

Méthode alternative pour les EDP de type Hamilton-Jacobi

Stage de L3 - Soutenance

1/35 Aurélie Lagoutte et Hadrien Salat

23 juin 2010

- 1 EDP de type Hamilton-Jacobi
 - Dilatations
 - Érosions
 - Nivellement
 - Shock filters
 - Courbure
- 2 Opérateurs morphologiques - Dilatations/Érosions
 - Opérateurs morphologiques
 - Dilatations et érosions
 - Morphologie plate
- 3 Morphologie adaptative
 - Cas V quelconque : opérateurs morphologiques quelconques
 - Cas $V > 0$ ou $V < 0$: Dilatation et érosion adaptatives
 - Adaptation dans \mathbb{Z}
- 4 Expériences
 - Effet de diverses érosions et dilatations
 - Illustration d'applications de la morphologie semi-plate
 - Idée d'application pour retirer un bruit de poisson

- 1 EDP de type Hamilton-Jacobi
 - Dilatations
 - Érosions
 - Nivellement
 - Shock filters
 - Courbure
- 2 Opérateurs morphologiques - Dilatations/Érosions
 - Opérateurs morphologiques
 - Dilatations et érosions
 - Morphologie plate
- 3 Morphologie adaptative
 - Cas V quelconque : opérateurs morphologiques quelconques
 - Cas $V > 0$ ou $V < 0$: Dilatation et érosion adaptatives
 - Adaptation dans \mathbb{Z}
- 4 Expériences
 - Effet de diverses érosions et dilatations
 - Illustration d'applications de la morphologie semi-plate
 - Idée d'application pour retirer un bruit de poisson

EDP de type Hamilton-Jacobi

Définition : EDP d'Hamilton-Jacobi

Les *EDP d'Hamilton-Jacobi* sont les équations non linéaires de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(F(x, y, t)) \cdot \|\nabla F\|$$

avec V dépendant de la solution, ce qui donne aux EDP un caractère adaptatif.

$V = 1$: Dilatations

Définition : dilatation

$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ;

$g : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction structurante à support compact, non négative et concave. La *dilatation* de f par g est définie par

$$(f \oplus g)(x) = \sup\{f(x - v) + g(v) \mid v \in \mathcal{B}\}, x \in \mathbb{R}^d$$

Dilatation au niveau s

Pour un paramètre s , on construit la dilatation de niveau s par :

- $s\mathcal{B} = \{sb \mid b \in \mathcal{B}\}, s \geq 0$;
- $g_s(x) = sg(x/s), s > 0$.

$$\delta(x, s) = (f \oplus g_s)(x) = \sup_{v \in s\mathcal{B}} \{f(x - v) + sg(v/s)\}$$

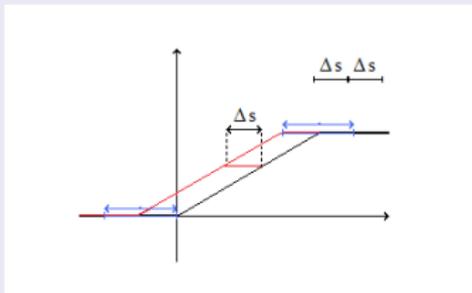
EDP pour une dilatation plate d'une fonction à une dimension

Si f est C^1 sur $[x_0 - \Delta s, x_0 + \Delta s]$, alors

$$\frac{\partial \delta}{\partial s}(x, s) = \left| \frac{\partial \delta}{\partial x}(x, s) \right| \text{ et } \delta(x, 0) = f(x)$$

Pour les autres points, on introduit la sup-derivée suivante :

$$M(f)(x) = \sup_{t \in [x - \Delta s, x + \Delta s]} \left(\lim_{r \downarrow 0} \frac{\sup\{f(x+v) \mid |v| \leq r\} - f(x)}{r} \right)$$

Exemple : dilatation d'une fonction par un élément plat de taille $2x\Delta s$ 

V=-1 : Érosions

Dilatation au niveau s

Pour un paramètre s , on construit l'érosion de niveau s par :

$$\varepsilon(x, s) = (f \ominus g_s)(x) = \inf_{v \in sB} \{f(x + v) - sg(v/s)\}$$

EDP pour une érosion plate d'une fonction à une dimension

Si f est \mathcal{C}^1 sur $[x_0 - \Delta s, x_0 + \Delta s]$, alors

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}(x, s) = - \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(x, s) \right| \text{ et } \varepsilon(x, 0) = f(x)$$

