Le modèle de Cucker-Smale

Émergence et formation de structures et de motifs dans les groupes (troupeaux, bancs, colonies, nuées)

Jérémy Dubut & Clovis Eberhart

École Normale Supérieure de Cachan

28 avril 2011

Plan

Mouvement collectif

Définition (Mouvement collectif)

Dans un système constitué de nombreuses entités similaires, sous certaines conditions, ces entités peuvent adopter un comportement collectif presque entièrement déterminé par les effets imposés par les autres entités du système.

Flocking

On considère ici N oiseaux qui se déplacent dans $\mathbb{R}^3$. Au temps t, l'oiseau i est à la position $x_i(t)$, avec la vitesse $v_i(t)$. On note $x_c(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$ et $v_c(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i(t)$.

Définition (*flocking*)

On dit qu'il y a *flocking* quand les oiseaux alignent leurs vitesses :

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \|v_i(t) - v_c(t)\|^2 = 0$$

et qu'ils forment un groupe :

$$\sup_{0\leqslant t<+\infty} \sum_{i=1}^{N} \|x_i(t) - x_c(t)\|^2 < +\infty$$

Le modèle de Cucker-Smale (C-S)

Dans ce modèle simple, chaque oiseau ajuste sa vitesse en fonction de celle des autres oiseaux et de sa distance à eux.

Définition (Cucker-Smale)

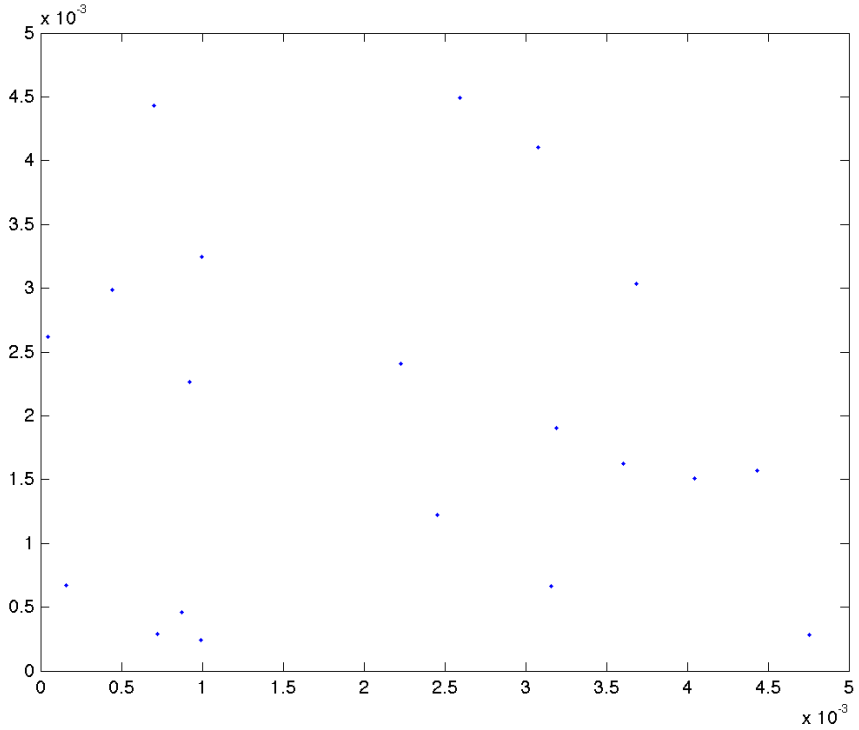
Le modèle de Cucker-Smale continu est défini par l'ensemble d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_i(t) \\ \dfrac{dv_i}{dt} = \dfrac{\lambda}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \psi(\|x_i(t) - x_j(t)\|)(v_j(t) - v_i(t)) \end{cases}$$

où ψ est une fonction mesurable décroissante.

On utilisera dans la suite $\psi_1(s) = \dfrac{\alpha}{s^\beta}$ et $\psi_2(s) = \dfrac{\alpha}{(1+s^2)^{\beta/2}}$.

Simulation



Système d'inégalités différentielles dissipatives (SDDI)

Définition (SDDI)

Les inégalités suivantes forment un système d'inégalités différentielles dissipatives :

$$\left|\frac{dX}{dt}\right| \leqslant V, \qquad \frac{dV}{dt} \leqslant -\Phi(X)V$$

où (X, V) sont positives et Φ positive et mesurable.

