varphi \rangle$. Si u est \mathcal{C}^k dans Ω , alors sa dérivée classique notée $\partial^{\mathbf{i}}\{u\}$ coïncide avec sa dérivée au sens des distributions, $\partial^{\mathbf{i}}u$.

Démonstration Si u est \mathcal{C}^k dans Ω , elle-même et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k $\partial^{\mathbf{j}}u$, $|\mathbf{j}| \leq k$, sont dans $L^1_{loc}(\Omega)$, et donc sont des distributions. On a $\langle \partial^{\mathbf{j}}\{u\}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \partial^{\mathbf{j}}\{u\}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ et en intégrant par parties $|\mathbf{j}|$ fois, on obtient

$$\langle \partial^{\mathbf{j}}\{u\}, \varphi \rangle = (-1)^{|\mathbf{j}|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\partial^{\mathbf{j}}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \langle \partial^{\mathbf{j}}u, \varphi \rangle.$$

◊

Théorème 7.2 "On a toujours le droit de dériver un passage à la limite"
Si $u_n \rightarrow u$ au sens des distributions, alors $\partial^{\mathbf{i}}u_n \rightarrow \partial^{\mathbf{i}}u$ au sens des distributions.

La démonstration est évidente. L'énoncé qui précède est aussi là pour nous montrer que nous risquons des excès de fatigue à écrire trop souvent "au sens des distributions". L'usage est d'écrire à la place "dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ", car les distributions apparaissent comme des éléments du dual de $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c^\infty$. La notation \mathcal{D} ne sera pas utilisée mais on utilisera \mathcal{D}' .

Exercice 4 On appelle ordre d'une distribution u sur un compact K le plus petit entier p tel que la relation (7.1) soit vraie (pour une constante arbitraire C).

- 1) Montrer que l'ordre de $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ est zéro sur tout compact.
- 2) On considère une mesure bornée μ , c'est-à-dire une forme linéaire continue sur $C_b(\mathbb{R}^N)$, l'espace des fonctions continues bornées muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que μ est une distribution et que son ordre est zéro.
- 3) Montrer que si l'ordre d'une distribution sur K est p , alors l'ordre de $\partial^i u$ est inférieur ou égal à $p + |i|$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.

Théorème 7.3 (formule des sauts) Soit f une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite discrète de ses sauts. On désigne par $\{f\}'$ la dérivée ponctuelle de f et par $f(a_n^\pm)$ les limites à gauche et à droite de f en a_n . Alors la dérivée distributionnelle f' de f est donnée par

$$f' = \{f\}' + \sum_n (f(a_n^+) - f(a_n^-)) \delta_{a_n}.$$

Démonstration Prendre φ dans \mathcal{C}_c^∞ et intégrer par parties $\langle f', \varphi \rangle = - \int f \varphi'$. \circ

Que se passe-t-il quand la dérivée au sens des distributions d'une fonction est nulle ?

Lemme 7.1 Soit $f \in L^1(I)$ telle que $f' = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I), \int_I f(x) \varphi'(x) dx = 0. \quad (7.2)$$

Alors il existe une constante C telle que $f = C$ presque partout.

Démonstration Voir l'exercice 11 à la fin de ce chapitre. \circ

Proposition 7.1 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique et telle que $f \in L^2(0, 2\pi)$. On a le droit de dériver la série de Fourier de f autant de fois que l'on veut et on a donc

$$f^{(p)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (ik)^p c_k(f) e^{ikt}, \quad (7.3)$$

cette égalité étant valide comme égalité de deux distributions dans \mathbb{R} .

Remarque 7.1 L'égalité est aussi valide comme égalité de deux distributions dans $]0, 2\pi[$ ou en fait dans tout intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Démonstration On remarque d'abord que si I est un ouvert et u une fonction dans $L^2(I)$, dans L^1 , ou dans L^p_{loc} , alors elle est une distribution dans I , car toute fonction de $L^1_{loc}(I)$ est une distribution dans I . De plus, si une suite de fonctions u_n converge dans l'un des ces espaces, elle converge aussi au sens des distributions dans I . Si $f \in L^2(0, 2\pi)$ et est 2π -périodique, elle est une distribution qui est la somme (au sens L^2_{loc} et donc au sens des distributions dans \mathbb{R}) de la série $\sum_k c_k(f)e^{ikt}$. Soient $s_{n,m}(f) = \sum_{-m}^n c_k(f)e^{ikt}$ les sommes partielles de la série de Fourier. Comme $s_{n,m}(f)$ tend vers f au sens des distributions quand n et m tendent vers l'infini, $s_{n,m}(f)^{(p)}$ tend vers $f^{(p)}$ au sens des distributions par le théorème 7.2. Dérivant terme à terme $s_{n,m}(f)$ (définition 7.3), on obtient

$$f^{(p)} = \sum_k (ik)^p c_k(f) e^{ikt},$$

la convergence de la série se faisant au sens des distributions dans \mathbb{R} . \circ

On remarquera que la dimension n'intervient pas dans les arguments précédents. On peut donc étendre le résultat par exemple aux séries doubles de Fourier, dans \mathbb{R}^2 .

Corollaire 7.1 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 , $2\pi \times 2\pi$ -périodique et telle que $f \in L^2([0, 2\pi]^2)$. On a le droit de dériver la série de Fourier de f autant de fois que l'on veut et on a donc en posant $\mathbf{p} = (p, q)$, $\mathbf{m} = (m, n)$, $\mathbf{x} = (x, y)$,

$$\partial^{\mathbf{p}} f = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} (im)^p (in)^q c_{\mathbf{m}}(f) e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}, \quad (7.4)$$

cette égalité étant valide comme égalité de deux distributions dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 5 Montrer que si u est une distribution et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors fu définie par

$$\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle$$

est bien une distribution

Exercice 6 Dérivée de la masse de Dirac

Démontrer que dans \mathbb{R} , $x\delta'_0 = -\delta_0$.

Solution On calcule

$$\begin{aligned} \langle x\delta'_0, \varphi \rangle &= \langle \delta'_0, x\varphi \rangle = - \langle \delta_0, (x\varphi)' \rangle = - \langle \delta_0, \varphi + x\varphi' \rangle = \\ &= -\varphi(0) = \langle -\delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

\circ

Proposition 7.2 (Peigne de Dirac et formule sommatoire de Poisson). On pose

$$\langle \tilde{\delta}, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2n\pi).$$

On l'appelle la "2 π -périodisée" de la masse de Dirac, ou "peigne de Dirac". Alors $2\pi\tilde{\delta} - 1 = s'$ est la dérivée de la fonction "en dents de scie", 2π -périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $s(x) = \pi - x$ et on a

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{inx},$$

ce qui se traduit pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ par la formule sommatoire de Poisson,

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \varphi(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \hat{\varphi}(p).$$

(On note $\hat{\varphi}(p) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ipx} dx$.)

Démonstration Par intégration par parties, pour $n \neq 0$, $c_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) e^{inx} dx = \frac{1}{in}$. Donc le développement en série de Fourier de s est

$$s = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{in} e^{inx},$$

la convergence se faisant au sens L_{loc}^2 , donc aussi au sens L_{loc}^1 et donc aussi au sens des distributions. On dérive terme à terme cette dernière formule (au sens des distributions, formule (7.3)) et on obtient donc

$$s' = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{inx}.$$

La formule des sauts (théorème 7.3) nous donne $s' = -1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi \delta_{2\pi n}$, les sauts de s aux points $2\pi n$ étant de $+2\pi$ et s étant \mathcal{C}^1 aux autres points et de dérivée ponctuelle égale à -1 . On obtient donc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi \delta_{2\pi n} = 1 + \sum_{n \neq 0} e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx},$$

soit la formule annoncée,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx}.$$

La formule de Poisson s'obtient en appliquant cette dernière formule à une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ arbitraire. \circ

7.2 Espaces de Sobolev périodiques $H_{per}^m(0, 2\pi)$

Définition 7.4 On appelle espace de Sobolev périodique d'ordre $m \geq 1$ et on note $H_{per}^m(0, 2\pi)$ l'ensemble des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} , appartenant à $L^2(0, 2\pi)$ et telles que leurs dérivées au sens des distributions d'ordre $1, \dots, m$ appartiennent aussi à $L^2(0, 2\pi)$. On le munit de la norme

$$\|u\|_{H_{per}^m} = \left(\sum_{n \leq m} \|u^{(n)}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

associée au produit hermitien

$$(u, v)_{H_{per}^m} = \sum_{n \leq m} \int_{[0, 2\pi]} u^{(n)}(x) \overline{v^{(n)}(x)} dx.$$

Les espaces $H_{per}^m(0, 2\pi)$ sont particulièrement faciles à étudier grâce au fait qu'ils sont caractérisés par le comportement de leur série de Fourier. Dans toute la suite de ce chapitre, on note $I =]0, 2\pi[$.

