

# Stabilisation d'une EDP au moyen de commandes bilinéaires

C. Mifsud, B. Moubêche, A. Pauthier, P.D. Thizy

Département de Mathématiques/CMLA  
ENS Cachan

Directrice de Stage : Karine BEAUCHARD

## 1 Introduction

- Le problème
- Détermination formelle du contrôle

## 2 Résultats déjà existants

- Existence des solutions des deux systèmes sur  $\mathbb{R}_+$
- Stabilisation pour l'indicatrice d'un intervalle
- Principe d'invariance de LaSalle

## 3 Simulations et conjectures

- Approximation de Galerkin
- Décroissance de l'énergie

## 4 Résultats de stabilisation

- Ensembles invariants
- Modèle d'étude
- Modèle réel

L'objectif de ce stage est de contrôler l'équation suivante :

### Équation des ondes

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x) - w_{xx}(t, x) = 0, & x \in ]0, 1[, \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x). \end{cases} \quad (1)$$

Les deux problèmes étudiés sont les suivants :

### Modèle réel

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x) - w_{xx}(t, x) + u(t)\mu(x)w_t(t, x) = 0, & x \in ]0, 1[, \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x). \end{cases} \quad (2)$$

### Modèle d'étude

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x) - w_{xx}(t, x) + u(t)\mu(x)w(t, x) = 0, & x \in ]0, 1[, \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x). \end{cases} \quad (3)$$

Difficulté :  $u$  ne dépend pas de  $x$ .

# Raisonnement formel

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 w_t(t, x)^2 + w_x(t, x)^2 dx$$

Notre objectif est de stabiliser  $w$  en 0, c'est-à-dire déterminer  $t \mapsto u(t)$  tel que  $\mathcal{L}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ .

On cherche donc  $u$  tel que  $\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq 0$ . En dérivant formellement :

- modèle réel :  $\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = -u(t) \int_0^1 \mu(x) w_t(t, x) w_t(t, x) dx,$
- modèle d'étude :  $\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = -u(t) \int_0^1 \mu(x) w(t, x) w_t(t, x) dx.$

## Choix des feedback pour la suite de notre étude

$$\text{Modèle réel : } u(t) = \langle \mu w_t(t), w_t(t) \rangle_{L^2(0,1)}$$

$$\text{Modèle d'étude : } u(t) = \langle \mu w(t), w_t(t) \rangle_{L^2(0,1)}$$

Cependant, nous verrons par la suite que si ces contrôles paraissent les plus naturels, dans certains cas, ils ne sont pas les plus efficaces.

# Existence et unicité des solutions

Choix des espaces :

- Des outils élémentaires fournissent des solutions de l'équation des ondes dans  $\mathcal{C}^2 \times \mathcal{C}^1$  pour des conditions initiales  $\mathcal{C}^3 \times \mathcal{C}^2$ . Mais cette perte de régularité empêche une démonstration via une méthode de point fixe.
- Les espaces de Sobolev,  $(H_0^1 \times L^2)$ , évitent ce problème.

## Théorème

*Pour tout  $(w_0, w_1)$  dans  $(H_0^1 \times L^2)$ , le système (2) ( resp. le système (3)) admet une unique solution  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto (w, w_t)(t) \in H_0^1 \times L^2$ .*

# Existence et unicité des solutions

Choix des espaces :

- Des outils élémentaires fournissent des solutions de l'équation des ondes dans  $\mathcal{C}^2 \times \mathcal{C}^1$  pour des conditions initiales  $\mathcal{C}^3 \times \mathcal{C}^2$ . Mais cette perte de régularité empêche une démonstration via une méthode de point fixe.
- Les espaces de Sobolev,  $(H_0^1 \times L^2)$ , évitent ce problème.

