

Vitesse du son en mécanique des multi-fluides

Benoist Clément Courtès Clémentine Inglard Mélanie

encadrés par Jean-Michel Ghidaglia et Saad Benjelloun

Introduction

Vision mathématique
Valeur propre d'une matrice
jacobienne

Introduction

Vision mathématique

Valeur propre d'une matrice
jacobienne

Vision physique

Vitesse de propagation d'une
perturbation

Introduction

Vision mathématique

Valeur propre d'une matrice
jacobienne

Vision physique

Vitesse de propagation d'une
perturbation

Confronter différentes approches de la vitesse du son

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Nos différentes approches
 - Présentation des trois définitions
 - Illustration : le cas monofluide
- 3 Du modèle bi-fluide aux vitesses du son
 - Approche mathématique dans le modèle à une vitesse
 - Étude physique et thermodynamique
 - Autres modèles étudiés
- 4 Confrontation des trois définitions via l'expérience
 - Comparaison à des mesures empiriques
 - Modélisation par une simulation
 - Obtention numérique d'une vitesse mécanique
- 5 Conclusion

Définition : Vitesse mécanique du son c_p

La vitesse mécanique du son, dans un milieu homogène, correspond à la vitesse de propagation d'une perturbation de pression.

Définition : Vitesse mécanique du son c_p

La vitesse mécanique du son, dans un milieu homogène, correspond à la vitesse de propagation d'une perturbation de pression.

Définition : Admissibilité

On dit que le système $\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v)$ est admissible sur G , ouvert connexe, si :

- il est régulièrement hyperbolique sur G (diagonalisable et de matrice de passage \mathcal{C}^∞),
- $\exists c > 0$ tel que $\text{Sp}(A_0(v)) \subset \{-c, 0, c\}$.

Définition : Vitesse mécanique du son c_p

La vitesse mécanique du son, dans un milieu homogène, correspond à la vitesse de propagation d'une perturbation de pression.

Définition : Admissibilité

On dit que le système $\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v)$ est admissible sur G , ouvert connexe, si :

- il est régulièrement hyperbolique sur G (diagonalisable et de matrice de passage \mathcal{C}^∞),
- $\exists c > 0$ tel que $\text{Sp}(A_0(v)) \subset \{-c, 0, c\}$.

Définition : Vitesse mathématique du son c_m

Si le système quasi-linéaire est admissible, la vitesse du son mathématique est la seule valeur propre strictement positive de A_0 .

Définition : Vitesse mécanique du son c_p

La vitesse mécanique du son, dans un milieu homogène, correspond à la vitesse de propagation d'une perturbation de pression.

Définition : Vitesse thermodynamique du son c_t

La vitesse du son thermodynamique

- d'un mono-fluide est : $c_t = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$.
- d'un bi-fluide est : $c_t = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_1, s_2, \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}}}$.

Définition : Vitesse mathématique du son c_m

Si le système quasi-linéaire est admissible, la vitesse du son mathématique est la seule valeur propre strictement positive de A_0 .

Euler mono-fluide

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right.$$

Euler mono-fluide

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right.$$

$$c_m = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

Euler mono-fluide

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right.$$

$$c_m = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0.$$

Euler mono-fluide

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right.$$

$$c_m = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0.$$

$$c_t = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

Modèle une vitesse non isentropique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 u \\ \alpha_2 \rho_2 u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{pmatrix} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ T = \mathcal{T}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{T}_2(\rho_2, e_2). \end{array} \right.$$

Modèle une vitesse non isentropique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 u \\ \alpha_2 \rho_2 u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{pmatrix} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ T = \mathcal{T}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{T}_2(\rho_2, e_2). \end{array} \right.$$

Forme quasi-linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial t} + df_0(v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Modèle une vitesse non isentropique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 u \\ \alpha_2 \rho_2 u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{pmatrix} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ T = \mathcal{T}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{T}_2(\rho_2, e_2). \end{array} \right.$$