$V = \text{Sgn}(f - u) : \text{Nivellement}$

Soit f un signal de dimension 1 et g un signal de référence.

$$u_t(x, t) = \text{sgn}(f(x) - u(x, t)) |u_x(x, t)| \quad \text{et} \quad u(x, 0) = g(x)$$



(a) Image



(b) Image de référence



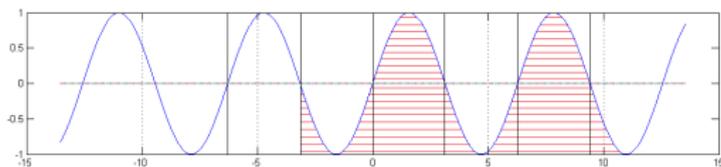
(c) Image finale

Figure: Évolution d'une EDP de nivellement sur une image

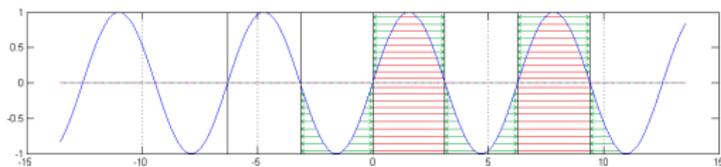
$V = -Sgn(F_{\xi\xi}) : \text{Shock filters}$

$$F_t(x, t) = -sgn(F_{\xi\xi}) \|\nabla F(x, t)\| \text{ et } u(F, 0) = f(x)$$

Où $F_{\xi\xi}$ est la dérivée directionnelle de F dans la direction $\xi = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$



(a) sin et ses ensembles de niveaux



(b) EDP agissant sur la fonction sin

$$V = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) : \text{Courbure}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) |\nabla u| \text{ et } u(0, x) = u_0(x)$$



(c) Image originale



(d) Image modifiée

Figure: Image modifiée par une méthode de courbure

1 EDP de type Hamilton-Jacobi

- Dilatations
- Érosions
- Nivellement
- Shock filters
- Courbure

2 Opérateurs morphologiques - Dilatations/Érosions

- Opérateurs morphologiques
- Dilatations et érosions
- Morphologie plate

3 Morphologie adaptative

- Cas V quelconque : opérateurs morphologiques quelconques
- Cas $V > 0$ ou $V < 0$: Dilatation et érosion adaptatives
- Adaptation dans \mathbb{Z}

4 Expériences

- Effet de diverses érosions et dilatations
- Illustration d'applications de la morphologie semi-plate
- Idée d'application pour retirer un bruit de poisson

Définition : opérateurs morphologiques

On appelle opérateur morphologique tout opérateur agissant sur un treillis complet.

Définition : Treillis

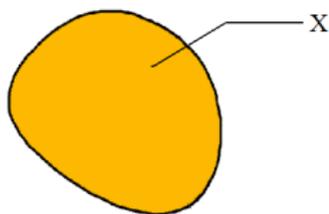
Un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel \mathcal{L} dont tout sous-ensemble fini possède une borne sup et une borne inf est appelé *treillis*.

Si tout sous-ensemble de \mathcal{L} possède une borne sup et une borne inf, le treillis est dit *complet*.

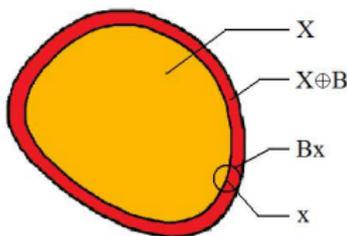
Exemples

- L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de \subseteq est un treillis complet.
- L'ensemble des images à niveaux de gris est un treillis complet.

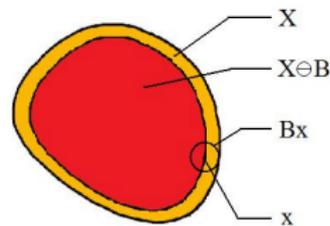
Soit $X \subseteq \mathbb{R}^2$ et B un élément structurant.



(a) X



(b) Dilatation de X par B



(c) Érosion de X par B

Définition : B_x

Soit B un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 et x un vecteur de \mathbb{R}^2 .

$$B_x = \{b + x \mid b \in B\}$$

Définition : Somme et différence de Minkowski

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^2$ et B un élément structurant ($B \subseteq \mathbb{R}^2$).