## Théorème

*Pour tout  $(w_0, w_1)$  dans  $(H_0^1 \times L^2)$ , le système (2) ( resp. le système (3)) admet une unique solution*  
 $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto (w, w_t)(t) \in H_0^1 \times L^2.$

# Conséquence d'une inégalité d'observabilité

## Théorème

*Il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2$ , la solution du système*

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + w_t \mathbf{1}_{(a,b)}(x) = 0, x \in (0, 1), \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x), \end{cases} \quad (4)$$

*satisfait*

$$\|(w, w_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2} \leq \|(w_0, w_1)\|_{H_0^1 \times L^2} e^{-ct}.$$

# Stabilisation en dimension finie

Le théorème suivant nous a donné des pistes pour stabiliser nos systèmes en 0. Soient  $(A, B) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))^2$ ,  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = AX(t) + (u(X(t))BX(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (5)$$

## Théorème (LaSalle)

Soit  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $X$  solution du système bouclé (5) de condition initiale  $X_0$ . On suppose que

$$\text{Inv} := \{Y \in E \mid \forall t \geq 0, (u(\hat{Y}(t)) = 0)\} = \{0\}, \quad (6)$$

où  $\hat{Y}$  est la solution de (5) de condition initiale  $Y$ . On a alors

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

# Système équivalent

Formellement, l'EDP est équivalente à

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} - u(t)B \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

où

$$A = (A_{j,k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\pi^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -4\pi^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$B = (B_{j,k}) = (\langle \mu \varphi_j, \varphi_k \rangle)_{1 \leq j, k \leq +\infty}.$$

En coupant les hautes fréquences de la série de Fourier, on obtient les systèmes d'ordre 1 suivants :

### Modèle d'étude

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \tilde{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} - u(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}, \quad (7)$$

### Modèle réel

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \tilde{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} - u(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}, \quad (8)$$

où  $\tilde{A} = (A_{j,k})_{1 \leq j, k \leq n}$  et  $\tilde{B} = (B_{j,k})_{1 \leq j, k \leq n}$ .

# Travail numérique

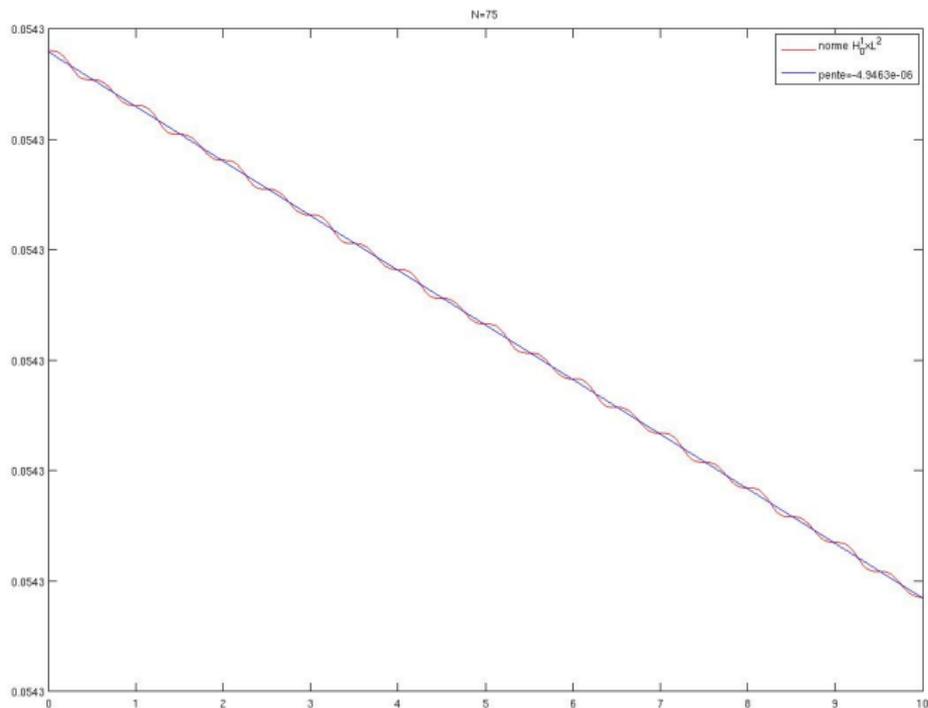
Nous avons tracé les normes des trajectoires

- en augmentant la fréquence de coupure,
- en temps long,
- pour les deux modèles,
- dans  $(H_0^1 \times L^2)$ ,
- dans  $(L^2 \times H^{-1})$ ,
- pour différents  $\mu$ .