Forme quasi-linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial t} + df_0(v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$c_m^2 = \frac{c_1^2 c_2^2 (\gamma_1 \alpha_1 C_1^v \rho_1 + \gamma_2 \alpha_2 C_2^v \rho_2)}{\rho \left(c_1^2 \gamma_2 \alpha_2^2 C_2^v + c_2^2 \gamma_1 \alpha_1^2 C_1^v + \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 \left(c_1^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} C_1^v + c_2^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} C_2^v \right) - 2 \alpha_1 \alpha_2 c_1 c_2 \sqrt{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)} \gamma_1 \gamma_2 C_1^v C_2^v \right)}$$

Modèle une vitesse non isentropique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 u \\ \alpha_2 \rho_2 u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{pmatrix} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ T = \mathcal{T}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{T}_2(\rho_2, e_2). \end{array} \right.$$

Forme quasi-linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial t} + df_0(v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$c_m^2 = \frac{c_1^2 c_2^2 (\gamma_1 \alpha_1 C_1^v \rho_1 + \gamma_2 \alpha_2 C_2^v \rho_2)}{\rho \left(c_1^2 \gamma_2 \alpha_2^2 C_2^v + c_2^2 \gamma_1 \alpha_1^2 C_1^v + \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 \left(c_1^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} C_1^v + c_2^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} C_2^v \right) - 2 \alpha_1 \alpha_2 c_1 c_2 \sqrt{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)} \gamma_1 \gamma_2 C_1^v C_2^v \right)}$$

Cas gaz parfait :

$$c_m^2 = \frac{\alpha_1 (\gamma_2 - 1) \rho_1 c_1^2 + \alpha_2 (\gamma_1 - 1) \rho_2 c_2^2}{\rho (\alpha_1 (\gamma_2 - 1) + \alpha_2 (\gamma_1 - 1))}$$

Modèle une vitesse non isentropique

Équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0$$

$$c_p^2 = \frac{\left(\frac{\varphi_2}{\rho_0 \varphi_1} - \frac{\rho_0 k_2}{\rho_0 \alpha_{20}} \right)}{\frac{\rho_{20}}{k_1 \rho_{10} (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^V - \rho_0)} \left(\frac{C_2^V}{C_1^V} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \left(\frac{\alpha_{20} \varphi_2}{\varphi_1} + \rho_{20} \left(C_2^2 - \frac{k_2 \rho_0}{\rho_{20}} \right) \right) - 1 - \frac{\alpha_{10} k_2}{\alpha_{20} k_1}}$$

Modèle une vitesse non isentropique

Équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0$$

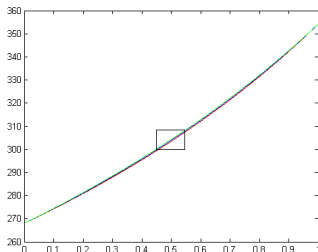
$$c_p^2 = \frac{\left(\frac{\varphi_2}{\rho_0 \varphi_1} - \frac{\rho_0 k_2}{\rho_0 \alpha_{20}} \right)}{\frac{\rho_{20}}{k_1 \rho_{10} (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^V - \rho_0)} \left(\frac{C_2^V}{C_1^V} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \left(\frac{\alpha_{20} \varphi_2}{\varphi_1} + \rho_{20} \left(c_2^2 - \frac{k_2 \rho_0}{\rho_{20}} \right) \right) - 1 - \frac{\alpha_{10} k_2}{\alpha_{20} k_1}}$$

$$dp = c_t^2 d\rho + a_1 d\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right) + a_2 ds_1 + a_3 ds_2$$

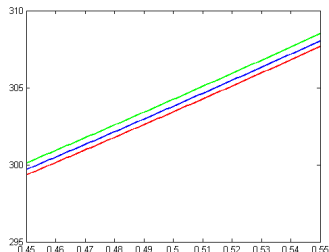
$$c_t = \sqrt{\frac{c_1^2 c_2^2 \rho_1 \rho_2}{\rho (\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)}}$$

