Approximation lagrangienne d'écoulements de fluides parfaits selon VNR

Bertin Matthias, Posson Marjolaine

Département de Mathématiques
Licence - ENS Cachan
Tuteurs : Jean-Michel Ghidaglia, Daniel Chauveheid et Saad Benjelloun

Soutenance de stage
24 juin 2010

Sommaire

Introduction

- <u>But :</u> résoudre les équations des mouvements fluides par une méthode lagrangienne d'approximation numérique.

Equations des mouvements fluides

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + q)$$

Conservation de l'énergie

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + (p + q)\frac{dV}{dt} = 0$$

Conservation de la masse

$$\rho_0 \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Equation d'état (dans le cas d'un gaz parfait)

$$\mathcal{E} = \frac{pV}{\gamma - 1}, \qquad \gamma > 1$$

Introduction

- Les chocs : surfaces sur lesquelles la densité, la vitesse du fluide, la température... présentent des discontinuités.
- Les conditions de saut sont compliquées : mouvement inconnu des surfaces de discontinuités par rapport au maillage.
- Non linéarité du problème
- $\Rightarrow$ Le traitement des chocs nécessite de très longs calculs (pour une méthode de suivi de chocs).

Idée de base :

Etude d'un article : *A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks* - J. VonNeumann et R.D. Richtmyer - 1949.

- Utiliser les effets bien connus des mécanismes dissipatifs (viscosité...) sur les chocs
- Donne au choc une épaisseur au moins comparable à l'espacement des points du réseau
- Les valeurs obtenues pour la température, pression... sont proches des valeurs réelles

Idée de base :

- Introduire des termes dissipatifs artificiels dans les équations
- Méthode qui traite de manière automatique les chocs (méthode de capture de chocs)
- Utilisée pour des écoulements 1D.

q

- q est un terme de pression additionnel positif ($\frac{\partial U}{\partial x} < 0$ compression)
- q est négligeable sauf dans la zone de choc.

q

$$q = -\frac{(\rho_0 c \Delta x)^2}{V} \frac{dV}{dt} \left| \frac{dV}{dt} \right| = -\frac{(c\Delta x)^2}{V} \frac{\partial U}{\partial x} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|$$

Schéma

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \frac{U_\ell^{n+\frac{1}{2}} - U_\ell^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{p^n_{\ell+\frac{1}{2}} + q^{n-\frac{1}{2}}_{\ell+\frac{1}{2}} - p^n_{\ell-\frac{1}{2}} - q^{n-\frac{1}{2}}_{\ell-\frac{1}{2}}}{\Delta x}.$$

Conservation de la masse

$$\rho_0 \frac{V^{n+1}_{\ell+\frac{1}{2}} - V^n_{\ell+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{U^{n+\frac{1}{2}}_{\ell+1} - U^{n+\frac{1}{2}}_\ell}{\Delta x}.$$

Pseudo-viscosité

$$q_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{2(c\Delta x)^2}{V_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+1}+V_{\ell+\frac{1}{2}}^{n}} \frac{(U_{\ell+1}^{n+\frac{1}{2}}-U_{\ell}^{n+\frac{1}{2}})|U_{\ell+1}^{n+\frac{1}{2}}-U_{\ell}^{n+\frac{1}{2}}|}{(\Delta x)^2}.$$

Évolution de l'énergie

$$\left[\gamma\frac{p_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+1}+p_{\ell+\frac{1}{2}}^{n}}{2}+(\gamma-1)q_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right]\frac{V_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+1}-V_{\ell+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t}+\frac{V_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+1}+V_{\ell+\frac{1}{2}}^{n}}{2}\frac{p_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+1}-p_{\ell+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t}=0.$$

- On considère l'ajout d'une petite perturbation δU, δV... à la solution homogène dans les équations précédentes.

$$\delta U = \delta U_0 e^{ikx+\alpha t}$$

- Dans les régions normales, la condition de stabilité s'écrit :

$$\Delta t \leqslant \frac{(\Delta x)^2}{2\sigma}$$

où $\sigma = \frac{2(c\Delta x)^2}{V\rho_0} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|$

- Dans les régions de choc, elle devient :

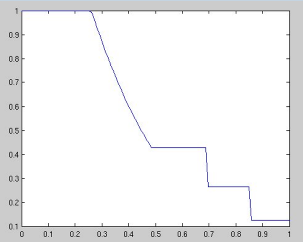
$$\frac{s_{0f}\Delta t}{\Delta x} \leqslant \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{2c}$$

où c est une constante et s_{0f} est la vitesse du son.