Proposition 7.3 Si $u \in H_{per}^m$, alors pour tout $n \leq m$, les coefficients de $u^{(n)}$ vérifient

$$c_k(u^{(n)}) = (ik)^n c_k(u).$$

Démonstration En effet, on a vu que si $u \in L^2(I)$ on peut écrire

$$u = \sum_k c_k(u) e^{ikt},$$

où les $c_k(u)$ sont les coefficients de Fourier de u , et cette égalité est valable dans $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ à condition de périodiser u . En conséquence,

$$u^{(n)} = \sum_k c_k(u) (ik)^n e^{ikt},$$

la convergence se faisant au sens des distributions dans \mathbb{R} . Comme on a supposé que $u^{(n)}$ est dans $L^2(I)$, $u^{(n)}$ admet un développement en série de Fourier dont les coefficients $(c_k(u^{(n)}))_k$ appartiennent à $L^2(\mathbb{Z})$. Par unicité du développement de Fourier pour une distribution (qui sera montrée plus tard : théorème 7.8), on a

$$c_k(u) (ik)^n = c_k(u^{(n)}).$$

◊

Proposition 7.4 *Les fonctions de $H^m_{per}([0, 2\pi])$ appartiennent à $C^{m-1}(\mathbb{R})$. En particulier, les fonctions de $H^1_{per}([0, 2\pi])$ sont continues.*

Démonstration Prenons $m = 1$. Alors $c_k(u) = \frac{1}{ik} c_k(u')$ est le produit de deux séries appartenant à $l^2(\mathbb{Z})$. Donc $c_k(u) \in l^1$ et donc la série $\sum_k c_k e^{ikt}$ converge uniformément sur \mathbb{R} . La limite est donc continue et donc u est continue (ou, pour être exact, u est égale presque partout à une fonction continue et est donc continue). On peut alors raisonner par récurrence, en remarquant que si u est dans $H^m_{per}([0, 2\pi])$, alors $u^{(m-1)}$ est dans $H^1_{per}([0, 2\pi])$. ◊

Proposition 7.5 *Les espaces $H^m_{per}(0, 2\pi)$ sont des espaces de Hilbert et leur norme peut s'écrire*

$$\|u\|_{H^m_{per}}^2 = \sum_{n \leq m} \|u^{(n)}\|_{L^2}^2 = \sum_k |c_k(u)|^2 (1 + |k|^2 + \dots + |k|^{2m}).$$

Une norme hilbertienne équivalente est $\|u\|_{H^m_{per}}^2 = \sum_k |c_k(u)|^2 (1 + |k|^{2m})$.

Démonstration L'application $u \in H^m_{per}([0, 2\pi]) \rightarrow (c_k(u)(1 + |k|^2 + \dots + |k|^{2m})^{\frac{1}{2}})$ est une isométrie de $H^m_{per}(0, 2\pi)$ sur $l^2(\mathbb{Z})$ qui est un espace de Hilbert. $H^m_{per}([0, 2\pi])$ est donc aussi un espace de Hilbert. L'équivalence des normes est immédiate. ◊

Théorème 7.4 (première application) *On considère le problème de l'élastique chargé,*

$$-u'' = f, \quad u(0) = v(2\pi) = 0, \quad (7.5)$$

où $f \in L^2([0, 2\pi])$. Alors il existe une unique $u \in L^2([0, 2\pi])$ solution (au sens des distributions !) de (7.5). Cette solution appartient en fait à $H^2_{per}([-2\pi, 2\pi])$ (fonctions 4π périodiques).

Démonstration Pour avoir de manière naturelle les conditions aux limites $u(0) = u(2\pi) = 0$, il est convenable d'exprimer u et f sur la base en sinus ($\sin(\frac{kt}{2})$), $k \in \mathbb{N}^*$, puisque cela revient à implicitement étendre u et f en des fonctions impaires sur $[-2\pi, 2\pi]$. Leur série de Fourier sur $[-2\pi, 2\pi]$ donne par un simple réarrangement une décomposition de u et f sur la base en sinus. On développe donc u et f dans cette base de Fourier et on identifie les coefficients de Fourier à droite et à gauche de l'équation, comme on le peut en vertu de l'unicité des coefficients de Fourier d'une distribution. (Cette unicité entraîne immédiatement l'unicité des coefficients sur la base en sinus, puisque les coefficients en sinus de u ne sont autres que les coefficients de Fourier classiques sur $[-2\pi, 2\pi]$ de u prolongée en une fonction impaire). On pose donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $c_k(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin \frac{kt}{2} dt$ et on a $u = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} c_k(u) \sin \frac{kt}{2}$ et une relation du même type pour f . L'équation (7.5) est alors équivalente à

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{k^2}{4} c_k(u) = c_k(f), \text{ soit}$$

$$c_k(u) = 4 \frac{c_k(f)}{k^2}.$$

Donc $u = 4 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{c_k(f)}{k^2} \sin \frac{k}{2} t$, qui appartient bien à $H_{per}^2([-2\pi, 2\pi])$. Remarquer que u n'est pas nécessairement \mathcal{C}^2 et que donc l'équation n'a pas de sens classique! Par contre, comme $u \in H_{per}^2$, u est \mathcal{C}^1 . Et comme u est impaire, on a bien $u(0) = u(2\pi) = 0$. \circ

7.3 Espaces de Sobolev en dimension 2

Nous généralisons ici les définitions et propriétés précédentes à la dimension 2. Une fonction u de \mathbb{R}^2 est dite 2π -périodique si elle est 2π -périodique en chacune de ses variables.

Définition 7.5 On appelle espace de Sobolev périodique d'ordre m et on note $H_{per}^m([0, 2\pi]^2)$ l'ensemble des fonctions u , 2π périodiques sur \mathbb{R}^2 , appartenant à $L^2([0, 2\pi]^2)$ et telles que leurs dérivées (au sens des distributions) $\partial^{\mathbf{i}} u$, d'ordre total $|\mathbf{i}| \leq m$ inférieur ou égal à m , à $L^2([0, 2\pi]^2)$. On munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{H_{per}^m} = \left(\sum_{|\mathbf{i}| \leq m} \|\partial^{\mathbf{i}} u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

associée au produit hermitien

$$(u, v)_{H_{per}^m} = \int_{[0, 2\pi]^2} \sum_{|\mathbf{i}| \leq m} \partial^{\mathbf{i}} u(\mathbf{x}) \partial^{\mathbf{i}} \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

On a alors l'équivalent de la proposition 7.5 (la preuve est identique à celle de la dimension 1) :

Proposition 7.6 Les espaces $H_{per}^m([0, 2\pi]^2)$ sont des espaces de Hilbert et ont pour norme équivalente

$$\|u\|_{H_{per}^m}^2 = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{n}}(u)|^2 (1 + \mathbf{n}^2)^m.$$

Proposition 7.7 Les fonctions de $H_{per}^m([0, 2\pi]^2)$ appartiennent à $C^{m-2}(\mathbb{R}^2)$. En particulier, les fonctions de $H_{per}^2([0, 2\pi]^2)$ sont continues.

Démonstration Prenons $m = 2$ et posons $d_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}}(1 + \mathbf{k}^2)$. Alors $c_{\mathbf{k}} = \frac{d_{\mathbf{k}}}{1 + \mathbf{k}^2}$ est le produit de deux séries appartenant à $l^2(\mathbb{Z}^2)$. Donc $c_{\mathbf{k}}(u) \in l^1(\mathbb{Z}^2)$ et donc la série $\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ converge uniformément sur \mathbb{R}^2 . La limite est donc continue et donc u est continue. On peut alors raisonner par récurrence, en remarquant que si u est dans H_{per}^m , alors ses dérivées d'ordre $m - 2$ sont dans H_{per}^2 . \circ

7.3.1 Equations de Poisson et de Laplace

On note le Laplacien d'une fonction u ,

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy}.$$

Théorème 7.5 Soit f une fonction dans $L^2([0, 2\pi]^2)$, que l'on assimile à une source de chaleur. On considère l'équation de Poisson sur un carré en conditions isothermes, à savoir que la température sur le bord du carré est fixée à 0, ce l'on appelle encore **équation de Poisson avec condition de Dirichlet**. On notera $\Omega = [0, 2\pi]^2$ et $\partial\Omega$ son bord. L'équation, où u représente la température dans le carré, s'écrit

$$-\Delta u = f, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (7.6)$$

où $f \in L^2([0, 2\pi]^2)$. Alors il existe une unique $u \in L^2([0, 2\pi]^2)$ solution (au sens des distributions!) de (7.6). Cette solution est en fait une fonction impaire appartenant à $H_{per}^2([-2\pi, 2\pi]^2)$ (fonctions 4π périodiques).

Démonstration Pour avoir de manière naturelle la condition aux limites $u = 0$, il est convenable d'utiliser la base en sinus $(\sin(\frac{kx}{2})\sin(\frac{ly}{2}))$, $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On rappelle que cela revient à étendre u et f en des fonctions impaires par rapport aux deux variables sur $[-2\pi, 2\pi]^2$. Leur série de Fourier sur $[-2\pi, 2\pi]^2$ donne par un simple réarrangement une décomposition de u et f sur la base en sinus. On développe u et f dans cette base de Fourier et on identifie les coefficients de Fourier à droite et à gauche de l'équation, comme on le peut en vertu de l'unicité des coefficients de Fourier d'une distribution. (Cette unicité entraîne immédiatement l'unicité des coefficients sur la base en sinus, puisque les coefficients en sinus de u ne sont autres que les coefficients de Fourier classiques sur $[-2\pi, 2\pi]^2$ de u prolongée en une fonction impaire). On pose donc pour $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $c_{k,l}(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{[0, 2\pi]^2} u(t) \sin \frac{kt}{2} \sin \frac{ls}{2} ds dt$ et on a $u = \sum_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2} c_{k,l}(u) \sin \frac{kt}{2} \sin \frac{ls}{2}$ et une relation du même type pour f . L'équation (7.5) est alors équivalente à

$$\forall k, l \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \frac{1}{4}(k^2 + l^2)c_{k,l}(u) = c_{k,l}(f), \text{ soit}$$

$$c_{k,l}(u) = \frac{4c_{k,l}(f)}{k^2 + l^2}.$$

Donc $u(x, y) = \sum_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{4c_{k,l}(f)}{k^2 + l^2} \sin \frac{k}{2}x \sin \frac{l}{2}y$, qui appartient bien à $H_{per}^2([0, 2\pi]^2)$. Remarque que u n'est pas nécessairement \mathcal{C}^2 et que donc l'équation n'a pas de sens classique! Par contre, comme $u \in H_{per}^2([0, 2\pi]^2)$, u est \mathcal{C}^0 . Comme u est impaire, on a bien $u(x, y) = 0$ sur $\partial\Omega$. \circ

Dans la suite on note $\frac{\partial u}{\partial n}$ la *dérivée normale de u sur le bord*, à savoir que $\frac{\partial u}{\partial n}(0, x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(0, x)$, $\frac{\partial u}{\partial n}(2\pi, x) = \frac{\partial u}{\partial y}(2\pi, x)$, etc. La manière la plus simple de réaliser $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ est

de considérer des fonctions paires en les deux variables, 4π -périodiques également en les deux variables. Ainsi, on a $u(-x, y) = u(x, y)$, $u(x, -y) = u(x, y)$ pour $(x, y) \in \Omega$, et u étant 4π périodique on vérifie facilement que si u est C^1 , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Exercice 7 Faire ces vérifications!