Modèle une vitesse non isentropique

Comparaison théorique des trois vitesses



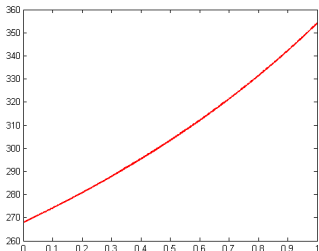
Azote-CO₂



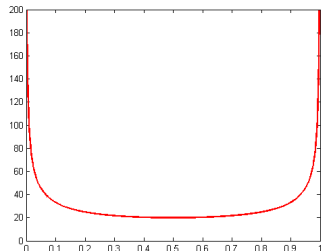
Zoom

Modèle une vitesse non isentropique

Monotonie



Azote-CO₂



Eau-air

Modèle une vitesse isentropique

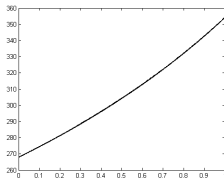
$$c_m = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2 c_1^2 c_2^2}{\rho (\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)}}$$

Modèle une vitesse isentropique

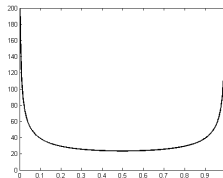
$$c_m = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2 c_1^2 c_2^2}{\rho(\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)}}$$

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \frac{\rho_1 \rho_2 c_1^2 c_2^2}{\rho(\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0$$

Modèle une vitesse isentropique



Azote-CO₂



Eau-air

$$c_m = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2 c_1^2 c_2^2}{\rho (\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)}}$$

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \frac{\rho_1 \rho_2 c_1^2 c_2^2}{\rho (\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0$$

Modèle deux vitesses

Définition : Admissibilité faible

Le système

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v)$$

est faiblement admissible sur G , ouvert connexe, si $\exists c_m > 0$ tel que $\text{Sp}(A_0(v)) \subset \{-c_m, 0, c_m\}$.

Modèle deux vitesses

Définition : Admissibilité faible

Le système

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v)$$

est faiblement admissible sur G , ouvert connexe, si $\exists c_m > 0$ tel que $\text{Sp}(A_0(v)) \subset \{-c_m, 0, c_m\}$.

$$c_m = \sqrt{\frac{c_2^2 c_1^2 (\rho_2 \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1)}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1}}$$

Modèle deux vitesses

Définition : Admissibilité faible

Le système

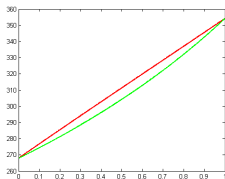
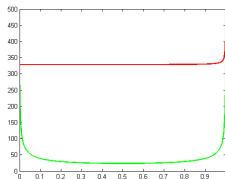
$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v)$$

est faiblement admissible sur G , ouvert connexe, si $\exists c_m > 0$ tel que $\text{Sp}(A_0(v)) \subset \{-c_m, 0, c_m\}$.

$$c_m = \sqrt{\frac{c_2^2 c_1^2 (\rho_2 \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1)}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1}}$$

$$\frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^4} + b_1 \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^3 \partial x} - b_2 \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t \partial x^3} + b_3 \frac{\partial^4 \delta p}{\partial x^2 \partial t^2} - b_4 \frac{\partial^4 \delta p}{\partial x^4} = 0.$$

Modèle deux vitesses

Azote-CO₂

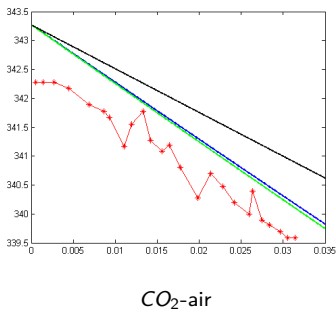
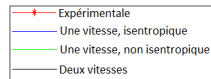
Eau-air

$$c_m = \sqrt{\frac{c_2^2 c_1^2 (\rho_2 \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1)}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1}}$$

$$\frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^4} + b_1 \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^3 \partial x} - b_2 \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t \partial x^3} + b_3 \frac{\partial^4 \delta p}{\partial x^2 \partial t^2} - b_4 \frac{\partial^4 \delta p}{\partial x^4} = 0.$$

