Pérégrinations Quantiques

Baptiste Morisse
(sous la direction de Yves Meyer et de Thierry Paul)

Soutenance de Stage - 24 Juin 2010

Plan

Naissance des états cohérents

Inégalités de Heisenberg

On pose

$$\Delta_\psi A = \sqrt{\langle \psi, A^2 \psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle^2}$$

Alors

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi, [A, B]\psi \rangle|$$

États cohérents

Les états cohérents saturent les inégalités de Heisenberg, pour $A = -i\frac{\partial}{\partial x}$ et $B = x$.

$$\psi_{q,p} = \hbar^{-1/4} \exp(-\frac{(x-q)^2}{2\hbar}) e^{ipx/\hbar}$$

Importance des états cohérents

- Ils forment une sous-variété indicée par le couple classique (q, p).
- Ils forment un ensemble (sur)complet.
- La dynamique des états cohérents suffit pour exprimer la dynamique de tout autre état.

Extension des états cohérents

Pour a dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, unitaire pour la norme L^2, on pose

$$\psi^a_{q,p}(x) = \hbar^{-1/4} a\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) e^{ipx/\hbar}$$

Équation de Schrödinger

L'hamiltonien H s'écrit $H = -\hbar^2 \Delta + V$. On pose certaines conditions sur V. L'équation s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{i}\hbar\, \partial_t \, \psi^t & = & H \, \psi^t \\ \\ \psi^0 & = & \psi^a_{q,p} \end{array} \right.$$

Approximation par les états cohérents

Il existe a^t, $p(t)$, $q(t)$ et $l(t)$ tels que

$$||\psi^t - \psi^{a^t}_{q(t),p(t)}\, e^{il(t)/\hbar}||_2 \leq C(t)\hbar^{1/2}$$

Précisions

- Dynamique classique des indices:

$$\begin{cases} \dot{q} &= 2p \\ \dot{p} &= -V'(q) \end{cases}$$

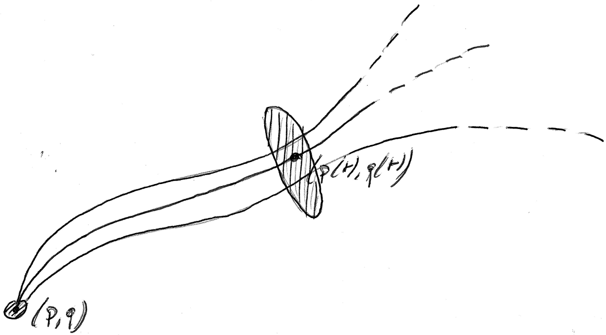
- l est le lagrangien classique du système:

$$\dot{l}(t) = \dot{q}(t)p(t) - p^2(t) - V(q(t))$$

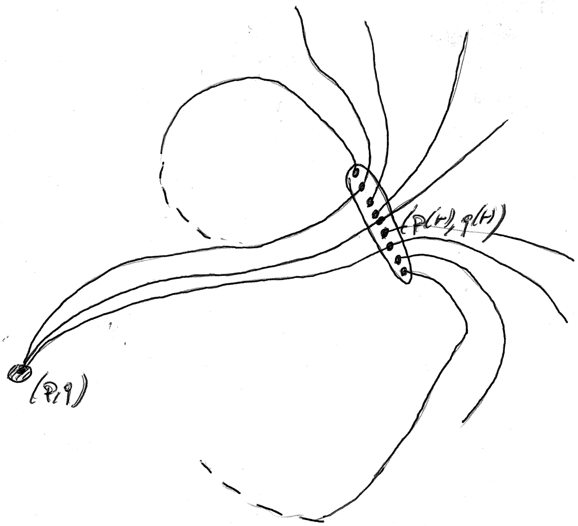
- a^t vérifie l'équation différentielle:

$$i\dot{a}^t = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} a^t + \frac{1}{2} V''(q(t))\, x^2\, a^t = H^2\, a^t$$

On met en images !



Principe de Huyghens-Fresnel



Erreur de l'approximation

L'erreur $C(t)$ vaut, sous certaines conditions:

$$C(t) = t\, M \int_0^t f(s) ds$$

avec

$$\begin{aligned} f(t) &= ||x^3\, a^t||_2 = ||x^3\, e^{-itH^2}\, a||_2 \\ & ||e^{itH^2} x^3 e^{-itH^2}\, a||_2 \\ & ||\left(\phi^t\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^3 a||_2 \end{aligned}$$

Flot linéarisé et évolution à temps long

$$\begin{cases} \dot{q} &= 2p \\ \dot{p} &= -V'(q) \end{cases} \qquad \longrightarrow \quad \text{flot classique } \varphi^t$$

$$i\dot{a}^t = H^2 a^t \longrightarrow \text{ symbole } h^2 \longrightarrow \text{ flot classique } \phi^t \text{ linéaire}$$

Flot linéarisé et évolution à temps long

$$\begin{cases} \dot{q} &= 2p \\ \dot{p} &= -V'(q) \end{cases} \longrightarrow \text{flot classique } \varphi^t$$

linéarisation du flot $\Downarrow$

$$i\dot{a}^t = H^2 a^t \longrightarrow \text{symbole } h^2 \longrightarrow \text{flot classique } \phi^t \text{ linéaire}$$

Échelles de temps

Flot elliptique

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Temps limite: $T_1 \sim C_1 \hbar^{-1/2+\epsilon}$

Flot hyperbolique

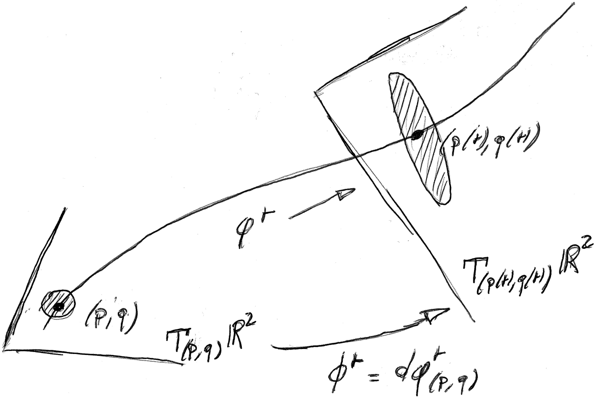
$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

Temps limite: $T_2 \sim (1/6 - \epsilon) C_2 \ln \hbar^{-1}$

Flot parabolique

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Récapitulatif



La Fin !

MERCI DE VOTRE ATTENTION !