

# Ratings et mesure IRC

Garèche Ahcène

Département de Mathématiques  
ENS Cachan

Soutenance de stage  
le 21 juin 2010

# Introduction

- Les établissements bancaires ont pris la crise de plein fouet, victimes de pertes abyssales. Dans l'ensemble il s'agit de risques insuffisamment voire pas du tout captés dans les modèles VaR 99%/10 jours.
- Face à ce constat, le comité de Bâle a souhaité renforcer son dispositif en proposant l'adoption d'une norme additionnelle au cadre existant, avec une charge dite "incrémentale" censée couvrir les risques de défaut et de migration des notations de crédit.

# Introduction

- L'objectif principal est de définir un niveau de perte exceptionnelle pour l'entreprise. Elle est définie à un horizon de capital 1 an et à un niveau de confiance de 99,9%. Autrement dit, le seuil représente un niveau de perte exceptionnelle, bien plus grave que les précédentes crises alors connues.
- On cherche à mesurer un évènement rare.

# Sommaire

- I) Présentation du problème
- II) La mesure IRC : une approche par portefeuille
- III) Echantillonnage préférentiel pour un portefeuille de risque de crédit

# Présentation du problème

## Les données historiques

Les données historiques de rating corporate en notre possession sont limitées à 30 ans. Nous avons accès aux informations depuis les années 1980. En conséquence nos connaissances restent très limitées et l'anticipation de phénomènes boursiers demeure très difficile.

## La relativité des ratings

Le rating est l'activité principale des agences de notation qui ont pour rôle de noter la solvabilité d'une entreprise. Plus précisément, elles donnent une opinion sur la capacité d'un emprunteur à rembourser ses dettes.

# Présentation du problème

Le défaut est notamment enregistré lorsque l'un des points suivants survient :

- L'entreprise ne peut plus honorer sa dette, donc faillite
- Pas de paiement de coupon en bonne date (il peut exister une période de grâce ou un montant minimum de non paiement)
- Pas de paiement du principal en bonne date

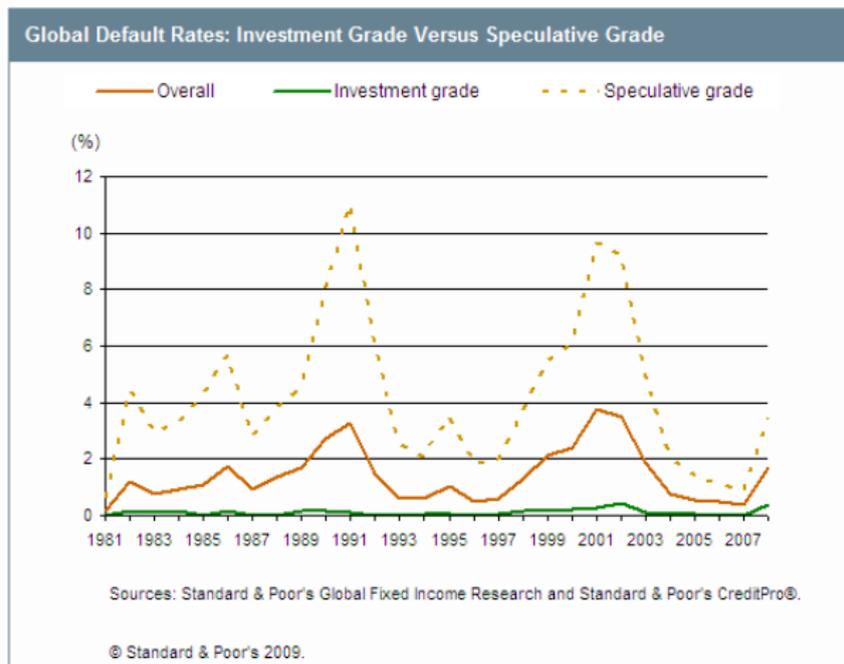
# Présentation du problème

	S&P	Moody's	Fitch
Investment Grade	AAA	Aaa	AAA
	AA	Aa	AA
	A	A	A
	BBB	Baa	BBB
Speculative Grade	BB	Ba	BB
	B	B	B
	CCC	Caa	CCC
Default	D	D	D