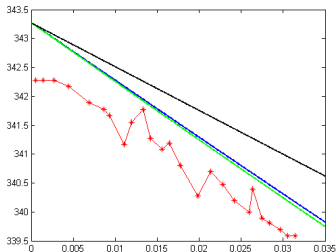
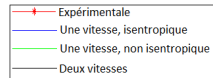
Vitesse mathématique et données expérimentales

Vitesse du son dans des bi-fluides courants, exemples probants

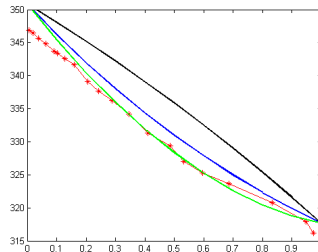


Vitesse mathématique et données expérimentales

Vitesse du son dans des bi-fluides courants, exemples probants



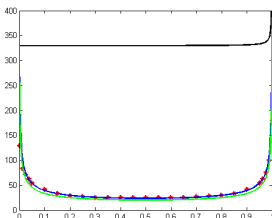
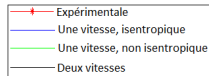
CO_2 -air



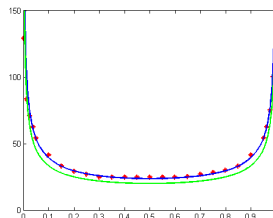
Ar-N_2

Vitesse mathématique et données expérimentales

Vitesse du son dans le bi-fluide air-eau en fonction de la proportion en eau



Eau-air

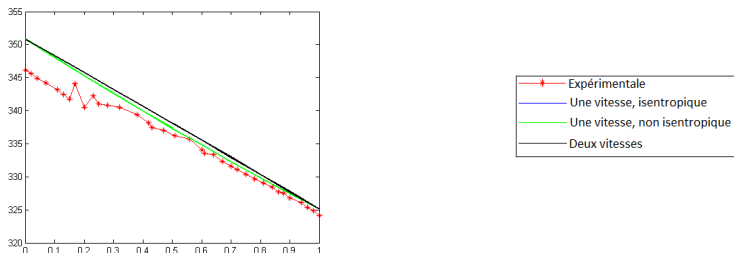


Zoom

α_{eau}	c_{min} expérimentale	c_{min} mathématique
0.499	$20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	$23.69\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

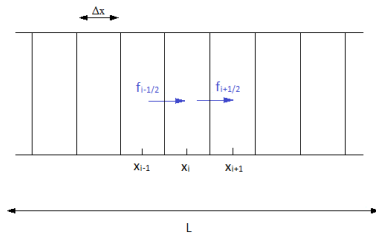
Vitesse mathématique et données expérimentales

Vitesse du son, exemple peu concluant



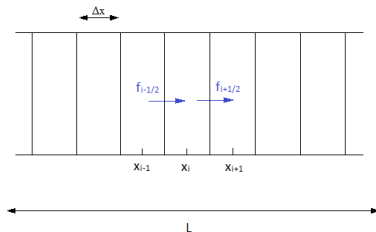
O_2-N_2

Simulation numérique



Modélisation

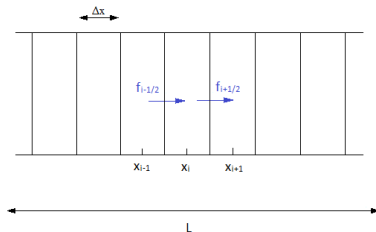
Simulation numérique



Modélisation

- Implémentation pour les mono-fluides et le modèle une vitesse isentropique

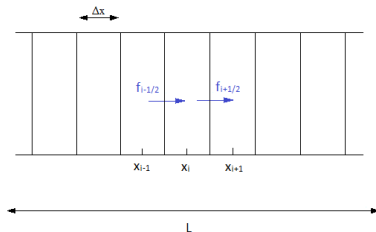
Simulation numérique



Modélisation

- Implémentation pour les mono-fluides et le modèle une vitesse isentropique
- Discrétisation par une méthode à volume fini : schéma VFFC