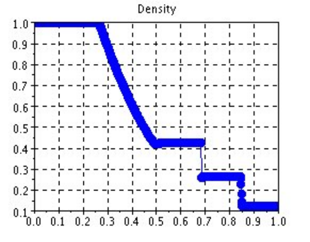
Tube à choc de Sod

- Code `scilab` de 80 lignes
- Test du code dans le cas du tube à choc de Sod

$$\begin{pmatrix} \rho_g \\ p_g \\ u_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \rho_d \\ p_d \\ u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.1 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

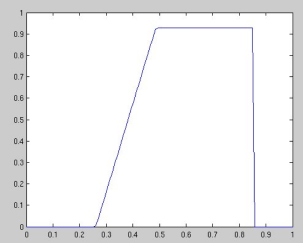


(a) densité théorique

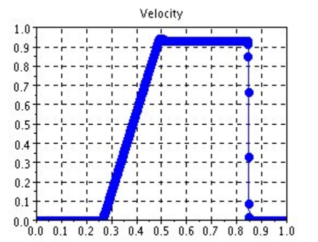


(b) densité obtenue avec le code

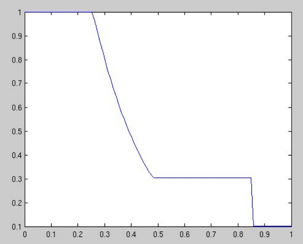
FIG.: $t = 0,2$s



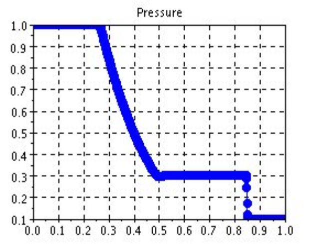
(a) vitesse théorique



(b) vitesse obtenue avec le code



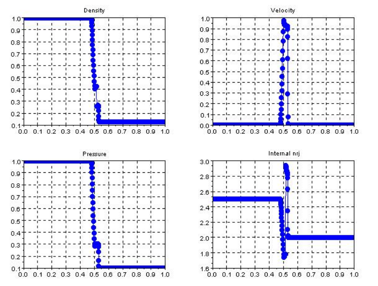
(c) pression théorique



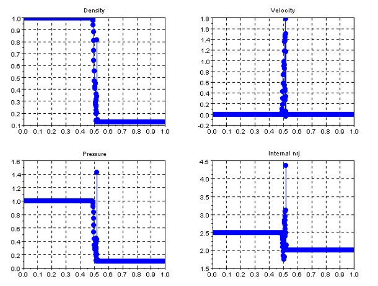
(d) pression obtenue avec le code

Etude de la méthode

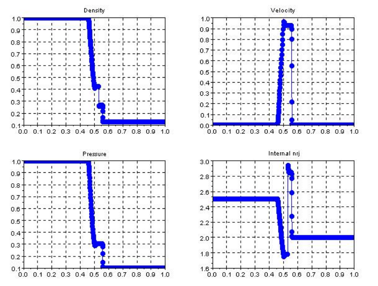
- Mise en évidence expérimentalement de l'instabilité du schéma en l'absence de la pseudo-viscosité.



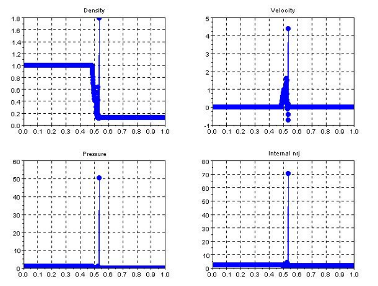
(a) 100ème itération avec pseudo



(b) 100ème itération sans pseudo



(c) 200ème iération avec pseudo



(d) 200ème itération sans pseudo

Modification du code

- Modification du code de manière à le rendre utilisable pour n'importe quelle équation d'état.
- Soit $P(\rho, e, p)$ l'équation d'état du fluide, on cherche à résoudre par la méthode de Newton $f(p_j^{n+1}) = 0$ où :

$$f(p_j^{n+1}) = P\left(\frac{1}{V_j^{n+1}},\ e_j^n - \left(\frac{p_j^n + p_j^{n+1}}{2} + q_j^n\right)(V_j^{n+1} - V_j^n), p_j^{n+1}\right)$$

- résultats cohérents lors du test sur l'équation des gaz parfaits

Equation de Van der Waals

Equation d'état

$$\mathcal{E} - \frac{3}{2}\left(p + \frac{a}{\tau^2}\right)(\tau - b) + \frac{a}{\tau} = 0$$

- Prise en compte de l'intéraction (a : pression de cohésion)
- Prise en compte de la taille des particules (b : covolume)