Corollaire 7.2 Soit f une fonction dans $L^2([0, 2\pi]^2)$, que l'on assimile à une source de chaleur, vérifiant $\int_{[0, 2\pi]^2} f(x, y) dx dy = 0$. On considère l'équation de Poisson sur un carré avec condition de bord adiabatique, à savoir que le flux de chaleur à travers le bord du carré est fixé à 0, ce l'on appelle encore **équation de Poisson avec condition de Neumann**. On notera $\Omega = [0, 2\pi]^2$ et $\partial\Omega$ son bord. L'équation, où u représente la température dans le carré, s'écrit

$$-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (7.7)$$

où $f \in L^2([0, 2\pi]^2)$. Alors il existe une solution $u \in L^2([0, 2\pi]^2)$ solution (au sens des distributions!) de (7.7). La solution vérifie $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ au sens qu'elle est paire. Cette solution est unique à une constante additive près, et appartient à $H_{per}^2([-2\pi, 2\pi]^2)$ (fonctions 4π périodiques).

Démonstration Pour avoir de manière naturelle la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, il est maintenant convenable d'utiliser la base en cosinus $(\cos(\frac{kx}{2})\cos(\frac{ly}{2}))$, $(k, l) \in (\mathbb{N})^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Décomposer u et f sur cette base les étend naturellement en des fonctions paires par rapport aux deux variables sur $[-2\pi, 2\pi]^2$. On identifie les coefficients de Fourier à droite et à gauche de l'équation, comme on le peut en vertu de l'unicité des coefficients de Fourier d'une distribution. (Cette unicité entraîne immédiatement l'unicité des coefficients sur la base en cosinus, puisque les coefficients en cosinus de u ne sont autres que les coefficients de Fourier classiques sur $[-2\pi, 2\pi]^2$ de u prolongée en une fonction paire). On pose donc pour $(k, l) \in (\mathbb{N})^2$, $c_{k,l}(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} c(k)c(l) \int_{[0, 2\pi]^2} u(t) \cos \frac{kt}{2} \cos \frac{ls}{2} ds dt$ où $c(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}$ si $k = 0$ et $c(k) = \frac{1}{\pi^2}$ sinon. On a alors

$$u = \sum_{(k,l) \in (\mathbb{N})^2} c_{k,l}(u) \cos \frac{kt}{2} \cos \frac{ls}{2}$$

et une relation du même type pour f . L'équation (7.5) est alors équivalente à

$$\forall k, l \in (\mathbb{N})^2, \quad \frac{1}{4}(k^2 + l^2)c_{k,l}(u) = c_{k,l}(f), \text{ soit}$$

$$c_{k,l}(u) = \frac{4c_{k,l}(f)}{k^2 + l^2} \text{ pour } (k, l) \neq (0, 0).$$

(Rappelons que f est d'intégrale nulle et donc $c_{0,0}(f) = 0$) Donc $u(x, y) = c + \sum_{(k,l) \in (\mathbb{N})^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{4c_{k,l}(f)}{k^2 + l^2} \cos \frac{kx}{2} \cos \frac{ly}{2}$, qui appartient bien à H_{per}^2 . La constante c n'est pas déterminée par le système d'équations et reste donc un degré de liberté. Remarquer que u n'est pas nécessairement C^2 et que donc l'équation n'a pas de sens classique! Par contre, comme $u \in H_{per}^2$, u est C^0 . De plus u est paire, ce qui signifie que $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0$ sur $\partial\Omega$. \circ

7.4 Lemme de Lax-Milgram

Théorème 7.6 On considère une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour un espace de Hilbert H . Alors a est continue si et seulement si il existe une constante C telle que $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$.

Démonstration En effet, comme a est continue en zéro, on a $|a(u, v)| \leq 1$ pour $\|u\|, \|v\| \leq \eta$. On considérant $\frac{u}{\|u\|}$ et $\frac{v}{\|v\|}$ on déduit immédiatement l'inégalité annoncée pour u et v quelconques. Inversement si $|a(u, v)| \leq C\|u\| \cdot \|v\|$, on a par l'inégalité triangulaire

$$|a(u, v) - a(u', v')| \leq |a(u - u', v)| + |a(u', v - v')| \leq C(\|u - u'\| \cdot \|v\| + \|u'\| \cdot \|v - v'\|),$$

ce qui prouve la continuité de a . \circ

On dit qu'une forme bilinéaire symétrique ($a(u, v) = \overline{a(v, u)}$) est *coercive* s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq c\|u\|^2.$$

Exercice 8 Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H . Alors $\|u\|_a := \sqrt{a(u, u)}$ est une norme équivalente à la norme de H .

Beaucoup de problèmes de physique, de mécanique, de traitement du signal ou de l'image se ramènent à minimiser sur H une fonctionnelle d'énergie du type :

$$E(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - (b, u), \quad (7.8)$$

où $b \in H$ et a est bilinéaire, continue et coercive.

Théorème 7.7 Soit H un espace de Hilbert séparable et E une fonctionnelle d'énergie du type (7.8), avec a bilinéaire, symétrique ($a(u, v) = \overline{a(v, u)}$), continue et coercive. Alors il existe un unique u minimisant $E(u)$ sur H . De plus, u est caractérisé par la relation variationnelle

$$\forall v \in H, \operatorname{Re}(a(v, u)) = (b, v). \quad (7.9)$$

Démonstration Supposons d'abord que le minimum u existe. Alors pour tout autre vecteur v dans H on considère $f(t) = E(u + tv) = \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - (b, u + tv)$. En exprimant que $f'(0) = 0$ on obtient $\frac{1}{2}(a(v, u) + a(u, v)) - (b, v) = 0$, ce qui donne (7.9). Montrons que le minimum est unique. S'il y en a deux, u et v , on peut écrire par (7.9),

$$\operatorname{Re}(a(u, v - u)) = (b, v - u) = \operatorname{Re}(a(v, v - u)),$$

ce qui donne $\operatorname{Re}(a(u - v, v - u)) = 0$, ce qui implique $a(u - v, u - v) = 0$ et donc $u = v$, puisque a est coercive. Montrons finalement l'existence de u . Pour cela, on commence par remarquer que $E(u)$ est minorée. En effet par la coercivité et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $E(u) \geq c\|u\|^2 - \|b\| \cdot \|u\|$, qui est une fonction réelle de $\|u\|$ minorée. Donc on peut considérer une suite minimisante u_n pour E , telle que $E(u_n) \rightarrow \inf_{u \in H} E(u)$. On a $E(u_n) \leq E(0) = 0$, et donc par la coercivité $\frac{c}{2}\|u_n\|^2 \leq \|b\| \cdot \|u_n\|$, qui implique $\|u_n\| \leq 2\|b\|$. La suite minimisante u_n est donc bornée dans H . Par la proposition 4.3 il existe donc une sous-suite (que nous noterons encore u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u \in H$. Par la même proposition, appliquée avec la norme $\|u\|_a$, équivalente à la norme $\|u\|$, on obtient $a(u, u) \leq \liminf_n a(u_n, u_n)$. Comme $(b, u_n) \rightarrow (b, u)$ (convergence faible!) il en résulte que

$$E(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - (b, u) \leq \liminf_n \left(\frac{1}{2}a(u_n, u_n) \right) - \lim_n (b, u_n) = \liminf E(u_n) \rightarrow \inf_{v \in H} E(v).$$

Donc u est le minimum de E . \circ

7.5 L'interprétation variationnelle

Proposition 7.8 Soit $\Omega = [0, 2\pi]^2$ et $f \in L^2_{per}(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe une fonction unique u dans $H^1_{per}(\mathbb{R}^2)$ minimisant l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2(x, y) dx dy - \int_{\Omega} f(x, y) u(x, y)$$

et vérifiant $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Cette solution minimale est en fait la restriction à Ω d'une fonction impaire appartenant à $H^2_{per}([-2\pi, 2\pi]^2)$ (fonctions 4π périodiques). Cette solution est la même que celle du problème de Dirichlet

$$-\Delta u = f, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Démonstration Pour avoir automatiquement la condition de bord, considérons la base en sinus de $L^2_{per}([0, 2\pi])$, $\frac{1}{\pi^2} \sin \frac{kx}{2} \sin \frac{ly}{2}$. Dans cette base on a pour $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $c_{k,l}(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{[0, 2\pi]^2} u(t) \sin \frac{kt}{2} \sin \frac{ls}{2} ds dt$ et $u = \sum_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2} c_{k,l}(u) \sin \frac{kt}{2} \sin \frac{ls}{2}$, ainsi qu'une relation du même type pour f . En utilisant ces séries de Fourier, l'énergie E devient

$$E(u) = \sum_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{8} (k^2 + l^2) c_{k,l}(u)^2 - c_{k,l}(u) c_{k,l}(f).$$