Réduction de C-S à un SDDI

On suppose désormais $x_c = 0$, $v_c = 0$, et on note $\|x\| = \sum_{i=1}^N \|x_i\|$ et $\|v\| = \sum_{i=1}^N \|v_i\|$.

Lemme 1

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N \|v_i\|^2 = -\frac{\lambda}{N}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N} \psi(\|x_j - x_i\|)\|v_j - v_i\|^2$$

Lemme 2

Si (x, v) sont solution de C-S, alors elles satisfont le SDDI :

$$\left|\frac{d\|x\|}{dt}\right| \leqslant \|v\|, \qquad \frac{d\|v\|}{dt} \leqslant -\frac{\lambda}{N}\psi(2\|x\|)\|v\|$$

Preuve du lemme 2

preuve du lemme 2.

Avec Cauchy-Schwartz, on a :

$$2\|x\|\left|\frac{d\|x\|}{dt}\right| = \pm\frac{d\|x\|^2}{dt} = \pm 2\langle v, x\rangle \leqslant 2\|x\|\|v\|, \text{ donc } \left|\frac{d\|x\|}{dt}\right| \leqslant \|v\|$$

Comme $\max|x_i - x_j| \leqslant 2\|x\|$ et que ψ est décroissante, on a :

$$\frac{d\|v\|^2}{dt} \leqslant -\frac{\lambda}{N}\psi(2\|x\|)\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}\|v_j - v_i\|^2 = -\frac{2\lambda}{N}\psi(2\|x\|)\|v\|^2, \text{ d'où :}$$

$$\frac{d\|v\|}{dt} \leqslant -\frac{\lambda}{N}\psi(2\|x\|)\|v\|$$

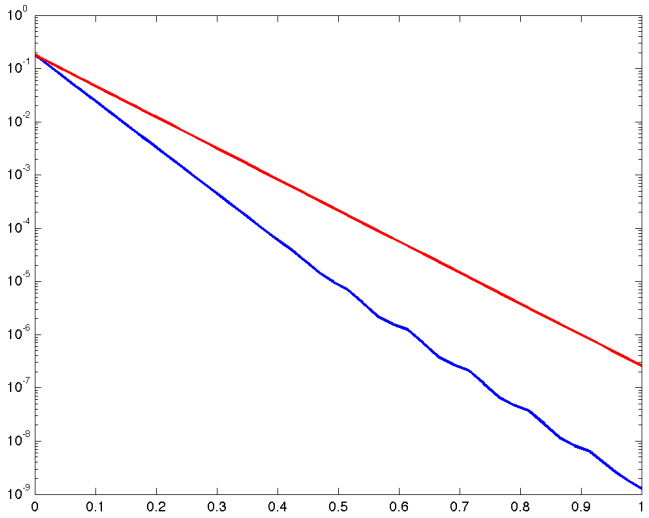
□

Théorème de base

Théorème

Si $\|v_0\| < \int_{\|x_0\|}^{\infty} \Phi(s)ds$, alors il existe $x_M \geqslant 0$ tel que :

$$\|v_0\| = \int_{\|x_0\|}^{x_M} \Phi(s)ds \text{ et } \forall t \geqslant 0, \|x(t)\| \leqslant x_M,\ \|v(t)\| \leqslant \|v_0\| e^{-\Phi(x_M)t}$$