- $X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$
- $X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$

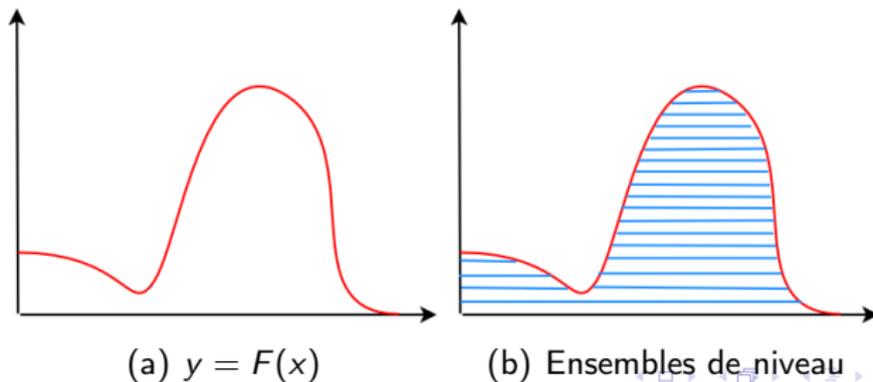
Ces opérateurs sont invariants par translation et croissants.

Définition : ensembles de niveau

Soit $F : E \rightarrow \mathcal{T}$, où \mathcal{T} est un treillis complet.

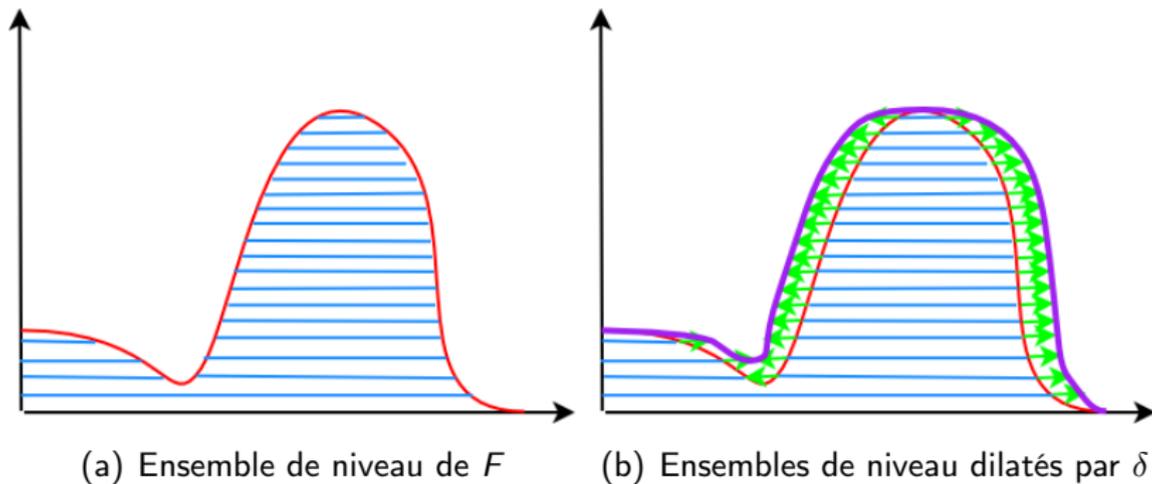
- $X(F, s) = \{x \in E \mid F(x) \geq s\}$
- $Y(F, s) = \{x \in E \mid F(x) > s\}$

Figure: On "coupe" F en ses ensembles de niveau



Soit δ une dilatation.

