Elements de Topologie appliqués aux EDO

Alexandre Le Meur et Jiaxu Liu

Jeudi 24 Juin 2010
ENS Cachan Département de Mathématiques - CMLA
Laurent Desvillettes , Gael Raoul

23 juin 2010

Sommaire

introduction

- Dans tout le paragraphe, f est une application (au moins) continue de U dans $\mathbb{R}^n$. U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
- Dans ce qui suit, on utilisera fréquemment la condition

$$y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$$

définition du degré

Soit y_0 une valeur régulière de f. Alors l'ensemble

$$f^{-1}(y_0) = \{x \in \bar{U} : f(x) = y_0\} \text{ est fini.}$$

On peut donc définir le degré de f en y_0 par :

$$d(y_0) = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} sgn[det\ df_x]$$

- En particulier, si le degré de f en 0 est non nul, alors f admet un zéro dans l'ouvert U.
- Exemple : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ alors $d(f, 1,]0, 2[) = 0$

propriétés

propriété 1

Pour $|y_0 - y_1|$ suffisamment petit, on a :

$$d(f, y_0, U) = d(f, y_1, U)$$

Corollaire

Si y est une valeur régulière de f appartenant à la même composante connexe (par arcs) que y_0 (dans $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$), alors $d(y) = d(y_0)$.

propriétés

propriété 2 (invariance par homotopie)

Soit $F : \bar{U} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$ sur $\bar{U}$ et continue sur $[0,1]$.
Alors si $\forall t \in [0,1], y_0 \notin F(\partial U, t)$, $d(F(\cdot,t), y_0, U)$ est indépendant de t

propriété 3 (dépendance aux valeurs sur le bord)

Si $f\mid_{\partial U} = g\mid_{\partial U}$ et $y_0 \notin f(\partial U) = g(\partial U)$,
alors $d(f, y_0, U) = d(g, y_0, U)$

propriétés

propriété 4

Soit $(U_i)_i$ une famille dénombrable d'ouverts disjoints inclus dans U On suppose de plus que $y_0 \notin f(\bar{U} \setminus \bigcup U_i)$. Alors $d(f, y_0, U_i) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indice i et de plus :

$$d(f, y_0, U) = \sum_i d(f, y_0, U_i)$$

propriété 5 (composition)

Soit $f \in \mathcal{C}(U, V)$, $g \in \mathcal{C}(V, \mathbb{R}^n)$. Soit $(V_j)_j$ une famille d'ouverts connexes de $V \setminus f(\partial U)$, dont les fermetures sont des compacts disjoints inclus dans V. Alors si $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus (g \circ f)(\partial U)$, on a :

$$d(g \circ f, z_0, U) = \sum_j d(f, V_j, U) d(g, z_0, V_j)$$

Une notion topologique...

- Pour définir le degré d'une fonction continue, on l'approche par des fonctions $\mathcal{C}^1$. On a $\lim_{n\to\infty} d(f_n, U, y_0)$ ne dépend pas de la suite approximante $(f_n)_n$
  Ceci résulte de l'invariance du degré par homotopie. (il suffit de montrer qu'il n'est pas possible d'avoir $y_0 \in tf(\partial U) + (1-t)g(\partial U)$)
- Les propriétés établies précédemment sont conservées en passant à la limite.

théorème de Brouwer

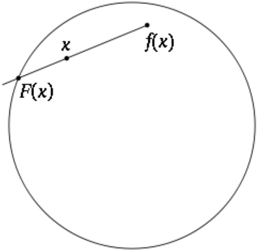
théorème de non rétraction

Soit B la boule ouverte unité dans $\mathbb{R}^n$. Alors il n'existe pas d'application continue $f : \bar{B} \to \partial B$ telle que $f\mid_{\partial B}$ soit l'identité.

Ceci se démontre simplement par l'absurde en remarquant que $d(f, B, 0) = d(I, B, 0)$ par homotopie. Le degré de f est donc 1 (non nul), et en particulier $0 \in f(B)$. C'est impossible.

théorème de brouwer

Soit B un ensemble homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, et f une application continue de B dans lui-même. Alors il existe $\bar{x} \in \bar{B}$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$



F est une fonction continue de x, et à valeur sur le bord de B. C'est donc une rétraction. C'est impossible d'après le théorème précédent.