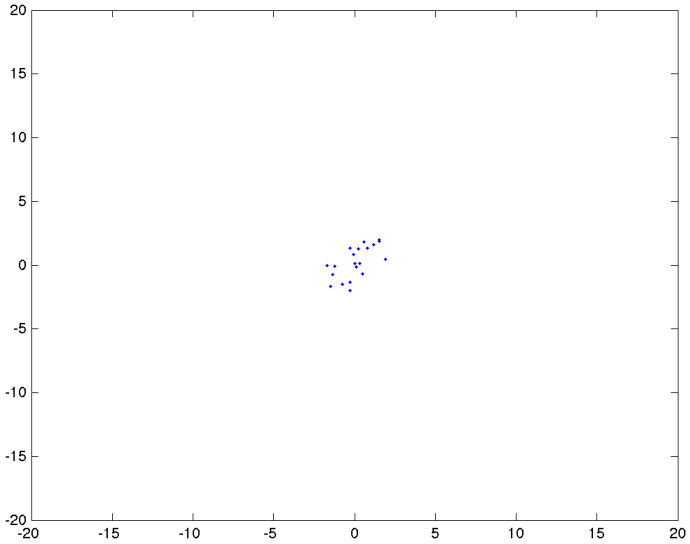
Application à C-S

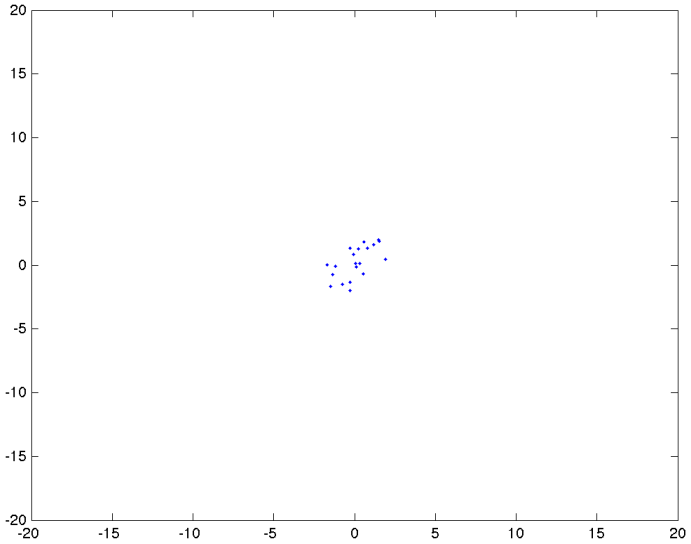
Théorème

pour ψ_1 et ψ_2, on a :

- Si $\beta \in [0,1]$, alors il y a toujours *flocking*
- Si $\beta \in]1,\infty[$, alors il y a *flocking* quand $\|v_0\| < \int_{\|x_0\|}^{\infty} \Phi(s)ds$