On a une somme infinie de termes à minimiser, mais chaque terme dépend d'une variable distincte $c_{k,l}(u)$. Si on minimise chaque terme séparément, on obtient par simple dérivation $c_{k,l}(u) = \frac{4}{k^2 + l^2} c_{k,l}(f)$. On reconnaît donc la solution de l'équation de Poisson avec condition de Dirichlet. \circ

7.5.1 L'éditeur de Poisson

Proposition 7.9 Soit $\Omega = [0, 2\pi]^2$ et $V = (v_1, v_2) \in (L^2_{per}(\mathbb{R}^2))^2$ un champ de vecteurs. Alors il existe une fonction unique u dans $H^1_{per}([-2\pi, 2\pi]^2)$ minimisant l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du - V|^2(x, y) dx dy = \int_{\Omega} [(u_x - v_1)^2 + (u_y - v_2)^2] dx dy$$

et vérifiant $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Cette solution minimale est en fait la restriction à Ω d'une fonction paire appartenant à $H^1_{per}([-2\pi, 2\pi]^2)$ (fonctions 4π périodiques). Cette solution est la même que celle du problème de Neumann

$$-\Delta u = -\operatorname{div}(V) = \left(-\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Démonstration Pour avoir de manière naturelle la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, il est convenable d'utiliser la base en cosinus $(\cos(\frac{kx}{2}) \cos(\frac{ly}{2}))$, $(k, l) \in (\mathbb{N})^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Décomposer u , v_1 et v_2 sur cette base les étend naturellement en des fonctions paires par rapport aux deux variables sur $[-2\pi, 2\pi]^2$. On pose donc pour $(k, l) \in (\mathbb{N})^2$, $c_{k,l}(u) = c(k)c(l) \int_{[0, 2\pi]^2} u(t) \cos \frac{kt}{2} \cos \frac{ls}{2} ds dt$ avec $c(k) = \frac{1}{\pi}$ si $k \neq 0$, $c(k) = \frac{1}{2\pi}$ si $k = 0$, et on a $u = \sum_{(k,l) \in (\mathbb{N})^2} c_{k,l}(u) \cos \frac{kt}{2} \cos \frac{ls}{2}$ et une relation du même type pour v_1, v_2 . L'énergie de l'éditeur de Poisson s'écrit donc

$$E(u) = \sum_{(k,l) \in (\mathbb{N})^2} \frac{k}{2} (c_{k,l}(u) - c_{k,l}(v_1))^2 + \frac{l}{2} (c_{k,l}(u) - c_{k,l}(v_2))^2.$$

Cette énergie est une forme quadratique diagonalisée, dépendant des $c_{k,l}$. En minimisant cette énergie composante par composante, on est amenés à minimiser pour chaque k, l le trinôme

$$\left(\frac{k^2}{4} + \frac{l^2}{4}\right)c_{k,l}(u)^2 - (kc_{k,l}(v_1) + lc_{k,l}(v_2))c_{k,l}(u),$$

ce qui donne

$$c_{k,l}(u) = 2 \frac{kc_{k,l}(v_1) + lc_{k,l}(v_2)}{k^2 + l^2}, \quad \forall (k, l) \neq (0, 0).$$

Remarquons que la solution ainsi obtenue est bien dans $H_{per}^1(\Omega)$. En effet la série $\frac{k}{2}c_{k,l}(u)$ est bien quadratiquement convergente, donc $\frac{\partial u}{\partial x}$ est bien dans L_{per}^2 , et la même chose vaut pour $\frac{\partial u}{\partial y}$. De plus, tous les $c_{k,l}(u)$ sont uniquement déterminés pour le minimum sauf $c_{0,0}(u)$ qui reste libre, puisque si u est solution $u + C$ l'est aussi pour toute constante.

Donc la solution est

$$u(x, y) = c + \sum_{(k,l) \in (\mathbb{N}^2) \setminus \{(0,0)\}} 2 \frac{kc_{k,l}(v_1) + lc_{k,l}(v_2)}{k^2 + l^2} \cos \frac{k}{2} x \cos \frac{l}{2} y,$$

et appartient à H_{per}^1 . La constante c n'est pas déterminée par le système d'équations et reste donc un degré de liberté.

◊

Proposition 7.10 *La solution u de l'équation de Poisson à champ de gradient prescrit $V = (v_1, v_2)$ vérifie au sens des distributions l'équation*

$$\Delta u = \operatorname{div}(V).$$

Démonstration On fait un raisonnement perturbatif en prenant une perturbation $t\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. On a pour le minimum u et pour tout t et tout φ :

$$\int (D(u + t\varphi) - V)^2 \geq \int (Du - V)^2.$$

En exprimant que la dérivée de ce trinôme en t est nulle pour $t = 0$ on obtient

$$\int (Du - V) \cdot D\varphi = \int (u_x - v_1)\varphi_x + \int (u_y - v_2)\varphi_y = 0,$$

que l'on peut écrire, comme u_x, u_y, v_1, v_2 sont dans L_{loc}^2 et donc sont des distributions :

$$\langle u_x - v_1, \varphi_x \rangle + \langle u_y - v_2, \varphi_y \rangle = 0,$$

soit encore en utilisant la définition de dérivée au sens des distributions,

$$\langle u_{xx} - (v_1)_x, \varphi \rangle + \langle u_{yy} - (v_2)_y, \varphi \rangle = 0,$$

et donc

$$\Delta u - \operatorname{div}(V) = 0.$$

◊

7.6 La décomposition périodique+régulier

Proposition 7.11 Soit $u \in H^2([0, 2\pi]^2)$. On périodise $\Delta v \in L^2([0, 2\pi]^2)$. Alors il y a une fonction $v \in H_{per}^2([0, 2\pi]^2)$ telle que $\Delta v = \Delta u$ sur $[0, 2\pi]^2$. Cette fonction est unique à une constante additive près. La différence $w = v - u$ vérifie donc $\Delta w = 0$ et est donc régulière sur $[0, 2\pi]^2$.

Démonstration On utilise la base de Fourier standard sur $[0, 2\pi]^2$ et on décompose donc u et $\Delta u \in L^2([0, 2\pi]^2)$ dans cette base. On a donc

$$-(k^2 + l^2)c_{k,l}(v) = c_{k,l}(\Delta u),$$

ce qui donne

$$v = - \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{c_{k,l}(\Delta u)}{k^2 + l^2}.$$

Ceci détermine de manière unique tous les coefficients de Fourier de v sauf le coefficient constant $c_{0,0}(v)$, qui peut être fixé de manière arbitraire. \circ

La décomposition précédente permet de visualiser le spectre de u “débarrassé” de ses effets de bord : on visualise le spectre de v , qui est une version périodisée de u qui en a gardé intuitivement tous les détails à l’intérieur de l’image, puisque son laplacien a été conservé.

7.7 Unicité des coefficients de Fourier

Définition 7.6 et proposition (partition périodique de l’unité) Il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \chi(\mathbf{x} + 2\mathbf{k}\pi) = 1. \quad (7.10)$$

Démonstration S Il suffit de prendre $\varphi \in C_0^\infty$ positive ou nulle partout et strictement positive sur $[0, 2\pi]^2$, puis de poser $\chi(\mathbf{x}) = \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \varphi(\mathbf{x} + 2\pi\mathbf{k})}$. Comme le support de φ est compact, la somme au dénominateur est une somme finie pour chaque x . \circ

Lemme 7.2 Soit $\varphi \in C_0^\infty$ une fonction test et $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \varphi(\mathbf{x} + 2\pi\mathbf{k})$ sa périodisée. Alors le développement en série de Fourier de $\tilde{\varphi}$ peut s’écrire sous la forme

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{m}}(\tilde{\varphi}) e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} \text{ avec } c_{\mathbf{m}}(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (7.11)$$

Démonstration Les coefficients de Fourier de $\tilde{\varphi}$ sont

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{m}}(\tilde{\varphi}) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{[0, 2\pi]^2} \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{[0, 2\pi]^2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \varphi(\mathbf{x} + 2\pi\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} + 2\pi\mathbf{k})} d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0, 2\pi]^2 + 2\pi\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

\circ

Corollaire 7.3 Pour tout $\mathbf{m}_0 \in \mathbb{Z}^2$, il existe une fonction $\varphi \in C_0^\infty$ telle que

$$\forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2, \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \delta_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}. \quad (7.12)$$

Démonstration Il suffit de prendre $\varphi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{x}}$, où $\chi(\mathbf{x})$ définit une partition de l'unité. On a alors $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = e^{-i\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{x}}$. On applique à $\tilde{\varphi}$ le lemme 7.2. Par unicité des coefficients de Fourier de $\tilde{\varphi}$, on obtient (7.12). \circ

Théorème 7.8 (Unicité des coefficients de Fourier) Si u est une distribution admettant un développement en série de Fourier $u = \sum_{\mathbf{m} \in \Gamma^*} c_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} = 0$, alors $\forall \mathbf{m}, c_{\mathbf{m}} = 0$.