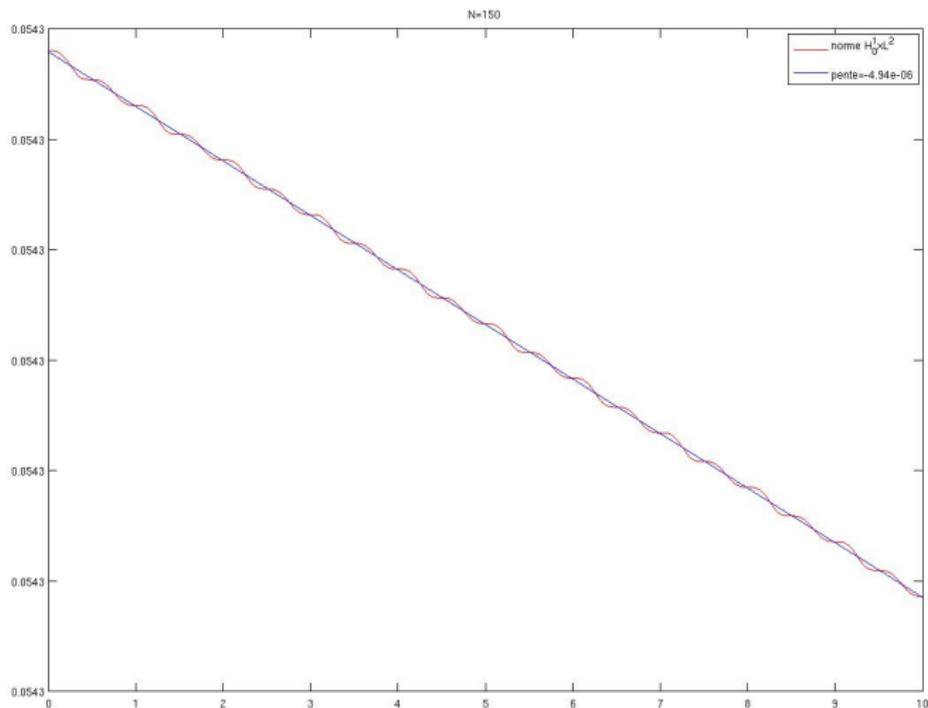
## Résultats attendus :

- convergence forte du modèle d'étude ;
- vitesse de décroissance ralentie lorsque l'on se rapproche de la cible ;
- convergence faible et forte du modèle réel.

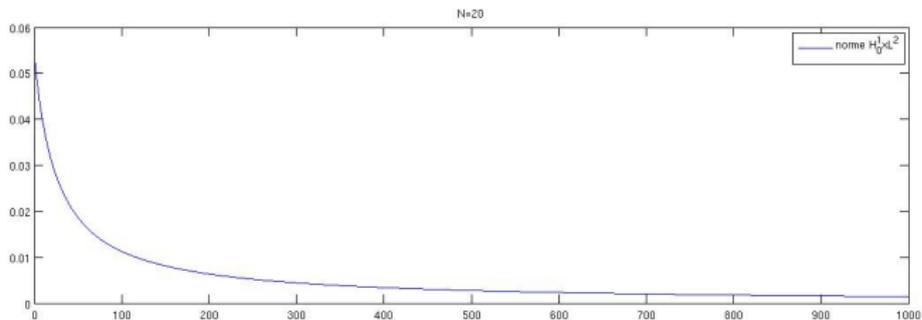
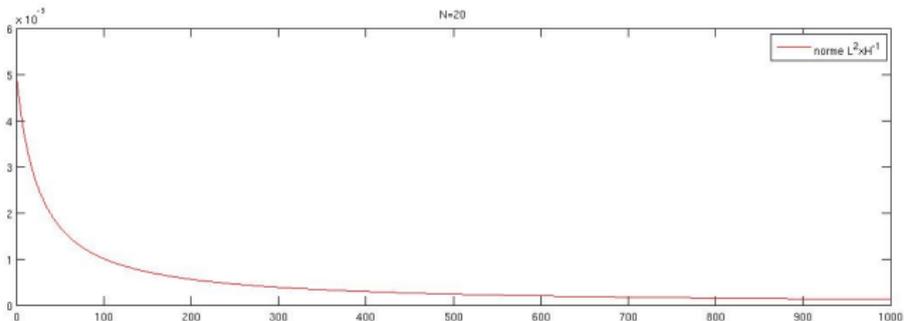
$$w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x); w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x); \mu(x) = x^2; N = 75$$