# Présentation du problème

AAA	Meilleure qualité de crédit, excellente solidité
AA	Très bonne qualité de crédit, très solide
A	Bonne qualité de crédit, plus sensible aux conditions économiques
BBB	La plus basse qualité de crédit en Investment Grade
BB	Prudence requise, la meilleure qualité de crédit en Speculative Grade
B	Vulnérable, peut encore honorer ses engagements
CCC	Hautement vulnérable
D	Un défaut de paiement est déjà survenu

# Présentation du problème

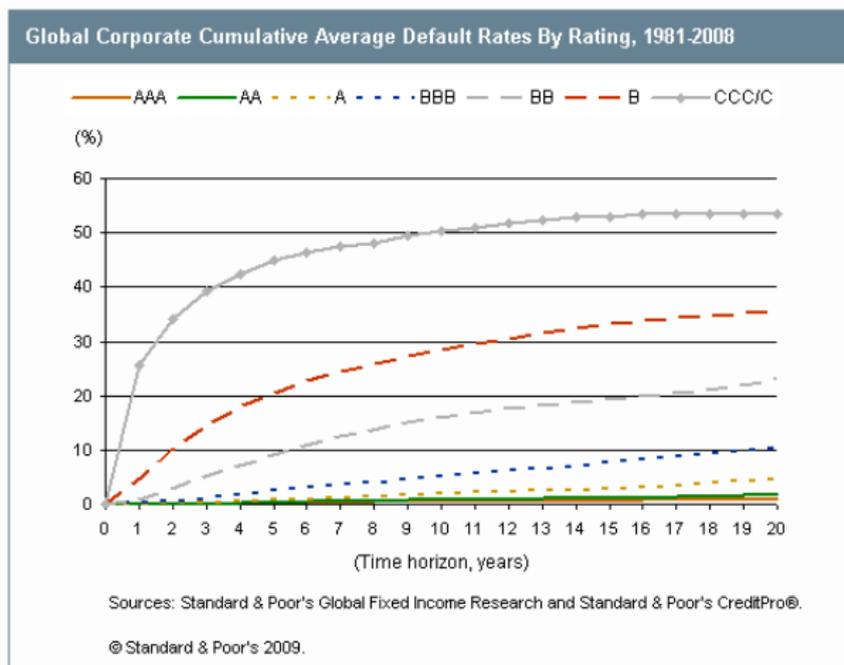


# Présentation du problème

On observe pour les bons ratings une tendance à la dégradation au cours du temps. Celle-ci se traduit par une structure par terme de probabilité de défaut (croissante) convexe, ce qui indique que la probabilité de défaut marginale est croissante en fonction de l'horizon du temps.

Inversement, une probabilité de défaut cumulée au cours du temps pour un mauvais rating est une courbe (croissante) concave. En effet, un émetteur CCC a une probabilité de défaut très élevée à court terme, mais en cas de survie sur un horizon d'un an par exemple, il y a de réelles chances pour que son rating se soit amélioré.

# Présentation du problème



# Présentation du problème

## **Utilité et nécessité du modèle gaussien.**

Le modèle gaussien fournit une méthode simple à mettre en oeuvre numériquement pour modéliser les variations conjointes des données de marché à partir d'historiques de variations quotidiennes. L'utilisation d'autres lois nécessite une mise en oeuvre de calcul très contraignante.

# Présentation du problème

Un autre intérêt réside dans les hypothèses minimalistes associées à la loi normale. Le modèle est ainsi dit robuste dans le sens où les conclusions restent les mêmes lors d'une faible variation des données.

# Présentation du problème

Le modèle gaussien est très simple à comprendre et donc à utiliser. Enfin, le calcul de la loi jointe dans le cadre du modèle gaussien est facile d'accès

# Mesure IRC

L'IRC est censée couvrir le risque de défaut et le risque de migration en captant :

- les pertes directes potentielles résultant du défaut d'un émetteur
- le potentiel de pertes directes liées à une migration des notations des agences
- les pertes indirectes comme les effets de corrélation intra sectoriels : un évènement de défaut d'un émetteur pourrait avoir des effets sur le niveau de risque attribué aux autres débiteurs d'un même secteur

# Mesure IRC

## La mesure IRC : une approche par portefeuille

La modélisation de l'IRC est réalisée au niveau du portefeuille. Elle repose à la fois sur la modélisation du risque de crédit stand-alone (probabilité de défaut dun simple émetteur, indépendamment des autres), et sur la modélisation de la corrélation de défaut (qui mesure la propension aux défauts joints).