Calcul de la vitesse du son

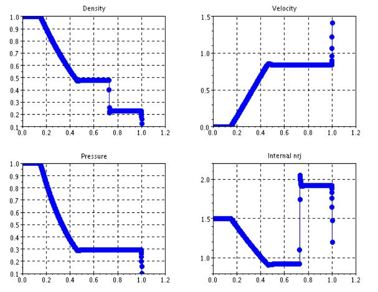
- Identités de la thermodynamique :

$$\begin{cases} TdS = d\mathcal{E} + pd\tau \\ dp = c_s^2 d\rho + \beta dS \end{cases}$$

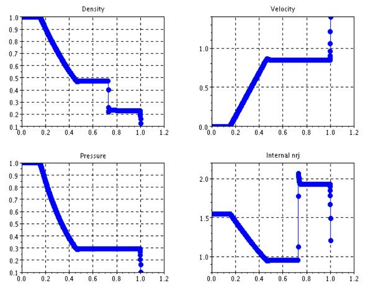
Vitesse du son

$$c_s = \sqrt{\frac{2}{3(\tau - b)}\left(a + \frac{3ab}{\tau} + \frac{5\tau^2 p}{2}\right)}$$

Résultats pour l'équation de Van der Waals

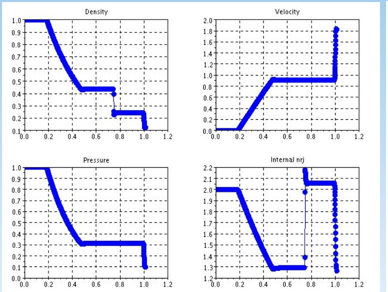


(e) $a = 0$ et $b = 0$

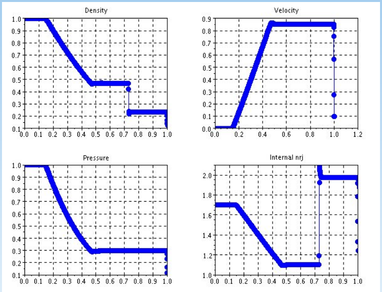


(f) $a = 0,1$ et $b = 0$

Résultats pour l'équation de Van der Waals



(g) $a = 1$ et $b = 0$



(h) $a = 1$ et $b = 0, 1$

Stiffened gas equation

Equation d'état

$$\mathcal{E} = \frac{(p+\pi)\tau}{N-1}$$

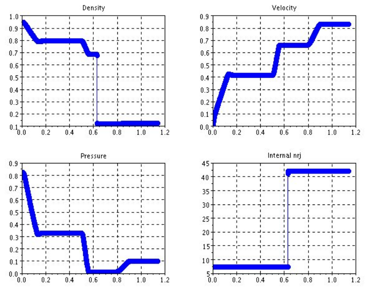
Vitesse du son

$$c_s = \sqrt{\frac{Np+\pi}{\rho}}$$

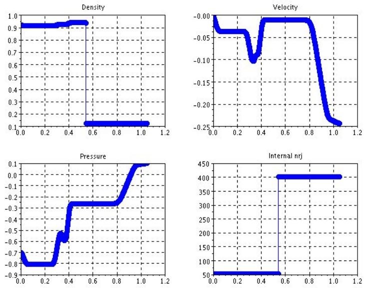
Calcul de π

$$\pi = \rho_0 c_{s0}^2 - Np_0$$

Résultats : Stiffened gas equation $\pi \gg p$

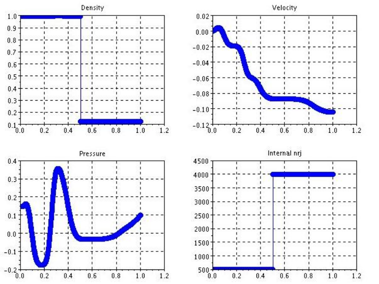


(i) $\pi = 2$



(j) $\pi = 20$

Résultats : Stiffened gas equation $\pi \gg p$



(k) $\pi = 200$

Résultats : équation des gaz parfaits modifiée : $\pi \sim p$

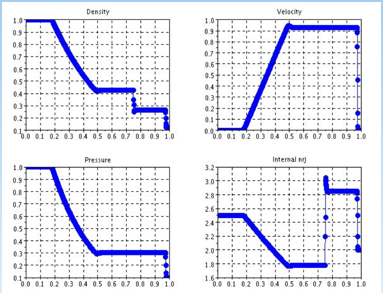
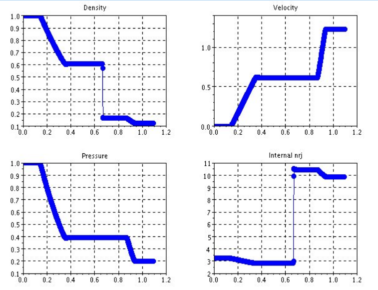
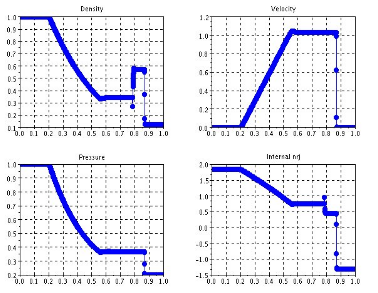


FIG.: Cas $\pi = 0$, on retrouve bien le résultat de l'équation des gaz parfaits.