Les fonctions compactes

Fonction compacte

Soient B un espace Banach et U un sous-ensemble de B. Une application T de B dans B est dite compacte si l'adhérence de $T(K)$ est compacte pour tout sous-ensemble borné et fermé $K \subset U$

ϵ-approximation

Soit $T : B \to U$ compacte, une ϵ-approximation de T est une suite de fonction :

$$T_\epsilon(x) = \sum_1^{j(\epsilon)} \psi_i(T(x))x_i$$

où $\{\psi_i(x)|1 \leq i \leq j(\epsilon)\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $B_1 ... B_{j(\epsilon)}$ de $\bar{T}(K)$, et $B_1 ... B_{j(\epsilon)}$ des boules de rayons ϵ et de centres $x_1 ... x_{j(\epsilon)}$

Les fonctions compactes

Une propriété de fonction compacte

Soit K un sous-ensemble borné et fermé d'un espace Banach B. On suppose que l'application $T : K \longrightarrow B$ est compacte, alors T est la limite uniforme d'une suite de fonctions dont l'image est de dimension finie.

Le théorème de Schauder

Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe d'un espace Banach B. Si $T : D \rightarrow D$ est compacte, alors T admet un point fixe.

Le degré de Leray-Schauder

- Soit $T : \bar{U} \to B$ de la forme : $T = I - K$ où K est compacte.
- On peut vérifier que $T(\partial U)$ est fermé.
- Suppons que $y_0 \notin T(\partial U)$, soient alors $\epsilon < dist(y_0, T(\partial U))$ et K_ϵ une ϵ-approximation de K dont l'image est dans V_ϵ. Posant $T_\epsilon = I - K_\epsilon$, on a alors $y_0 \notin T_\epsilon(\partial U)$, si $x \in \partial U$. Ainsi $d(T_\epsilon, V_\epsilon \cap \bar{U}, y_0)$ est défini.

Le degré de Leray-Schauder

Le degré de Leray-Schauder

On pose :

$$d(T, U, y_0) = d(T_\epsilon, V_\epsilon \cap U, y_0)$$

qu'on appelle le degré de Leray-Schauder

Cette définition est légitime puisque l'on peut montrer que $d(T_\epsilon, V_\epsilon \cap U, y_0)$ ne dépend pas de ϵ s'il est assez petit.

L'index

L'index d'une fonction

On appelle l'index de f en u_0 :

$$i_f(u_0) = d(f, S_\epsilon(u_0), 0)$$

- $f \in \mathcal{C}^1(U, B)$ de la forme $f = I - K$, et K est compacte
- u_0 est un zéro isolé de f et $S_\epsilon(u_0)$ est la boule de rayon ϵ centré en u_0
- ϵ est choisi assez petit pour que $S_\epsilon(u_0)$ contienne aucun autre zéro de f, dans ce cas $d(f, S_\epsilon(u_0), 0)$ est independant de ϵ

L'index

calcul de l'index

$i_f(u_0) = (-1)^{\sigma}$, où $\sigma = \sum_{\lambda>1} \eta_\lambda$

- λ sont des valeurs propres de $A = dK_{u_0}$, et η_λ leurs multiplicités.
- on peut montrer que A est compacte et l'ensemble de ses valeurs propres supérieures à 1 est fini.

Une application aux EDO

Considérons l'équation différentielle

$$\Delta u + f(x,u) = 0, \forall x \in \Omega$$

$$u(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$$

- On peut transformer l'équation précédente en une équation de la forme $u - KF(u) = 0, K = \Delta^{-1}$, où $F(u) = f(x,u)$
- Comme K est régulière, c'est un opérateur compact dans L^2.

Une application aux EDO

- Afin d'appliquer la théorie du degré dans l'espace de Banach $B = \{u \in \mathcal{C}^1(\Omega) | u(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\}$, on peut montrer $\forall u \in B, \|KF(u)\|_1 \leq C$ si F est suffisamment régulière.
- Soit U la boule $\|u\|_1 \leq 1 + C$, contenue dans B et $T : U \to B$ définie par $T(u) = u - KF(u)$ On cherche une solution de l'équation $T(u) = 0$.

Une application aux EDO

on considère l'application

$$T_t(u) = u - tKF(u), 0 \leq t \leq 1$$

Si $u \in \partial U$, alors $\|T_t(u)\| \geq \|u\|_1 - t\|KF(u)\|_1 \geq 1$

l'invariance par homotopie du degré

$$d(T, U, 0) = d(I, U, 0) = 1 \neq 0$$

donc il existe une solution $\bar{u} \in \Omega$ telle que $T(\bar{u}) = 0$.

Merci de votre attention

Remerciements à Laurent Desvillettes et Gaël Raoul pour leur aide précieuse !