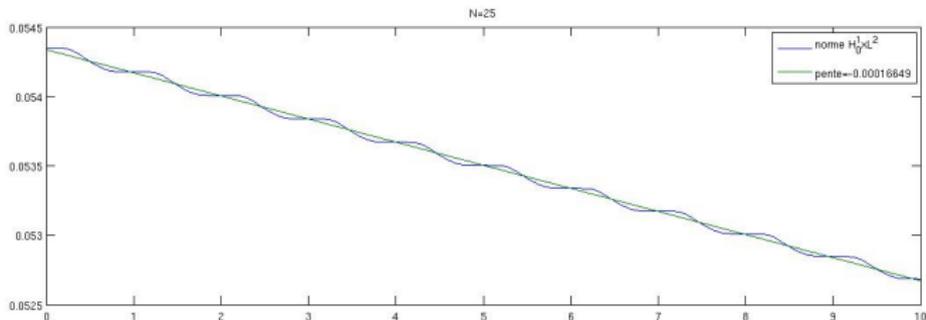
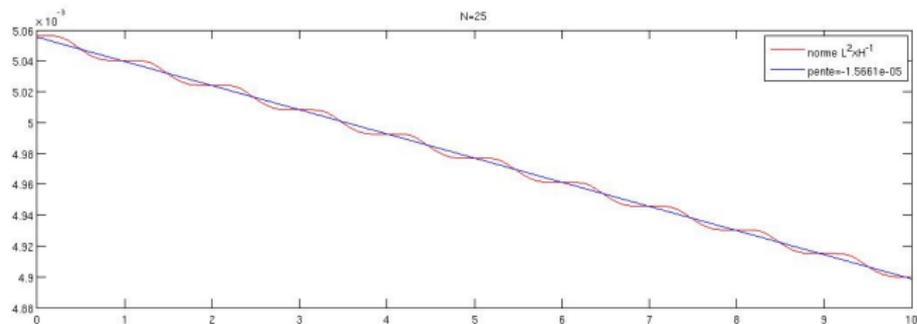
$$w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x); w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x); \mu(x) = x^2; N = 150$$