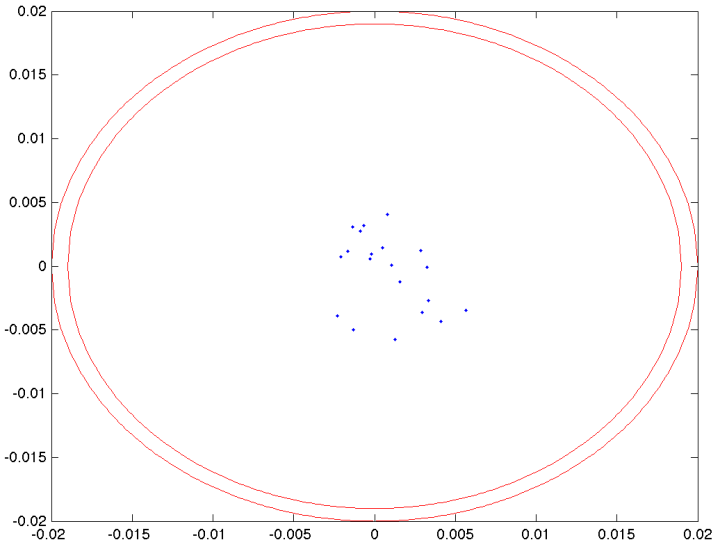
Exemple de divergence pour $\beta > 1$

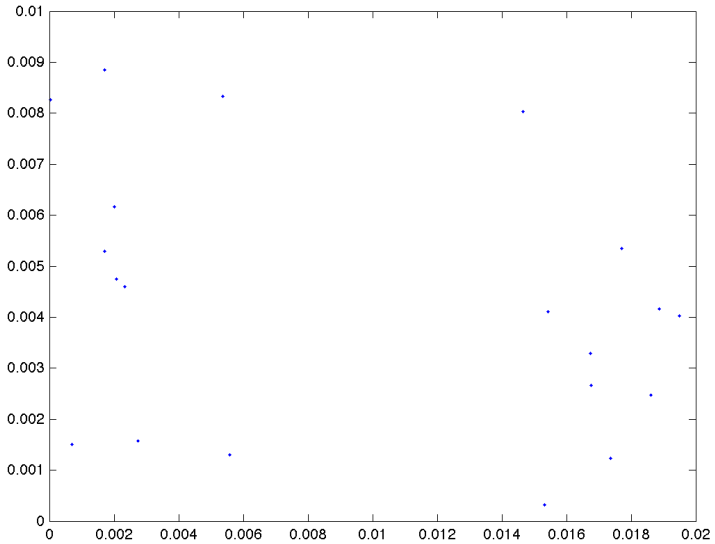




Présence de murs

On peut rajouter des murs qui repoussent les oiseaux suivant un potentiel ou les réfléchissent.

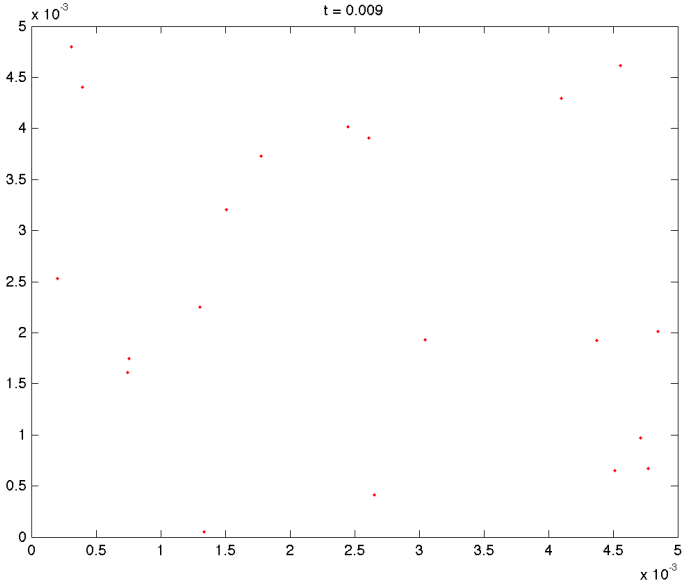


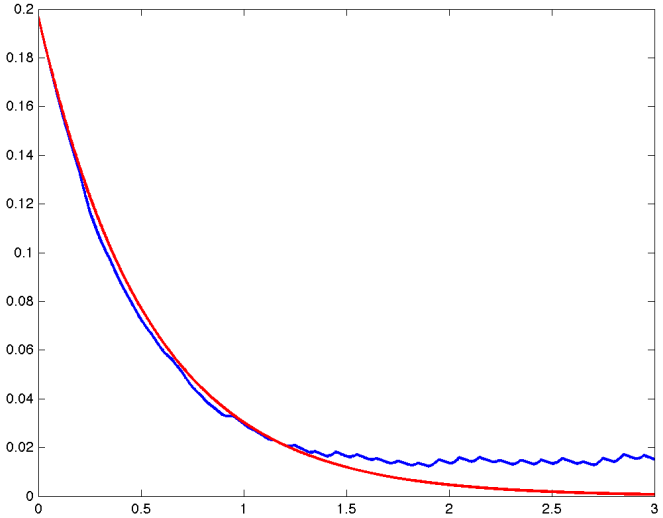


Ajout de bruit blanc

On peut aussi rajouter une accélération aléatoire à chaque oiseau :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^{N} \psi(\|x_i(t) - x_j(t)\|)(v_j(t) - v_i(t)) + \xi_i(t)$$





Conclusion

- Modèle récent qui décrit le mouvement collectif (2007)
- Existence de nombreux résultats théoriques
- Beaucoup de paramètres, modèle flexible et robuste
- Il manque des aspects fondamentaux du *flocking* (aléatoire...)

Bibliographie

- *A Simple Proof of the Cucker-Smale Flocking Dynamics and Mean-Field Limit*, Seung-Yeal Ha and Jian Liu, Communications in Mathematical Science, Vol. 7, No. 2, pp. 297-325, 2009 International Press
- *Emergent Behavior in Flocks*, Felipe Cucker and Steve Smale, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 52, No. 5, May 2007
- *Collective Motion*, Tamás Vicsek and Anna Zafiris, August 2010