Figure: On applique δ à $X(F, s)$ pour tout s



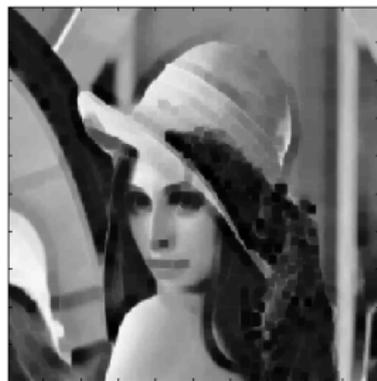
Exemple sur une image



(a) Image initiale



(b) Image dilatée

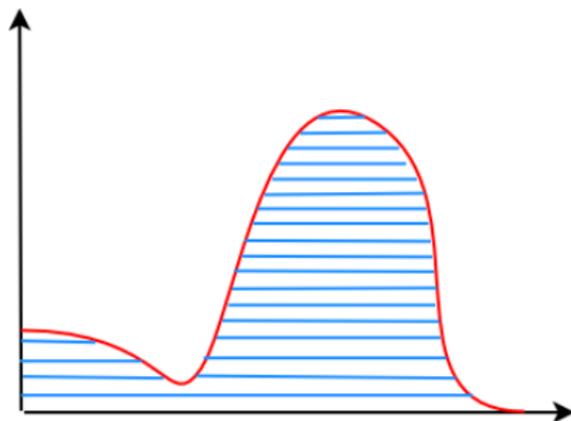


(c) Image érodée

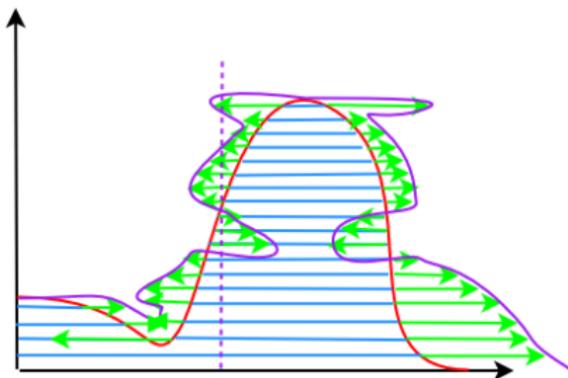
- 1 EDP de type Hamilton-Jacobi
 - Dilatations
 - Érosions
 - Nivellement
 - Shock filters
 - Courbure
- 2 Opérateurs morphologiques - Dilatations/Érosions
 - Opérateurs morphologiques
 - Dilatations et érosions
 - Morphologie plate
- 3 **Morphologie adaptative**
 - Cas V quelconque : opérateurs morphologiques quelconques
 - Cas $V > 0$ ou $V < 0$: Dilatation et érosion adaptatives
 - Adaptation dans \mathbb{Z}
- 4 Expériences
 - Effet de diverses érosions et dilatations
 - Illustration d'applications de la morphologie semi-plate
 - Idée d'application pour retirer un bruit de poisson

Soit $(\psi_s)_{s \in \mathcal{I}}$ une famille quelconque d'opérateurs morphologiques

Figure: On applique ψ_s à $X(F, s)$ pour tout s

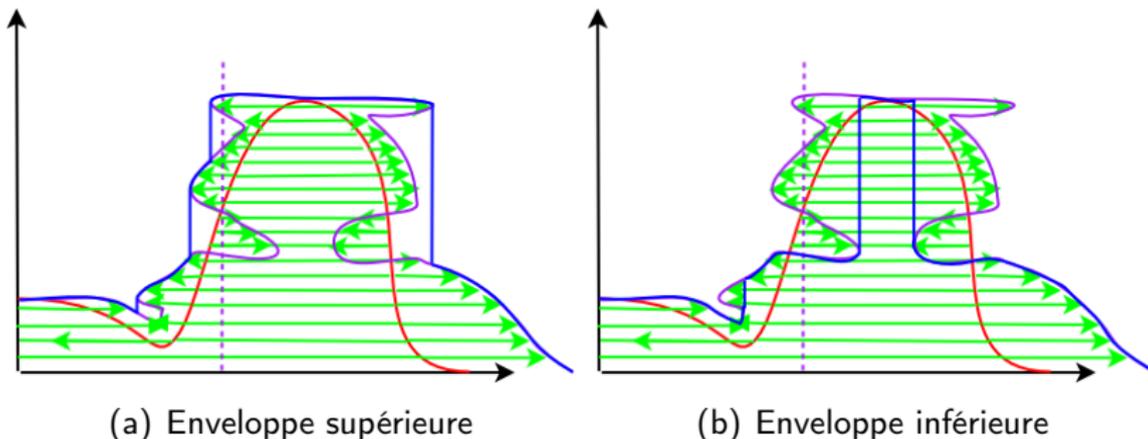


(a) Ensembles de niveau de F



(b) Ensembles de niveau transformés

Figure: Reconstruction d'une fonction correcte



Définition : enveloppes sup et inf

Soit $(Z(s))_{s \in \mathcal{T}}$ une famille de sous-ensembles de E . On définit :

- $\bar{F} : E \rightarrow \mathcal{T}$
 $x \mapsto \sup\{s \in \mathcal{T} \mid x \in Z(s)\}$
- $\underline{F} : E \rightarrow \mathcal{T}$
 $x \mapsto \inf\{s \in \mathcal{T} \mid x \notin Z(s)\}$

But : obtenir des opérateurs idempotents.

Définition : adjonction

Soit \mathcal{L} , \mathcal{M} des treillis complets, ε un opérateur de \mathcal{L} dans \mathcal{M} , et δ un opérateur de \mathcal{M} dans \mathcal{L} .