Résultats : équation des gaz parfaits modifiée : $\pi \sim p$



(a) $\pi = 0,294$



(b) $\pi = -0,266$

- Solution des équations présentant un choc avec deux états constants séparés par une discontinuité se déplaçant à la vitesse $D \equiv \frac{dm}{dt}$.

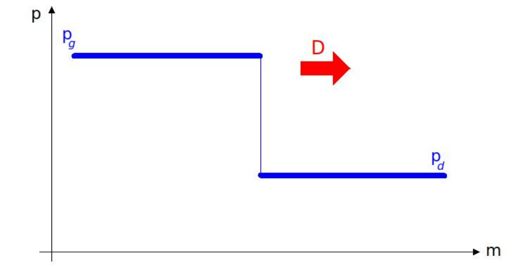


FIG.: Définition de p_g et p_d

- Relations de Rankine-Hugoniot : relations de compatibilité nécessaires à l'existence d'une telle solution

- On pose $\Delta u = u_d - u_g$

$$\begin{cases} D\Delta V - \Delta u = 0 \\ D\Delta u + \Delta p = 0 \\ D\Delta E + \Delta(pu) = 0 \end{cases}$$

où $E = \mathcal{E} + \frac{1}{2}|u|^2$.

d'où :

$$\Delta V \Delta p + (\Delta u)^2 = 0$$

$$\Delta \mathcal{E} = -(p_d \Delta V - \tfrac{1}{2}\Delta p \Delta V)$$

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\Delta(pV)}{\gamma - 1}$$

Equation quadratique en Δp

$$-\gamma p_d (\Delta u)^2 + \tfrac{1}{2}(\gamma + 1)(\Delta u)^2 \Delta p + V_d (\Delta p)^2 = 0$$

Racine négative

$$p_g = p_d + \frac{1}{V_d}|\Delta u|\left(\frac{1}{4}(\gamma+1)|\Delta u| + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}|\Delta u|\right)^2 + {c_s}_d^2}\right)$$

- Choc faible : $\Delta u \to 0$

Viscosité linéaire

$$p_g = p_d + \frac{1}{V_d}{c_s}_d|\Delta u|$$

- Choc fort : ${c_s}_d \to 0$

Viscosité quadratique

$$p_g = p_d + \frac{1}{V_d}\frac{\gamma+1}{2}|\Delta u|^2$$

Conclusion

- Commencement de recherche d'une solution stable... pas de résultat pour le moment.

Références I

R. Courant, E. Isaacson, and M. Reeves.
On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences.
Communication on pure and applied mathematics, 5(3) :243–255, 1952.

S.K. Godunov.
a finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics.
math sbornik, 47 :271–306, 1959.

B. Van Leer.
Towards the ultimate conservative difference schemes iv. a new approach to numerical convection.
Journal of computational physics, 23 :276–299, 1977.

P.L. Roe.
Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes.
Journal of computational physics, 43 :357–372, 1981.

T.J. Barth and D.C. Jespersen.
The design and application of upwind schemes on unstructured meshes.
AIAA paper 89-0366, Jan. 1989.

Références II

J. VonNeumann and R.D. Richtmyer.
a method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks.
journal of applied physics, pages 232–237, Sep. 1949.

P.D. Lax.
Hyperbolic systems of conservation laws, ii.
Communication on pure and applied mathematics, 10, 1957.

A. Harten and G. Zwas.
self adjusting hybrid schemes for shock computations.
Journal of computational physics, 9(3) :368–583, 1972.

R.D. Richtmyer and K.W. Morton.
Difference methods for initial-value problems - seconde edition.
Interscience, 1967.

D.L. Hicks.
Stability analysis of wondy (a hydrocode based pn the artificial viscosity method of von neumann and richtmyer) for a special case of maxwell's law.
Mathematics of computation, 32, 1978.

Références III

Edwige Godlewski and Pierre-Arnaud Raviart.
Hyperbolic systems of conservation laws.
ellipse - edition marketing, 1991.

Edwige Godlewski and Pierre-Arnaud Raviart.
Numerical Approximation of Hyperbolic systems of conservation laws.
Springer, 1996.

Merci pour votre attention !