Notons en particulier que la mesure IRC doit être sensible à la diversification du portefeuille

# Mesure IRC

## Modélisation des risques joints et importance de la corrélation

Du fait que les probabilités de défaut sont souvent très faibles, la corrélation de défaut a un rôle prépondérant sur la mesure du risque porté par un portefeuille de crédit.

Ainsi, la probabilité de défauts joints de deux émetteurs A et B s'écrit :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) + \rho_{AB} \sqrt{P(A)(1 - P(A))P(B)(1 - P(B))}$$

# Mesure IRC

Les probabilités de défaut sont en général très faibles :

$$P(A) \simeq P(B) = \varrho$$

En première approximation, la probabilité du défaut joint de deux émetteurs est proportionnelle à leur corrélation de défaut et à leur probabilité de défaut :

$$P(A \cap B) \simeq \varrho^2 + \varrho_{AB}\varrho \simeq \varrho_{AB}\varrho$$

# Mesure IRC

Sur un groupe d'émetteurs représentatif du stock, quelques dizaines de milliers de scénarii Monte-Carlo sont nécessaires pour représenter les probabilités marginales de migration et de défaut avec un degré de variance acceptable.

Si l'on souhaite représenter les probabilités de défauts joints des émetteurs pris 2 à 2 avec un degré de variance acceptable, la formule précédente suggère intuitivement qu'il faut environ dix fois plus de scénarii, soit quelques centaines de milliers de simulations, ce qui peut poser de fortes contraintes de performance.

# Mesure IRC

## Modèle

Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne. Si la réalisation de cette variable est sous un certain seuil, alors le défaut est déclenché. Le seuil est précisément calibré pour que la probabilité de défaut de l'entreprise corresponde à la probabilité que la variable  $X$  ait une valeur inférieure à ce seuil.

# Mesure IRC

Il en sera de même pour tous les autres niveaux de rating ; selon la valeur de la réalisation de la variable  $X$  la transition s'effectuera soit vers le défaut soit vers un autre niveau de rating. Si nous appelons  $i$  le rating en début de période de l'entreprise, on définit le seuil  $Z_{i,CCC}$  correspondant à la transition du rating  $i$  au défaut.

# Mesure IRC

Nous avons :

$$P(i, D) = P(X \leq Z_{i,CCC}) = \Phi(Z_{i,CCC})$$

Par ailleurs, la probabilité de transition soit vers le rating CCC soit vers le défaut est égale à  $P(i, CCC) + P(i, D)$ . On en déduit que le seuil qui déclenche une transition vers le rating CCC ou vers le défaut est défini par la relation

$$P(i, CCC) + P(i, D) = P(X \leq Z_{i,B}) = \Phi(Z_{i,B})$$

# Mesure IRC

On construit ainsi de proche en proche les seuils associés aux différentes transitions de rating. De façon générale, les seuils définissant les transitions s'écrivent :

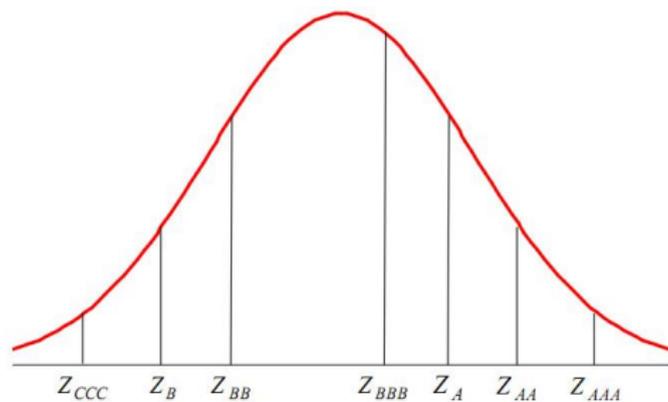
$$Z_{i,j} = \Phi^{-1}(\sum_{k>j} P(i, k))$$