Démonstration Pour tout $\varphi \in C_0^\infty$,

$$\left\langle \sum_{\mathbf{m}} c_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}, \varphi \right\rangle = \sum_{\mathbf{m}} c_{\mathbf{m}} \left\langle e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}, \varphi \right\rangle = \sum_{\mathbf{m}} c_{\mathbf{m}} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Le théorème résulte alors immédiatement en choisissant φ comme indiqué dans le Corollaire 7.3. \circ

7.8 Visualisation de fonctions dans les espaces de Sobolev

Exemple de fonction continue et juste en dehors de H_{per}^1 Afin de donner une idée concrète du type de fonction appartenant à l'espace H_{per}^1 , nous allons donner plusieurs exemples de fonctions dont le module des coefficients de Fourier décroît à une vitesse donnée, ce qui caractérise leur appartenance à ces espaces. Dans le cas de la dimension 1, nous montrons, figure 7.1, trois exemples de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dont les coefficients vérifient $|c_k(f)| = (|k| + 1)^{-\alpha}$, avec respectivement $\alpha = 1, 0,1$, $\alpha = 1,5$, $\alpha = 2$. Remarquons qu'une fonction avec de tels coefficients est continue si $\alpha > 1$, car alors la série $\sum |c_k|$ converge, et qu'il y a donc convergence uniforme de la série de Fourier. D'autre part, la fonction est dans H_{per}^1 dès que $\alpha > \frac{3}{2}$, en vertu de la proposition 7.5, et n'y appartient pas dans le cas contraire. Dans le cas des fonctions de la figure 7.1, seule la dernière fonction est dans H_1 , la deuxième étant "juste en dehors" de cet espace. Numériquement, ces fonctions sont discrètes, c'est à dire que leurs valeurs ne sont connues qu'en un nombre fini de points, et sont obtenues par Transformée de Fourier Discrète inverse (voir le paragraphe 6.1). Un signal dont les termes décroissent en k^α est généré, puis ses termes sont multipliés par des phases (nombres complexes de module 1) aléatoires (uniformément tirées pour les expériences présentées) respectant les propriétés de symétrie des transformées de Fourier des signaux réels (voir le paragraphe 6.1). Les fonctions sont alors obtenues par transformée de Fourier inverse.

Images dans un espace de Sobolev Si une fonction u de $L^2(I^2)$ a les coefficients $c_{i,j}$ de sa série de Fourier tels que la série $\sum_{i,j} |c_{i,j}(u)|^2 (1 + i^2 + j^2)$ diverge, elle n'est pas dans H_{per}^1 . La figure 7.2 présente plusieurs exemples de fonctions u dont les coefficients de Fourier vérifient $|c_{i,j}| = \frac{1}{1+(i^2+j^2)^{\alpha/2}}$. Ces fonctions sont continues

(leur série de Fourier converge uniformément) si $\alpha > 1$, et ces fonctions ne sont pas dans l'espace H_{per}^1 si $\alpha < 1.5$, d'après la proposition 7.6. Comme en dimension 1, ces images sont obtenues par Transformation de Fourier Discrète inverse, en imposant le module des coefficients de la transformée, et en tirant des phases aléatoires.

7.9 Exercices

Exercice 9

1) Les applications suivantes définissent-elles des distributions sur \mathbb{R} ?

$$\varphi \rightarrow \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(n), \quad \varphi \rightarrow \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(0).$$

2) Soit $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, montrer que $T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi$ est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et qu'il n'existe pas $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ telle que $\delta_0 = T_f$.

Définition : Les distributions du type T_f sont appelées "fonctions".

Rappel :

Pour K compact de \mathbb{R} , on note $\mathcal{C}_{c,K}^\infty(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } \varphi \in K\}$ qui est naturellement muni de la topologie définie par la famille de semi-normes $p_j(\varphi) = \sup_{m \leq j} \sup_K |\varphi^{(m)}(x)|$. On rappelle qu'une partie U de $\mathcal{C}_{c,K}^\infty(\mathbb{R})$ est ouverte si ou bien $U = \emptyset$ ou bien $\forall \varphi \in U, \exists j, r$ tels que la boule $B_j(\varphi, r) = \{\psi \in \mathcal{C}_{c,K}^\infty(\mathbb{R}), p_j(\varphi - \psi) < r\} \subset U$. (on pourra vérifier que l'on définit bien ainsi une topologie.)

Exercice 10

Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ la suite $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge vers une limite que l'on note $\langle T, \varphi \rangle$, on veut montrer que la forme linéaire T est une distribution.

Avec les notations du rappel, on pose $E = \mathcal{C}_{c,K}^\infty(\mathbb{R})$ et

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \inf(1, p_n(f - g)).$$

1) Vérifier que d est une distance sur E . Montrer que sur E , la topologie de la distance d est équivalente à la topologie définie par la famille de semi-normes $(p_n)_n$.

2) Vérifier que (E, d) est complet. On pose $F_k = \{\varphi \in E : \forall n, |\langle T_n, \varphi \rangle| \leq k\}$. Montrer que $\exists k_0, i_0, \varphi, r$ tels que $B_{i_0}(\varphi, r) \subset F_{k_0}$. En déduire que T est continue sur E et donc que T est bien une distribution.

Remarque : On peut remplacer \mathbb{R} par un ouvert quelconque de \mathbb{R}^N .

Exercice 11

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\theta_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que $\int_I \theta_0 = 1$.

a) Vérifier que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \exists (\lambda, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_c^\infty(I)$ tel que $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$.

b) En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' = 0$ alors T est une fonction constante.

c) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' \in \mathcal{C}^\infty(I)$, montrer que $T \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exercice 12

Soit ψ solution de $\sum_{j=0}^k a_j \psi^{(j)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, où $a_j \in \mathbb{R}$ et $a_k \neq 0$, satisfaisant

$$\psi(0) = \psi'(0) = \dots = \psi^{(k-2)}(0) = 0 \text{ et } \psi^{(k-1)}(0) = \frac{1}{a_k}.$$

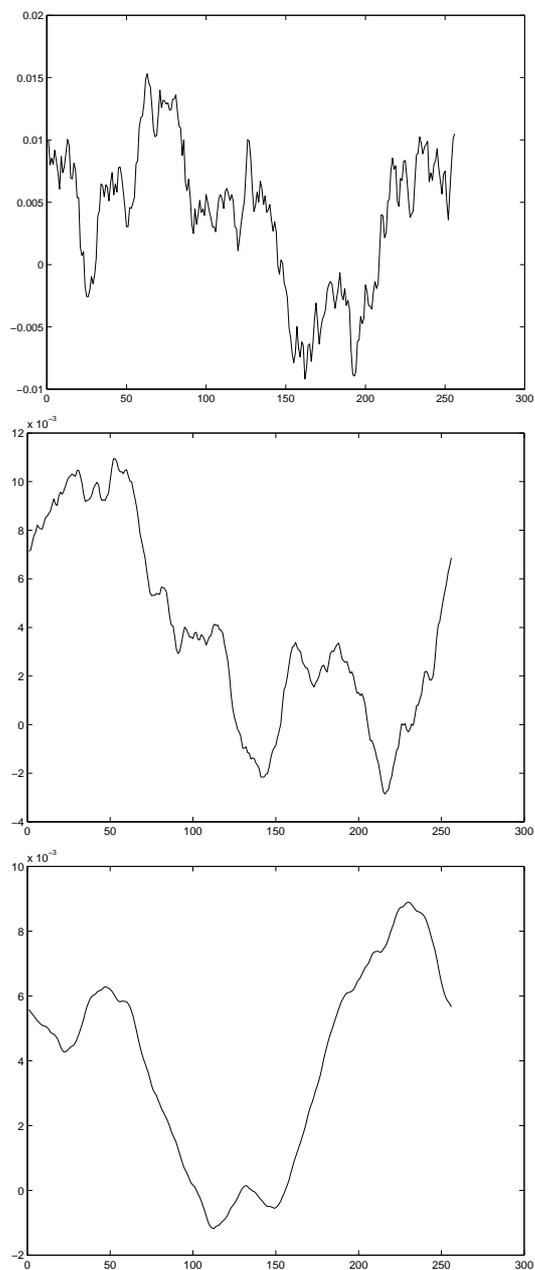


FIGURE 7.1 – Fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont les coefficients de Fourier vérifient $|c_k(f)| = (k + 1)^{-\alpha}$. Les arguments des $c_k(f)$ sont des variables aléatoires indépendamment et uniformément distribués sur $[0, 2\pi]$. Haut : $\alpha = 1$, la fonction est en dehors de H_{per}^1 , milieu : $\alpha = 1,5$, et la fonction est donc “juste” en dehors de l’espace H_{per}^1 , bas : $\alpha = 2$, la fonction est dans H_{per}^1 .

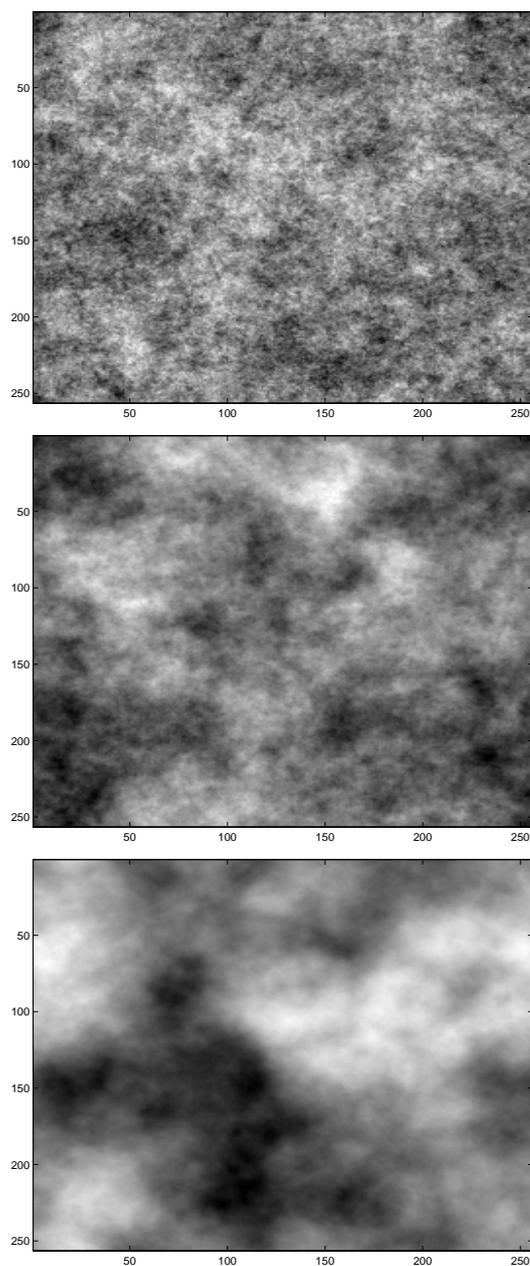


FIGURE 7.2 – fonctions continues dont les coefficients de Fourier vérifient $|c_{i,j}| = (1+i^2+j^2)^{-\alpha/2}$. Les arguments des $c_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendamment et uniformément distribuées sur $[0, 2\pi]$. Haut : $\alpha = 1$, la fonction est en dehors de H_{per}^1 , milieu : $\alpha = 1.5$, et la fonction est donc “juste” en dehors de l’espace H_{per}^1 , bas : $\alpha = 2$, la fonction est dans H_{per}^1 .