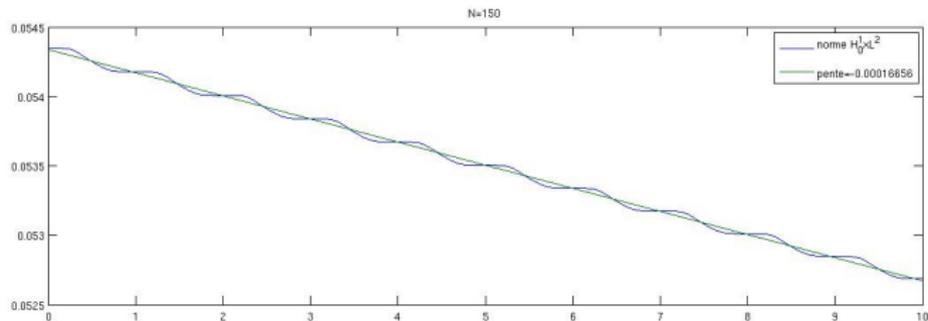
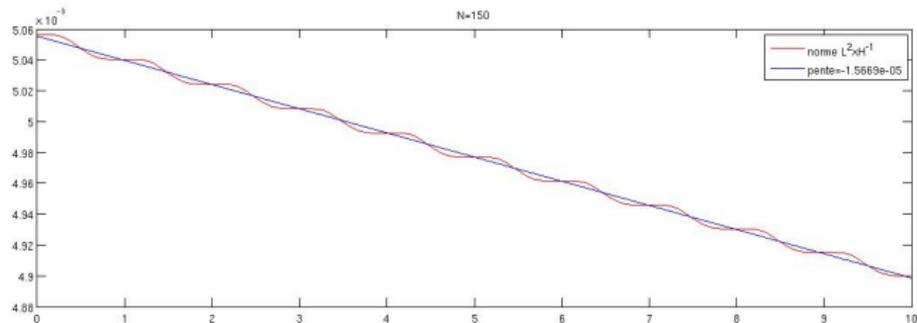
$$w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x); w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x); \mu(x) = x^2$$



$$w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x); w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x), \mu(x) = x^2; N = 25$$



$$w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x); w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x), \mu(x) = x^2; N = 150$$



## Conclusions de le partie numérique

Nous avons observé :

- une faible variation de la vitesse de décroissance quand la fréquence de coupure augmente,
- une vitesse de décroissance fortement ralentie en temps long,
- que les convergences faibles et fortes semblent avoir lieu pour  $\mu$  positif.

Nous avons ainsi pu illustrer un certain nombre de nos résultats.

Avec les feedbacks proposés, on a démontré

- une stabilisation faible du modèle d'étude sous des hypothèses optimales sur  $\mu$ ,
- une stabilisation faible du modèle réel avec des conditions sur  $\mu$ ,
- une stabilisation forte du modèle réel pour  $\mu = 1$ .

Les ensembles invariants considérés sont :

### Invariant du modèle d'étude

$$\left\{ (w_0, w_1) \mid \begin{array}{l} (w, w_t) \text{ vérifie (1) et} \\ \langle \mu w_t(t), w(t) \rangle_{L^2} = 0 \end{array} \text{ pour tout } t \geq 0. \right\} \quad (9)$$

### Invariant du modèle réel

$$\left\{ (w_0, w_1) \mid \begin{array}{l} (w, w_t) \text{ vérifie (1) et} \\ \langle \mu w_t(t), w_t(t) \rangle_{L^2} = 0 \end{array} \text{ pour tout } t \geq 0. \right\} \quad (10)$$

Remarque : L'invariant réduit à  $\{0\}$  est une condition nécessaire de stabilisation faible en 0.

Dans le cas du modèle réel, nous avons montré le résultat suivant :

### Proposition

*Soit  $\mu$  dans  $L^\infty(0, 1)$ . Si pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^1 \sin(k\pi x)^2 \mu(x) dx > 0$  (resp.  $< 0$ ), l'invariant (10) est réduit à  $\{0\}$ .*

Remarque :  $\mu \neq 0$  de signe constant presque partout rentre dans ce cadre.

## Stabilisation faible du modèle d'étude

### Théorème

*Soit  $\mu \in L^\infty(0, 1)$ . On suppose que l'ensemble invariant (9) associé est réduit à  $\{0\}$ . Alors, pour tout  $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2(0, 1)$ , condition initiale de la solution  $(w, w_t)$  du système d'étude bouclé, on a la convergence suivante*

$$(w, w_t)(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} 0.$$

Le démonstration de ce théorème s'appuie sur le résultat de continuité par rapport aux conditions initiales suivant :