Le couple (ε, δ) est appelé *adjonction* entre \mathcal{L} et \mathcal{M} si

$$\forall X \in \mathcal{L}, \forall Y \in \mathcal{M}, \delta(X) \leq Y \Leftrightarrow X \leq \varepsilon(Y)$$

Opérateurs

Soit $(\varepsilon_s, \delta_s)_{s \in \mathcal{T}}$ une famille d'adjonctions sur les ensembles de niveau. On définit :

- $\underline{\Sigma} : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \\ F \mapsto \underline{\Sigma}(F) : x \mapsto \bigwedge \{s \mid x \notin \varepsilon_s X(F, s)\} \end{cases} ;$
- $\overline{\Delta} : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \\ F \mapsto \overline{\Delta}(F) : x \mapsto \bigvee \{s \mid x \in \delta_s Y(F, s)\} \end{cases} .$

Alors $(\underline{\Sigma}, \overline{\Delta})$ forme une adjonction sur $Fun(E, \mathcal{T})$.

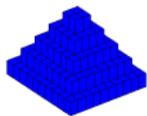
Opérateurs dans \mathbb{Z}

- $\underline{\Sigma} : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \\ F \mapsto \underline{\Sigma}(F) : x \mapsto \wedge \{s \mid x \notin \varepsilon_{s+1} Y(F, s)\} \end{cases}$
- $\overline{\Delta} : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \\ F \mapsto \overline{\Delta}(F) : x \mapsto \vee \{s \mid x \in \delta_s X(F, s)\} \end{cases}$

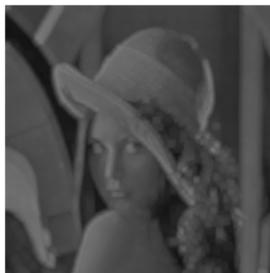
Ainsi, $(\underline{\Sigma}, \overline{\Delta})$ forme bien une adjonction, comme dans \mathbb{R} .

- 1 EDP de type Hamilton-Jacobi
 - Dilatations
 - Érosions
 - Nivellement
 - Shock filters
 - Courbure
- 2 Opérateurs morphologiques - Dilatations/Érosions
 - Opérateurs morphologiques
 - Dilatations et érosions
 - Morphologie plate
- 3 Morphologie adaptative
 - Cas V quelconque : opérateurs morphologiques quelconques
 - Cas $V > 0$ ou $V < 0$: Dilatation et érosion adaptatives
 - Adaptation dans \mathbb{Z}
- 4 Expériences
 - Effet de diverses érosions et dilatations
 - Illustration d'applications de la morphologie semi-plate
 - Idée d'application pour retirer un bruit de poisson

Éléments structurants de taille décroissante



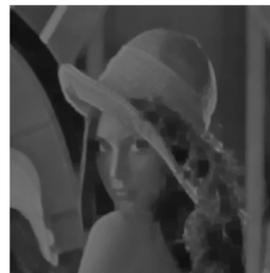
(a) Élément



(b) Dilatation

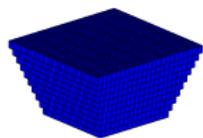


(c) Érosion

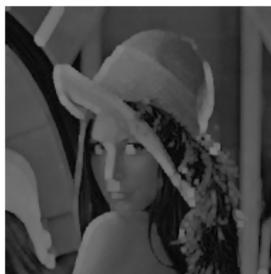


(d) Fermeture

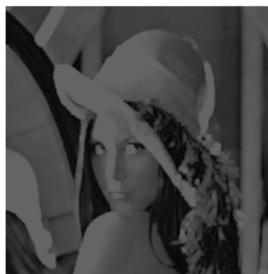
Éléments structurants de taille croissante



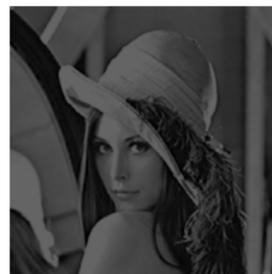
(a) Élément



(b) Dilatation

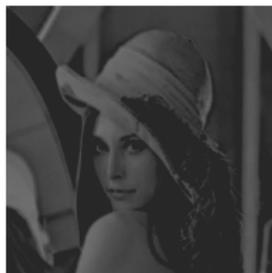
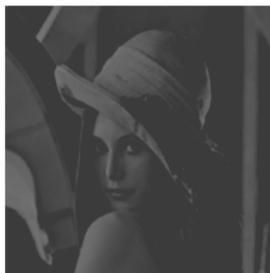
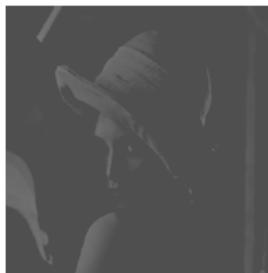
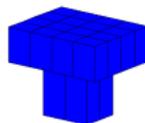