- 1) Soit $Y = 1_{\mathbb{R}^+}$, on pose $E = T_{Y\psi}$. Vérifier que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer $\sum_{j=0}^k a_j E^{(j)}$.
- 2) Donner une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $E'' + E' + E = \delta_0$.

Exercices sur les distributions (2)**Exercice 13** Les applications suivantes définissent-elles des distributions sur \mathbb{R} ?

$$\varphi \rightarrow \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(n);$$

$$\varphi \rightarrow \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(0).$$

Exercice 14 Calculer la dérivée au sens des distributions dans \mathbb{R} des fonctions suivantes :

- 1) La fonction de Heaviside.
- 2) La valeur absolue $x \rightarrow |x|$.
- 3) La racine carrée $x \rightarrow \sqrt{|x|}$. La formule des sauts s'applique-t-elle à cette fonction ? Si ce n'est pas le cas, généraliser les hypothèses de la formule des sauts pour qu'elle s'applique.
- 4) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que la limite $T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(y)}{2|x|^{\frac{3}{2}}} dy$ existe. Vérifier que T est une distribution.
- 5) Exprimer la dérivée au sens des distributions de la fonction $u(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Est-ce que cette dérivée est une fonction ? En utilisant la question précédente exprimer u' comme la limite d'une intégrale simple.

Exercice 15 On considère la fonction de Heaviside dans \mathbb{R}^2 , $h(x, y) = 1$ pour $x \geq 0$, $h(x, y) = 0$ sinon.

- 1) Calculer $\frac{\partial h}{\partial x}$. Interpréter le résultat en utilisant la mesure produit sur \mathbb{R}^2 , $\delta_0 \otimes \lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .
- 2) Mêmes questions avec $c(x, y) = 1$ si $x^2 + y^2 \leq 1$, $c(x, y) = 0$ sinon. On introduira la mesure vectorielle \vec{n} uniforme supportée par le cercle unité et orientée dans la direction de la normale, définie pour $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ par $\vec{n}(\varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$.

Exercice 16 On pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = (-1)^n$ si $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

- 1) Dessiner f .
- 2) Calculer f' . La formule des sauts s'applique-t-elle ? Donner une généralisation de la formule des sauts qui puisse s'appliquer à un cas de ce type, à savoir à une fonction bornée ayant un nombre dénombrable de sauts s'accumulant en un point.

Exercice 17 On pose dans \mathbb{R}^2 $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \ln r$.

- 1) Est-ce une distribution ?
- 2) Pour $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ démontrer la formule du Laplacien en coordonnées polaires : $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.
- 3) Calculer $\Delta f(x, y)$ pour $(x, y) \neq 0$ (dérivée classique).
- 4) Montrer que $\Delta f = 2\pi\delta_0$ (au sens des distributions).

Exercice 18 Théorème de densité.

1) Montrer que C_{per}^∞ est dense dans $H^m([0, 2\pi]^2)$, pour tout $m \geq 0$.

Indication : tronquer le développement en série de Fourier de $u \in H^m([0, 2\pi]^2)$ et montrer que la somme u_N série tronquée obtenue en gardant que les coefficients de fréquence plus petite que N est bien dans C_{per}^∞ . Montrer alors que u_N tend dans $H^m([0, 2\pi]^2)$ vers u .

2) Mêmes questions pour $H_{per}^m([0, 2\pi])$. Montrer de plus que la convergence de u_N vers u est uniforme si $m \geq 1$, et que u est donc continue.

3) En déduire la généralisation suivante de la formule d'intégration par parties : si u et v sont dans $H_{per}^1([0, 2\pi])$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'$.

Exercice 19 On note $\Omega = [0, 2\pi]^2$ et $\partial\Omega$ son bord. Supposons que $u \in C_{per}^\infty([0, 2\pi]^2)$. On note $u(x_0, \cdot)$ la restriction, ou "trace" de u au segment $\{x_0\} \times [0, 2\pi]$, $u(\cdot, y_0)$ sa trace sur le segment $[0, 2\pi] \times \{y_0\}$. L'objectif de l'exercice est de montrer que si $u \in H^1([0, 2\pi]^2)$, alors u a une trace bien définie sur chaque segment du domaine, et en particulier sur le bord du domaine qui est l'union des quatre segments.

1) En utilisant que

$$u(x_0, y) = u(x, y) + \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial x}(t, y) dt, \text{ déduire que}$$

$$|u(x_0, y)| \leq |u(x, y)| + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_0}^x \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Par des intégrations adéquates, déduire qu'il existe une constante C telle que

$$\|u(x_0, \cdot)\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 = \int_{[0, 2\pi]} |u(x_0, y)|^2 dy \leq C \|u\|_{H_{per}^1([0, 2\pi]^2)}^2.$$

2) Théorème de trace : utilisant la densité de C_0^∞ dans H^1 , en déduire que si u est dans $H^1([0, 2\pi]^2)$, u a un représentant qui vérifie l'inégalité de trace pour tout x_0, y_0 , et en particulier sur le bord de $[0, 2\pi]^2$.

Exercice 20 L'espace $H_{per}^{-1}(\mathbb{R})$

1) On considère l'espace $H_{per}^{-1}(\mathbb{R})$ des distributions de la forme $u = \sum_k c_k e^{ikx}$ avec $\frac{c_k}{k} \in l^2(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Expliquer la notation $H_{per}^{-1}(\mathbb{R})$, en comparant avec $H_{per}^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que l'on peut écrire u de manière unique sous la forme $u = C + g'$, où C est une constante et $g \in L_{per}^2$.

3) Réciproquement, montrer que si $u = f + g'$, avec $f, g \in L_{per}^2$, alors $u \in H_{per}^{-1}(\mathbb{R})$.

4) On munit $H_{per}^{-1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_{H^{-1}}^2 = 2\pi C^2 + \int_{[0,2\pi]} |g|^2$ où C et g sont définies à la question 2). Exprimer la norme de u dans H^{-1} en fonction de ses coefficients de Fourier $c_k(u)$.

5) Montrer que $H_{per}^{-1}(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert.

6) Montrer que le peigne de Dirac $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$ est dans H_{per}^{-1} .

7) Montrer que si $f \in H^{-1}$, l'équation de Poisson

$$u'' = f, \quad u(0) = u(2\pi) = 0$$

a une solution unique $u \in H_{per}^1$.

8) Soient $x_j = \frac{2\pi j}{N}$, $0 < j < N - 1$, des points régulièrement répartis de $[0, 2\pi]$. Montrer que le problème de la "pendaison des servantes" (Homère, Odyssée, chant XXII) à une solution continue, au sens des distributions.

$$u'' = \sum_{j=1}^{N-1} \delta_{x_j}, \quad u(0) = u(2\pi) = 0.$$

Les masses de Dirac modélisent des masses pendues à une corde aux points x_j .

9) En utilisant la formule des sauts, trouver la solution et la dessiner.

10) Ecrire un programme matlab, ou un algorithme précis pour résoudre ce problème en discret avec un nombre fini $2N$ de coefficients de Fourier. Quelles perturbations de la solution approchée par rapport à la solution exacte sont elles à attendre?

11) Pour u dans H_{per}^1 et $f, g \in L_{per}^2$, on pose $T(u) = \int f u - g u'$. Montrer que c'est une forme linéaire continue sur H_{per}^1 .

12) En déduire que tout élément de H_{per}^{-1} peut être considéré comme une forme linéaire continue sur H_{per}^1 .

13) Réciproquement considérons une forme linéaire continue T sur H_{per}^1 . Montrer qu'on peut lui associer un unique élément de H_{per}^{-1} .