# Schéma de la preuve

## Lemme

Soit  $(w_0^n, w_1^n)_{n \in \mathbb{N}} \in (H_0^1 \times L^2)^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\begin{aligned} (w_0^n, w_1^n) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w_0^\infty, w_1^\infty) \\ (w_0^n, w_1^n) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w_0^\infty, w_1^\infty). \end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $(w^n, w_t^n)$  la solution de (3) de condition initiale  $(w_0^n, w_1^n)$ .  
 Alors pour tout  $T > 0$  :

$$\begin{aligned} \exists N_1 \subset (0, T), \quad \forall t \in ((0, T) \setminus N_1), \quad (w^n, w_t^n)(t) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w^\infty, w_t^\infty)(t) \\ (w^n, w_t^n)(t) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w^\infty, w_t^\infty)(t) \end{aligned}$$

où  $N_1$  est de mesure nulle.

- On prend  $(w_0, w_1)$  dans  $(H_0^1 \times L^2)$ , et  $T > 2$ .
- La trajectoire associée  $\{(w, w_t) \in H_0^1 \times L^2 \mid t \geq 0\}$  est bornée dans  $(H_0^1 \times L^2)$ .
- On montre que  $(0, 0)$  est la seule valeur d'adhérence faible  $(H_0^1 \times L^2)$  de la trajectoire quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Pour cela,

on prend  $(w_0^\infty, w_1^\infty)$  valeur d'adhérence faible  $(H_0^1 \times L^2)$ , forte  $(L^2 \times H^{-1})$  de la trajectoire et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que :

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w_0^\infty, w_1^\infty)$$

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w_0^\infty, w_1^\infty),$$

D'où d'après le lemme, pour presque tout  $t$  dans  $(0, T)$  :

$$(w, w_t)(t_n + t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w^\infty, w_t^\infty)(t)$$

$$(w, w_t)(t_n + t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w^\infty, w_t^\infty)(t),$$

où on se donne  $(w^\infty, w_t^\infty)$  la solution du système bouclé associée à la condition initiale  $(w_0^\infty, w_1^\infty)$ .

La conclusion se fait alors en deux temps :

- Utilisant ce qui précède, on a pour presque tout  $t$

$$\langle \mu w_t(t_n + t), w(t_n + t) \rangle_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle \mu w_t^\infty(t), w^\infty(t) \rangle_{L^2(0,1)}.$$

- La suite  $\left( t \in (0, T) \mapsto \langle \mu w_t(t_n + t), w(t_n + t) \rangle_{L^2(0,1)} \right)$  tend vers 0 dans  $L^2(0, T)$ , donc quitte à extraire,  $\langle \mu w_t(t_n + t), w(t_n + t) \rangle_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  presque partout.

D'où  $(w_0^\infty, w_1^\infty)$  est dans l'invariant et donc nul.

La conclusion se fait alors en deux temps :

- Utilisant ce qui précède, on a pour presque tout  $t$

$$\langle \mu w_t(t_n + t), w(t_n + t) \rangle_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle \mu w_t^\infty(t), w^\infty(t) \rangle_{L^2(0,1)}.$$

- La suite  $\left( t \in (0, T) \mapsto \langle \mu w_t(t_n + t), w(t_n + t) \rangle_{L^2(0,1)} \right)$  tend vers 0 dans  $L^2(0, T)$ , donc quitte à extraire,  $\langle \mu w_t(t_n + t), w(t_n + t) \rangle_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  presque partout.

D'où  $(w_0^\infty, w_1^\infty)$  est dans l'invariant et donc nul.

# Stabilisation faible du modèle réel

## Théorème

*Soit  $\mu$  non nul dans  $W^{1,\infty}(0,1)$ . On suppose  $\mu \geq 0$  presque partout. Alors, pour tout  $(w_0, w_1)$  dans  $(H_0^1 \times L^2)$ , condition initiale de la solution  $(w, w_t)$  du système réel bouclé, on a :*

$$(w, w_t)(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} 0.$$

- Impossible de passer à la limite dans le feedback,
- pas de lemme de continuité par rapport aux conditions initiales,
- hypothèses plus restrictives, mais garantissant  $Inv = \{0\}$ .