# Mesure IRC

On déduit de la construction précédente que la probabilité de transition du rating  $i$  vers le rating  $j$  (différent du rating AAA ou du défaut) est donnée par :

$$P(i, j) = P(Z_{i,j} < X \leq Z_{i,j-1}) = \Phi(Z_{i,j-1}) - \Phi(Z_{i,j})$$

# Mesure IRC

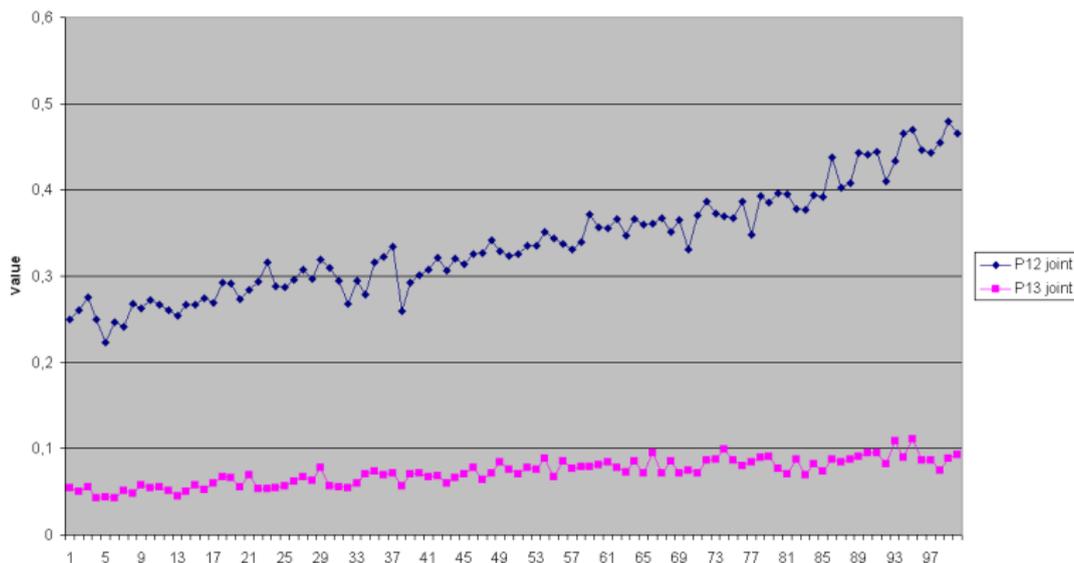


# Mesure IRC

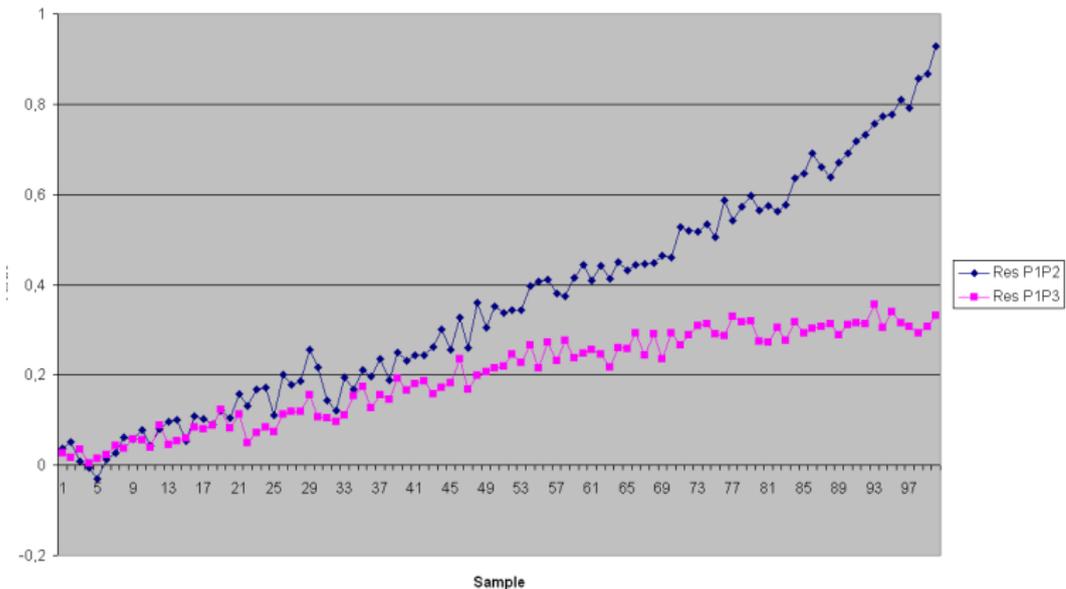
L'interprétation graphique de la courbe en cloche est que l'aire interceptée par la courbe entre les seuils  $Z_{i,j-1}$  et  $Z_{i,j}$  est égale la probabilité de transition du rating  $i$  vers le rating  $j$ .