Chapitre 8

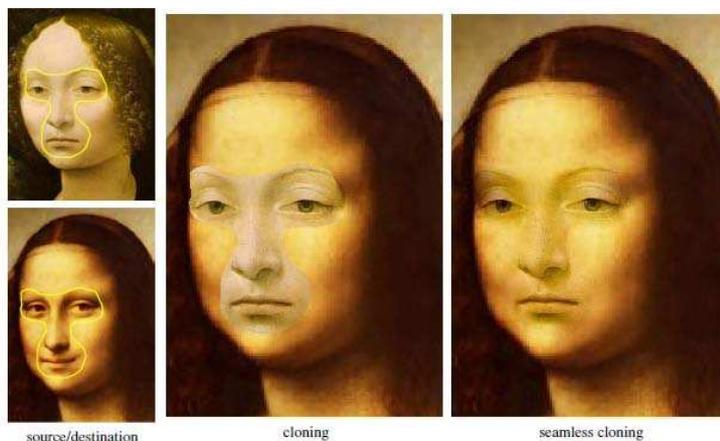
L'éditeur de Poisson

On note pour une fonction C^2 de deux variables $\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. C'est le Laplacien de u . L'équation de Poisson s'écrit

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.1)$$

L'équation est universelle en physique (électrostatique, mécanique des fluides, chaleur, membranes minces, ...). Ici, nous allons l'appliquer à un problème nouveau, la manipulation des images que l'on appelle en anglais "editing" et que nous appellerons faute de mieux "édition" d'image. Le but est de manipuler localement une image ou les images successives d'un film en corrigeant localement la couleur, en ajoutant ou enlevant des détails, en les rehaussant, etc. Ce chapitre suit de près la méthode présentée par trois chercheurs du laboratoire anglais de Microsoft, Patrick Pérez, Michel Gangnet, et Andrew Blake, publiée en 2003. Ces auteurs partent d'observations psychophysiques qui suggèrent que notre vision perçoit le Laplacien des images, plutôt que les images elles-mêmes. Puis ils remarquent que ce n'est pas un problème puisqu'une fonction définie sur un domaine Ω peut être reconstruite à partir de son Laplacien, et de valeurs spécifiées sur le bord du domaine $\partial\Omega$.

Pour résoudre ce problème, on peut lui donner une forme *variationnelle*. L'interprétation dite de la membrane mince considère que le plus simple interpolant possible de $g(x)$ connue uniquement sur le contour $\partial\Omega$ est obtenu en minimisant l'énergie d'une membrane élastique s'appuyant sur g :



$$\begin{cases} \min_u \int_{\Omega} |Du|^2(x) dx \\ u(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{si } x \in \partial\Omega. \quad (8.2)$$

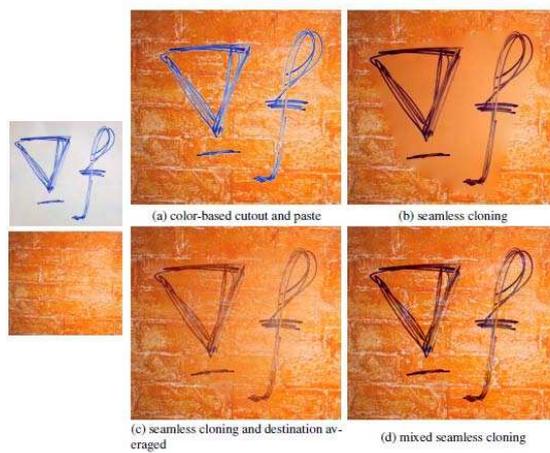
Alors le minimiseur u satisfera “l'équation de Laplace avec condition de bord de type Dirichlet” :

$$\begin{cases} (\Delta u)(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.3)$$

Les auteurs remarquent que si on applique cette solution pour interpoler une image dans une région Ω de l'image où on a supprimé un objet, l'interpolation donnera un effet visuel brouillé, flou. L'interpolant est trop régulier. Il ne faut donc pas juste rendre l'image harmonique dans le sous-domaine (une fonction dont le laplacien est nulle est appelée *harmonique*). Il faut donner à cette fonction un gradient, et les auteurs proposent donc de donner à l'image ce qu'ils appellent un “guidance field” v , c'est à dire un champ de vecteur défini sur Ω dont le gradient de u devra être le plus proche possible.

Cela conduit à résoudre :

$$\begin{cases} \min_u \int_{\Omega} |Du - v|^2(x) dx \\ u(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{si } x \in \partial\Omega, \quad (8.4)$$



dont le minimum u est l'unique solution de

$$\begin{cases} (\Delta u)(x) = \text{div}(\mathbf{v}) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{si } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.5)$$

où on note $\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$. Cette dernière équation donne selon les auteurs toute la machinerie pour faire de l'édition d'images, mais il va falloir bien spécifier selon les applications la forme de \mathbf{v} !

Commençons par regarder le cas où $\mathbf{v} = Dw$ est lui même le gradient d'une fonction w . Alors on a $\text{div}(\mathbf{v}) = \Delta w$, et en posant $z = u - w$, l'équation peut se réécrire comme une équation de Poisson :

$$\begin{cases} (\Delta z)(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ z(x) = (g - w)(x) & \text{si } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.6)$$



Figure 2: **Concealment.** By importing seamlessly a piece of the background, complete objects, parts of objects, and undesirable artifacts can easily be hidden. In both examples, multiple strokes (not shown) were used.

8.0.1 Résolution discrète

On suppose que les images sont en fait définies sur une grille discrète Ω_d . On note $\partial\Omega_d$ l'ensemble des pixels bordant Ω_d . Plus précisément on note pour tout pixel $x = (i, j)$ son voisinage discret $\mathcal{N}(x) = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$. Un point x est dans le bord de Ω_d s'il n'est pas dans Ω_d , mais si $\mathcal{N}(x) \cap \Omega_d \neq \emptyset$. Quand la forme du domaine discret Ω_d n'est pas rectangulaire, la technique de Fourier ne marche plus. On résoud donc directement le problème variationnel (8.4) sous forme discrète :

$$\begin{cases} \min_u \sum_{x \in \Omega_d, y \in \mathcal{N}(x)} \left(u(x) - u(y) - v_{i(x,y)} \left(\frac{x+y}{2} \right) \right)^2 \\ u(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{si } x \in \partial\Omega_d, \quad (8.7)$$



Figure 7: **Inserting transparent objects.** Mixed seamless cloning facilitates the transfer of partly transparent objects, such as the rainbow in this example. The non-linear mixing of gradient fields picks out whichever of source or destination structure is the more salient at each location.

où $i(x, y) = 1$ si $y = x \pm (1, 0)$, et $i = 2$ si $y = x \pm (0, 1)$. La solution de cette minimization d'une forme quadratique en dimension finie donne en dérivant :

$$\forall x \in \Omega_d, |\mathcal{N}(x)|u(x) - \sum_{y \in \mathcal{N}(x) \cap \Omega_d} u(y) = \sum_{y \in \mathcal{N}(x) \cap \partial\Omega_d} g(y) + \sum_{y \in \mathcal{N}(x)} \nu(x, y), \quad (8.8)$$

où $\nu(x, y) = v_i(x, y) \left(\frac{x+y}{2}\right)$. $|\mathcal{N}(x)|$ est le cardinal de $\mathcal{N}(x)$, qui vaut entre 1 et 4 (on suppose que Ω_d est connexe discret, à savoir que tout point de Ω_d a au moins un voisin dans Ω_d). Dans le cas où x est dans l'intérieur de Ω_d , c'est-à-dire que $\mathcal{N}(x) \subset \Omega_d$, (8.8) devient

$$|\mathcal{N}(x)|u(x) - \sum_{y \in \mathcal{N}(x)} u(y) = \sum_{y \in \mathcal{N}(x)} \nu(x, y). \quad (8.9)$$

Le système d'équations (8.8) est un système linéaire dont la matrice est symétrique et définie positive. Le système a beaucoup d'inconnues, autant que de pixels dans Ω_d , mais la matrice est "creuse", c'est-à-dire qu'elle a beaucoup de zéros. On peut donc résoudre le système par une méthode classique, telle que la méthode itérative de Gauss-Seidel.



Figure 8: **Inserting one object close to another.** With seamless cloning, an object in the destination image touching the selected region Ω bleeds into it. Bleeding is inhibited by using mixed gradients as the guidance field.

8.0.2 Clonage

La première application est l'insertion d'un morceau d'une image v_0 dans une image u_0 . Le domaine de collage est Ω_d . Si on fait un simple copier-coller des valeurs des pixels de v_0 dans une image u , le bord de Ω_d sera visible car il y aura en général un fort contraste, les anciennes couleurs de u sur le bord extérieur de Ω_d contrastant avec les nouvelles couleurs rapportées de v_0 sur bord intérieur. Donc pour le clonage soit efficace, il faut en quelque sorte adapter harmonieusement le morceau de v_0 à son nouvel environnement dans u . Ici, la remarque que l'essentiel de l'information perceptive d'une image est contenue dans son laplacien est cruciale. On ne va pas cloner v_0 , on va se contenter de cloner son laplacien! Donc on pose $\mathbf{v} = Dv_0$. On a $div(\mathbf{v}) = \Delta v_0$, et donc l'équation (8.5) devient

$$\begin{cases} \Delta u(x) = \Delta v_0(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = u_0(x) & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.10)$$

En discret, cela donne donc à nouveau l'équation (8.8), avec

$$\nu(x, y) = (v_0(x) - v_0(y)) \left(\frac{x+y}{2}\right). \quad (8.11)$$

Voyons les choses encore un peu plus simplement. Le clonage consiste à reconstruire une image qui soit semblable à v_0 dans Ω , et semblable à u_0 à l'extérieur de Ω . Considérons maintenant le domaine rectangulaire de l'image R . Dans le modèle précédent, on ne garde que le laplacien du clône v_0 , mais on garde intégralement u_0 à l'extérieur de Ω . Si nous nous autorisons des modifications (qui seront visuellement

peu perceptibles) de u_0 aussi à l'extérieur, si nous voulons traiter les deux images à fusionner de manière symétrique, il est logique de garder que le laplacien de l'une et de l'autre. On est alors amenés à chercher une image u dont le laplacien est celui de u_0 dans Ω^c , et celui de v_0 dans Ω . Posons donc

$$\delta(x) = \begin{cases} \Delta v_0(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \Delta u_0(x) & \text{si } x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Alors le problème de clonage se ramène à résoudre

$$\Delta u(x) = \delta(x), \quad x \in R \quad (8.12)$$

Cette équation est indéterminée si on ne fixe pas ce qui se passe sur le bord, et on doit donc spécifier par exemple que $u(x)$ sera périodique, ou symétrique-périodique. On voit alors que l'équation précédente va pouvoir se résoudre par Fourier, ou encore mieux par DCT.