# Schéma de la preuve

- On prend  $(w_0, w_1)$  dans  $(H_0^1 \times L^2)$ , et  $T > 2$ .
- La trajectoire associée  $\{(w, w_t) \in H_0^1 \times L^2 \mid t \geq 0\}$  est bornée dans  $(H_0^1 \times L^2)$ .
- On montre que  $(0, 0)$  est la seule valeur d'adhérence faible  $(H_0^1 \times L^2)$  de la trajectoire quand  $t \rightarrow +\infty$ .

On prend donc  $(w_0^\infty, w_1^\infty)$  valeur d'adhérence faible  $(H_0^1 \times L^2)$ , forte  $(L^2 \times H^{-1})$  de la trajectoire et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que :

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w_0^\infty, w_1^\infty)$$

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w_0^\infty, w_1^\infty).$$

- D'une part,  $(t \in (0, T) \mapsto (w, w_t)(t_n + t))$  est bornée dans  $L^\infty((0, T), H_0^1 \times L^2)$ .
- D'autre part, toutes ces fonctions ont un rapport de Lipschitz commun dans  $C^{0,1}((0, T), L^2 \times H^{-1})$ .

On prend donc  $(w_0^\infty, w_1^\infty)$  valeur d'adhérence faible  $(H_0^1 \times L^2)$ , forte  $(L^2 \times H^{-1})$  de la trajectoire et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que :

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w_0^\infty, w_1^\infty)$$
$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w_0^\infty, w_1^\infty).$$

- D'une part,  $(t \in (0, T) \mapsto (w, w_t)(t_n + t))$  est bornée dans  $L^\infty((0, T), H_0^1 \times L^2)$ .
- D'autre part, toutes ces fonctions ont un rapport de Lipschitz commun dans  $C^{0,1}((0, T), L^2 \times H^{-1})$ .

On montre donc l'existence de  $Y := (y_0, y_1)$  dans  $L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})$  tel que pour presque tout  $t$

$$(w, w_t)(t_n + t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} Y(t)$$

$$(w, w_t)(t_n + t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} Y(t).$$

La conclusion se fait alors en deux temps :

- Les fonctions

$\{u_n := t \in (0, T) \mapsto \langle \mu w_t(t_n + t), w_t(t_n + t) \rangle_{L^2}\}$  tendent vers 0 dans  $L^2(0, T)$ , donc dans  $L^1(0, T)$ . On déduit donc de

$$(w, w_t)(t_n + t) = e^{tA}(w, w_t)(t_n) + \int_0^t e^{sA}(0, \mu w_t)(t_n + s) u^n(s) ds$$

que

$$Y(t) = e^{tA}(w_0^\infty, w_1^\infty).$$

- Pour presque tout  $t$

$$0 \leq (y_1(t), \mu y_1(t))_{L^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(t) = 0.$$

D'où  $(w_0^\infty, w_1^\infty) = Y(0)$  est dans l'invariant, donc nul.

La conclusion se fait alors en deux temps :

- Les fonctions

$\{u_n := t \in (0, T) \mapsto \langle \mu w_t(t_n + t), w_t(t_n + t) \rangle_{L^2}\}$  tendent vers 0 dans  $L^2(0, T)$ , donc dans  $L^1(0, T)$ . On déduit donc de

$$(w, w_t)(t_n + t) = e^{tA}(w, w_t)(t_n) + \int_0^t e^{sA}(0, \mu w_t)(t_n + s) u^n(s) ds$$

que

$$Y(t) = e^{tA}(w_0^\infty, w_1^\infty).$$

- Pour presque tout  $t$

$$0 \leq \langle y_1(t), \mu y_1(t) \rangle_{L^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(t) = 0.$$

D'où  $(w_0^\infty, w_1^\infty) = Y(0)$  est dans l'invariant, donc nul.