Le modèle IRC a donné lieu à des calculs de corrélation de défaut. Nous avons comparé la corrélation dans deux cas : entre deux évènements qui ont une forte probabilité de survenir et entre un évènement qui a une forte probabilité de survenir et un autre qui a une faible probabilité de se produire.

P12 P13 joint



P1P2 P1P3 Result



# Echantillonnage préférentiel

## Modélisation.

$m$  = nombre d'émetteurs auxquels le portefeuille est exposé

$Y_k$  = défaut du  $k^{\text{ième}}$  émetteur

$p_k$  = probabilité marginale que le  $k^{\text{ième}}$  émetteur fasse défaut

$c_k$  = perte issue du défaut du  $k^{\text{ième}}$  émetteur

$L = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$  = perte totale issue des défauts

$\Phi$  = fonction de répartition de la loi normale centrée réduite  
(gaussienne)

On représente alors les indicateurs de défaut comme suit :

$$Y_k = 1_{X_k > x_k}, k=1..m$$

avec  $x_k = \Phi^{-1}(1 - p_k)$

car  $P(Y_k = 1) = P(X_k > x_k) = p_k$

$$X_k = a_{k1}Z_1 + \dots + a_{kd}Z_d + b_k\varepsilon_k$$

$Z_1, \dots, Z_d$  suivent une loi normale centrée réduite : ils représentent les différents secteurs d'activité (automobile, aéronautique...)

Les  $\varepsilon_k$  forment une famille de variables aléatoires indépendantes et suivent une loi normale centrée réduite

$$a_{k1}, \dots, a_{kd} \text{ sont tels que } a_{k1}^2 + \dots + a_{kd}^2 < 1 \text{ et } b_k = \sqrt{1 - (a_{k1}^2 + \dots + a_{kd}^2)}$$

- corrélation entre  $X_k$  et  $X_j = a_k a_j^T$
- probabilité de défaut conditionnelle pour le  $k^{\text{ième}}$  débiteur sachant  $Z$  :

$$p_k(Z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_k) + a_k Z}{b_k}\right)$$

## Emetteurs indépendants

On suppose les  $a_{kj}$  pour  $j$  différent de  $k$  tous nuls.

Si nous cherchons à remplacer chaque  $p_k(Z)$  par une autre probabilité de défaut  $q_k$  le rapport de vraisemblance est

$$\left(\frac{p_k(Z)}{q_k}\right)^{Y_k} \left(\frac{1-p_k(Z)}{1-q_k}\right)^{1-Y_k}.$$

exponential twisting : 
$$p_{k,\Theta} = \frac{p_k \exp(\Theta c_k)}{1 + p_k (\exp(\Theta c_k) - 1)}$$

Le rapport de vraisemblance total est ainsi :

$$\prod_{k=1}^n \left( \frac{p_k(Z)}{p_{k,\Theta}} \right)^{Y_k} \left( \frac{1-p_k(Z)}{1-p_{k,\Theta}} \right)^{1-Y_k} = \exp(-\Theta L + \Psi(\Theta, Z))$$

où  $\Psi(\Theta, Z) = \log E(\exp(\Theta L) | Z = z) =$   
 $\sum_{k=1} \log(1 + p_k(Z)(\exp(\Theta c_k) - 1))$

- choisir  $\Theta$  = minimiser la variance ou de manière équivalente le moment d'ordre 2 de l'estimateur
- Le second ordre est donné par :

$$M_2(x) = M_2(x, \Theta) = E_{\Theta}[1_{L > x} \exp(-2\Theta L + 2\Psi(\Theta, Z))]$$
$$\leq \exp(-2\Theta L + 2\Psi(\Theta, Z))$$