(c) Fermeture



(d) Érosion

Réduction du contraste par érosion adaptative

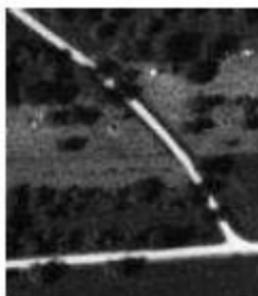
(a) $2 * E(s/40)$ (b) $2 * E(s/60)$ (c) $2 * E(s/80)$ (d) $2 * E(s/100)$ 

(e) Élément structurant

Extraction de lignes fines

Adjonction entre :

$$\delta^{v1}(f) = \bigvee_h h \delta_{M-h}[X(f, h)] \text{ et } \varepsilon^{v1}(f) = \bigvee_h h \varepsilon_{M-h}[X(f, h)]$$



(a) Image originale



(b) Resultat après une dilation classique



(c) Resultat après une dilatation δ^{v1}

Simplification d'image par filtrage semi-plat

Adjonction entre :

$$\delta^{v^2}(f) = \bigvee_h h \delta_h[X(f, h)] \text{ et } \varepsilon^{v^2}(f) = \bigvee_h h \varepsilon_h[X(f, h)]$$

$$ASF_{rec}^{v^2}(f) = \bigvee_h \cdot Rec[X(f, h) | \phi_h \gamma_h \dots \phi_1 \gamma_1(X(f, h))]$$



(a) Image originale

(b) Mahalanobis distance map

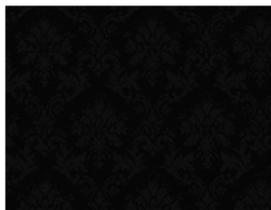
(c) Filtres par reconstruction classiques

(d) Filtres par reconstruction semi-plats

Idée d'application pour retirer un bruit de poisson



(a) Image originale



(b) Bruit de Poisson $I * u$



(c) Image modifiée



(a) Image modifiée



(b) Ouverture puis fermeture



(c) Fermeture puis ouverture

Commentaire bibliographique

Morphologie mathématique : J. Serra, G. Matheron, 1967

Lien avec les EDP :

- [1] F. Guichard, J.-M. Morel, R. Ryan
Contrast invariant image analysis and PDEs
- [2] F. Guichard, P. Maragos, J.-M. Morel,
Partial Differential Equations for Morphological Operators,
Chapter 1 of *Tribute to Georges Matheron*, Springer-Verlag, 2005
- [3] M.G. Crandall, *Viscosity Solutions : A Primer*,
University of California, 1996

Morphologie adaptative :

- [4] H. Heijmans, *Morphological Image Operators*, Academic Press, INC., 1993

Nivellement :

- [5] P. Maragos, F. Meyer, *Nonlinear PDEs and Numerical Algorithms for Modeling Levelings and Reconstruction Filters*, Scale-Space'99, Springer-Verlag, 1999
- [6] P. Maragos, F. Meyer, *Morphological Scale-Space Representation with Levelings*, Scale-Space'99, Springer-Verlag, 1999
- [7] P. Dokladal, *Méthodes à ensembles de niveau en analyse d'images*, ENSTA, 2007

Shock-filters :

- [8] B. Tremblais, B. Augereau, M. Leard, *Shock Filters and Mathematical Morphology*, Université de Poitiers, 2001

Courbure :

- [9] J.-F. Aujol, *Traitement d'images par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles*, CMLA, ENS Cachan, CNRS, PRES UniverSud, 2005

Conclusion

Travail effectué :

- Documentation : EDP d'hamilton Jacobi, opérateurs morphologiques et leur utilisation pour le traitement de l'image
- Description de la morphologie adaptative dans le cas d'une famille quelconque d'opérateurs
- Résolution : Définition des enveloppes sup et inf
- Adaptation à \mathbb{Z}
- Implémentation sous Matlab et expérimentations

Pour poursuivre le travail :

- Développer de nouvelles applications
- Recherche d'algorithmes plus efficaces