La conclusion se fait alors en deux temps :

- Les fonctions

$\{u_n := t \in (0, T) \mapsto \langle \mu w_t(t_n + t), w_t(t_n + t) \rangle_{L^2}\}$  tendent vers 0 dans  $L^2(0, T)$ , donc dans  $L^1(0, T)$ . On déduit donc de

$$(w, w_t)(t_n + t) = e^{tA}(w, w_t)(t_n) + \int_0^t e^{sA}(0, \mu w_t)(t_n + s) u^n(s) ds$$

que

$$Y(t) = e^{tA}(w_0^\infty, w_1^\infty).$$

- Pour presque tout  $t$

$$0 \leq \langle y_1(t), \mu y_1(t) \rangle_{L^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(t) = 0.$$

D'où  $(w_0^\infty, w_1^\infty) = Y(0)$  est dans l'invariant, donc nul.

# Stabilisation forte dans le cas $\mu = 1$

On considère le cas suivant :

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + u(t)w_t = 0, \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \\ w(0, x) = w_0(x) \quad w_t(0, x) = w_1(x). \end{cases} \quad (11)$$

Où  $u(t) = \langle w_t, w_t \rangle_{L^2}$ .

## Théorème

*Pour tout  $(w_0, w_1)$  dans  $(H_0^1 \times L^2)$ , la solution  $(w, w_t)$  du système (11) converge fortement vers  $(0, 0)$  dans  $(H_0^1 \times L^2)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

# Schéma de la preuve

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

## Lemme

Soient  $(w_0, w_1)$  dans  $(H_0^1 \times L^2)$  tels que la solution  $(w, w_t)$  du système bouclé (11) vérifie

$$\{(w, w_t)(t), \quad t \geq 0\} \quad \text{est compact dans } (H_0^1 \times L^2).$$

Alors, on a

$$(w, w_t)(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{H_0^1 \times L^2} 0.$$

Ce lemme s'appuie sur un résultat de continuité par rapport aux conditions initiales.

Il reste alors à vérifier les hypothèses du lemme :

- $(H_0^1 \times L^2)$  est complet, donc il suffit d'avoir  $\{(w, w_t)(t), t \geq 0\}$  précompact.
- Pour cela on étudie les séries de Fourier :
  - les basses fréquences sont dans un compact,
  - on enferme les hautes dans une boule de rayon choisi.

Il reste alors à vérifier les hypothèses du lemme :

- $(H_0^1 \times L^2)$  est complet, donc il suffit d'avoir  $\{(w, w_t)(t), t \geq 0\}$  précompact.
- Pour cela on étudie les séries de Fourier :
  - les basses fréquences sont dans un compact,
  - on enferme les hautes dans une boule de rayon choisi.

- Travail réalisé :
  - stabilisation faible du modèle d'étude sous des hypothèses optimales,
  - stabilisation faible du modèle réel pour  $\mu \geq 0$ ,
  - stabilisation forte du modèle réel dans un cas diagonal.
- Perspectives :
  - stabilisation forte du modèle réel dans un cas tridiagonal, puis dans un cas plus général,
  - stabilisation forte du modèle d'étude.

# Bibliographie



K. Beauchard.

*Polycopié : Dynamique et contrôle de systèmes non-linéaires.*



H. Brézis.

*Analyse fonctionnelle.*

Dunod.



J.E. Marsden J.M. Ball and M. Slemrod.

Controllability for Distributed Bilinear Systems.

*SIAM Control and Optimization Vol. 20 N. 4, pages 575–597, July 1982.*



J.M. Ball and M. Slemrod.

Feedback Stabilization and Distributed Semilinear Control Systems.

*Appl. Math. Optim. 5, pages 169–179, 1979.*



J.M. Coron and B. d'Andréa Novel.

Stabilization of a rotating body-beam without damping.

*IEEE Transactions on Automatic Control Vol. 43 N. 5, pages 608–618, May 1998.*



S. Ervedoza and E. Zuazua.

*Propagation, observation and numerical approximation of waves.*



A.Pazy.

Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.

*Dept. of Mathematics, Univ. of Maryland, Lecture Notes No. 10, 1974.*