Minimiser le moment d'ordre 2 est assez difficile mais minimiser le majorant est beaucoup plus accessible : nous devons minimiser  $\Theta L - \Psi(\Theta, Z)$  sous  $\Theta \geq 0$ . La fonction  $\Psi$  est strictement convexe et passe par l'origine donc le maximum est atteint à

$$\Theta_x = \begin{cases} \text{solution unique de } \Psi'(\Theta) = x \\ 0 \end{cases} \quad \text{sinon}$$

## Emetteurs non indépendants

On cherche à généraliser la méthode utilisée précédemment lorsque les émetteurs ne sont plus indépendants.

Conditionnellement à  $Z=z$  les indicateurs de défaut sont indépendants, le  $k^{\text{ième}}$  émetteur a pour probabilité conditionnelle de défaut  $p_k(z)$ . Nous allons procéder comme précédemment.

- Nous générons un vecteur  $Z$  gaussien standard.
- Nous calculons la probabilité de défaut conditionnelle  $p_k(Z)$ .
- On génère les indicateurs de défaut  $Y_1, \dots, Y_m$  depuis les probabilités conditionnelles de défaut modifiées :
$$p_{k, \Theta_x(Z)}(Z) = \frac{p_k(Z) \exp(\Theta_x(Z)c_k)}{1 + p_k(Z)(\exp(\Theta_x(Z)c_k) - 1)}$$
- On calcule  $L = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$  et on retourne l'estimateur  $1_{L > x} \exp(-\Theta_x(Z)L + \Psi(\Theta_x(Z), Z))$

- Nous appliquons l'Importance Sampling aux facteurs  $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$  ainsi qu'aux probabilités de défaut conditionnelles.
- On échantillonne  $Z$  depuis la densité proportionnelle à la fonction
 
$$z \mapsto P(L > x | Z = z) \exp\left(-\frac{zz^T}{2}\right).$$
 Or ceci est impossible car on ne connaît pas la valeur de  $P(L > x)$  (c'est ce qu'on cherche!).
- Glasserman suggère d'utiliser alors une densité de loi normale. Cela conduit à la résolution du problème d'optimisation  $\max_z P(L > x | Z = z) \exp\left(-\frac{zz^T}{2}\right)$  qui est aussi la moyenne de la loi normale que nous utilisons. Une fois la moyenne  $\mu$  trouvée on utilise l'algorithme suivant :

Générer  $Z$  depuis la loi  $N(\mu, I)$

On applique l'algorithme de la partie précédente

On retourne l'estimateur

$$1_{L > x} \exp(-\Theta_x(Z)L + \Psi(\Theta_x(Z), Z)) \exp(-\mu^T Z + \mu^T \mu / 2)$$

Trouver  $\mu$  est un problème difficile. Nous utilisons pour cela une approximation de loi normale :

$$E[L|Z = z] = \sum_k p_k(z) c_k \text{ et}$$
$$Var[L|Z = z] = \sum_k c_k^2 p_k(z) (1 - p_k(z))$$
$$P(L > x | Z = z) \approx 1 - \Phi\left(\frac{x - E[L|Z=z]}{\sqrt{Var[L|Z=z]}}\right)$$

Cette approximation vient du fait que lorsque le nombre d'émetteurs devient très grand la distribution des pertes suit une loi normale (théorème de Vasicek).

# Bibliographie

*-Nouvelles exigences règlementaires : besoins économétriques*

Philippe Vité

*-IRC : secteurs de rating et secteurs de spread*

Philippe Vité

*-Moteur de diffusion des données de marché pour le calcul de la VaR*

Philippe Vité

*-Importance Sampling for Portfolio Credit Risk*

P.Glasserman and Jingyi Li, Management Science, vol 51,  
1643-1656, 2005

*-Probability : theory and examples*

R.Durrett, Duxbury Press, 2 edition (August 30, 1995)

*-Probability with martingales*

D.Williams, Cambridge University Press (February 22, 1991)

*-Monte Carlo Methods in Financial Engineering*

P.Glasserman, Springer, 2003

*-Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*

B.Lapeyre,D.Lamberton, Ellipses, 1997

*-Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov*

P.Brémaud, Springer, 2009