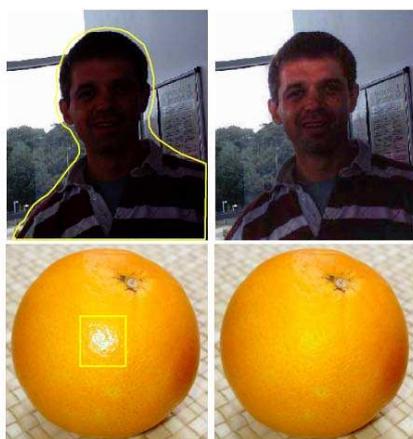


Figure 10: **Local illumination changes.** Applying an appropriate non-linear transformation to the gradient field inside the selection and then integrating back with a Poisson solver, modifies locally the apparent illumination of an image. This is useful to highlight under-exposed foreground objects or to reduce specular reflections.

8.0.3 Surimpression

Nous allons maintenant jouer à un jeu encore plus subtil proposé par Patrick Pérez et ses collaborateurs, la surimpression. Il s'agit encore de cloner une partie d'une image v_0 dans l'image u_0 , mais cette fois-ci on veut que les détails de l'image u_0 continuent de se voir en fond. On veut donc que les deux images se voient l'une à travers l'autre, donc un effet de transparence. L'idée la plus simple est de faire bêtement $\frac{u_0+v_0}{2}$ dans le domaine Ω , mais alors on verra une brusque transition au bord du domaine. L'idée que l'on va appliquer est que pour voir à la fois u_0 et v_0 il suffit de voir leurs contours quand ils sont nets. On définit donc un nouveau champ de vecteurs \mathbf{v} (qui va devenir en quelque sorte le nouveau gradient) par

$$\mathbf{v}(x) = \begin{cases} Dv_0(x) & \text{si } |Dv_0(x)| \geq |Du_0(x)| \text{ et } x \in \Omega \\ Du_0(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En discret avec l'équation (8.7), cela donne

$$\nu(x, y) = \begin{cases} v_0(x) - v_0(y) & \text{si } |v_0(x) - v_0(y)| \geq |u_0(x) - u_0(y)| \text{ et } x \in \Omega \\ u_0(x) - u_0(y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Là encore, on peut choisir de résoudre le problème sur un domaine rectangulaire, pour profiter d'une éventuelle implémentation en Fourier.

8.0.4 Edition sélective



Figure 11: **Local color changes.** Left: original image showing selection Ω surrounding loosely an object of interest; center: background decolorization done by setting g to the original color image and f^* to the luminance of g ; right: recoloring the object of interest by multiplying the RGB channels of the original image by 1.5, 0.5, and 0.5 respectively to form the source image.

L'édition sélective consiste à modifier le champ de gradient de l'image, de manière par exemple à ne garder que les gradients qui intéressent l'éditeur. Par exemple, on ne voudra garder que les bords les plus marquants de l'image, auquel cas on pose

$$\forall x \in R, \mathbf{v}(x) = M(x)Du_0(x),$$

où $M(x)$ est masque binaire qui vaut 1 sur les bords de l'image (les points à fort gradient) et zéro ailleurs. Cette opération a été proposée par plusieurs auteurs pour expliquer notre perception de la couleur indépendamment des phénomènes d'ombrage. Ainsi Blake a-t-il proposé de prendre

$$\mathbf{v}(x) = h(|Du_0(x)|)Du_0(x),$$

où $h(s) = 1$ si $s \geq \delta$ est supérieure à un seuil fixé, et $h(s) = 0$ sinon.

Exercice 1 Proposer un calcul discret pour le $\mathbf{v}(x)$ proposé par Blake, et donner l'équation (8.8) correspondante.

La méthode proposée par les auteurs de "Poisson editing" est légèrement différente. Ils disposent d'un masque $M(x, y)$ qui décide si entre x et y il passe (ou non) un bord de l'image, selon que $M(x, y) = 1$ ou 0. Donc ils posent simplement $\nu(x, y) = M(x, y)(u(x) - u(y))$. En d'autres termes, les faibles gradients (provoqués par les dégradés et les ombres) seraient supprimés. Seuls resteraient les forts gradients, correspondant aux contrastes de couleur entre les différents objets de la scène. La conséquence en serait que l'image ainsi reconstruite a pour ainsi dire éliminé les ombres. L'équation expliquerait donc la "constance de couleur" de notre perception en effet largement indépendante des ombres.

Une autre possibilité, somme toute inverse, sera de rehausser les faibles contrastes de l'image, de manière à voir mieux les textures et les parties sombres. Pour cela on va au contraire favoriser les petits gradients par rapport aux grand, en leur appliquant une loi concave

$$\mathbf{v}(x) = g(Du_0(x)),$$

où $g(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^{-\alpha}\mathbf{v}$, $0 < \alpha < 1$. La méthode peut être appliquée globalement, mais il est plus malin de l'appliquer localement en détournant une région de l'image sombre ou peu contrastée, et donc les petits gradients sont ainsi rehaussés.

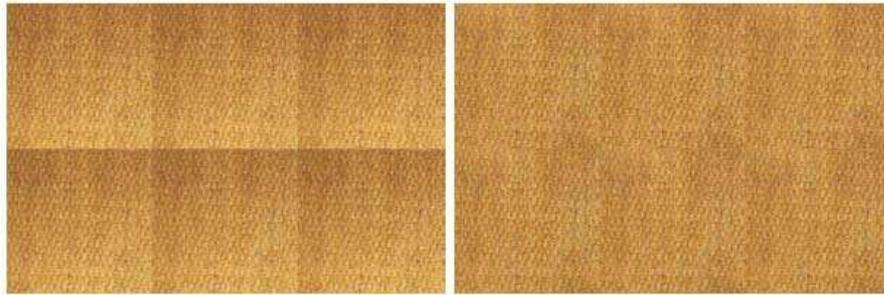


Figure 12: **Seamless tiling.** Setting periodic boundary values on the border of a rectangular region before integrating with the Poisson solver yields a tileable image.

FIGURE 8.1 –

Exercice 2 Proposer une méthode simple dans l'esprit précédent qui transforme l'image de manière que dans une sous-région les couleurs soient gardées, mais que le reste de l'image devienne gris. (Un pixel est gris quand ses trois composantes de couleur sont égales).

La dernière application que nous allons considérer est la périodisation d'une image. Ce problème se pose notamment dans les éditeurs d'images des jeux électroniques, on l'on veut être capables de paver une surface avec un morceau de texture rectangulaire. Si on pave directement en reproduisant périodiquement le morceau de texture, on verra les bords des pavés. Pour atténuer cet effet, il faut que le morceau u_0 soit rendu périodique. Pour cela, on résoud à nouveau l'équation de Poisson

$$\Delta u = \Delta u_0, \quad (8.13)$$

mais en forçant la solution u à être périodique. Notons $R = [0, a] \times [0, b]$. On fixera donc une condition de Dirichlet $u(x) = g(x)$ sur ∂R , où $g(x, 0) = g(x, b) = (u_0(x, 0) + u_0(x, b))/2$, et $g(0, y) = g(a, y) = (u_0(0, y) + u_0(a, y))/2$. On pourra aussi simplement chercher l'unique solution périodique de (8.13) dont la moyenne sur R est égale à la moyenne de u_0 sur R . L'intérêt est que cette deuxième solution a une solution facile par Fourier. Toutefois, il faut bien préciser ce qu'on entend par Δu_0 . En effet, on peut bien sûr considérer u_0 comme périodique, mais son laplacien au bord sera alors très singulier. Donc si on calcule Δu_0 par la méthode de Fourier, qui suppose implicitement l'image u_0 périodique, les valeurs de Δu_0 au bord seront aberrantes et de toutes façons résoudre (8.13) ne donnera rien de nouveau : on trouvera $u = u_0$.

Bibliographie

- [1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. New York, 1975.
- [2] J.M. Bony. *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier : théorie des distributions et analyse de Fourier*. Ecole Polytechnique, 2001.
- [3] N. Bourbaki. *Eléments de mathématique : topologie générale*. Hermann, 1971.
- [4] H. Brezis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. *Collection Mathématiques Appliquées Pour la Maîtrise*, Masson, 1983.
- [5] G. Choquet. *Cours d'analyse : topologie*. Masson et Cie., 1969.
- [6] J. Dixmier. *Topologie generale*. Presses universitaires de France, 1981.
- [7] KJ Falconer. *The geometry of fractal sets*. 1985.
- [8] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications*. Masson, 1990.
- [9] S. Jaffard, Y. Meyer, and R.D. Ryan. *Wavelets : Tools for Science & Technology*. Society for Industrial Mathematics, 2001.
- [10] Y. Meyer. Wavelets : Algorithms and Applications. *Philadelphia*, 1993.
- [11] J. Neveu. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson.
- [12] W. Rudin. Real and complex analysis. *New York*, 1966.
- [13] L. Schwartz. Théorie des distributions. *I, Paris*, 1950.
- [14] L. Schwartz. *Analyse : topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann, 1970.
- [15] M. Unser, P. Thevenaz, and L. Yaroslavsky. Convolution-based interpolation for fast, high-quality rotation of images. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 4(10) :1371–1381, 1995.
- [16] D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.