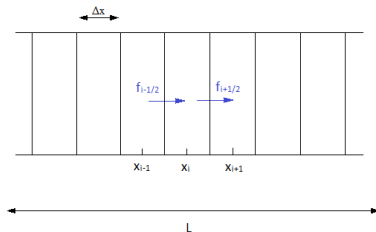
Simulation numérique



Modélisation

- Implémentation pour les mono-fluides et le modèle une vitesse isentropique
- Discrétisation par une méthode à volume fini : schéma VFFC
- Convergence et stabilité

Simulation numérique



Modélisation

- Implémentation pour les mono-fluides et le modèle une vitesse isentropique
- Discrétisation par une méthode à volume fini : schéma VFFC
- Convergence et stabilité
- Données brutes et vitesses du son

Méthode statistique des estimateurs aux moindres carrés

$$P = M\beta + \varepsilon$$

$$\text{où } P = \begin{bmatrix} \delta p^1 \\ \delta p^2 \\ \vdots \\ \delta p^n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \delta \rho^1 & \delta \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho} \right)^1 \\ \delta \rho^2 & \delta \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho} \right)^2 \\ \vdots & \vdots \\ \delta \rho^n & \delta \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho} \right)^n \end{bmatrix} \text{ et } \varepsilon \text{ est l'erreur.}$$

Méthode statistique des estimateurs aux moindres carrés

$$P = M\beta + \varepsilon$$

$$\text{où } P = \begin{bmatrix} \delta p^1 \\ \delta p^2 \\ \vdots \\ \delta p^n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \delta \rho^1 & \delta \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho} \right)^1 \\ \delta \rho^2 & \delta \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho} \right)^2 \\ \vdots & \vdots \\ \delta \rho^n & \delta \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho} \right)^n \end{bmatrix} \text{ et } \varepsilon \text{ est l'erreur.}$$

$$c_t^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s_1, s_2, \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}}$$

Estimateur de β :

$$\hat{\beta} = (M^T M)^{-1} (M^T P).$$

Vitesses thermodynamiques obtenues

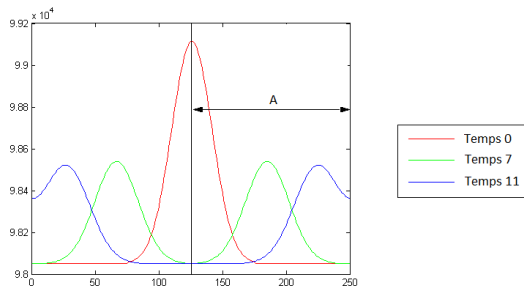
Fluide	c_t	c_m	Différence relative : $\frac{ c_t - c_m }{c_m}$
Azote	354 m.s^{-1}	$354,1 \text{ m.s}^{-1}$	0.03 %
Hélium	$1,021 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$	$1,014 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$	0.7 %
Oxygène	328 m.s^{-1}	$328,1 \text{ m.s}^{-1}$	0.03 %

TABLE: Comparaison des vitesses du son dans les mono-fluides

Fluide 1	Fluide 2	c_t	c_m	Différence relative :
Azote	Hélium	451 m.s^{-1}	486.5 m.s^{-1}	7.3 %
Azote	Oxygène	359 m.s^{-1}	340.5 m.s^{-1}	5.4 %
Oxygène	Hélium	433 m.s^{-1}	456.3 m.s^{-1}	5.1 %

TABLE: Comparaison des vitesses du son dans les bi-fluides composés de 50% du fluide 1 et de 50 % du fluide 2

Propagation d'une onde



Évolution de la perturbation de pression au cours du temps

Vitesses mécaniques obtenues

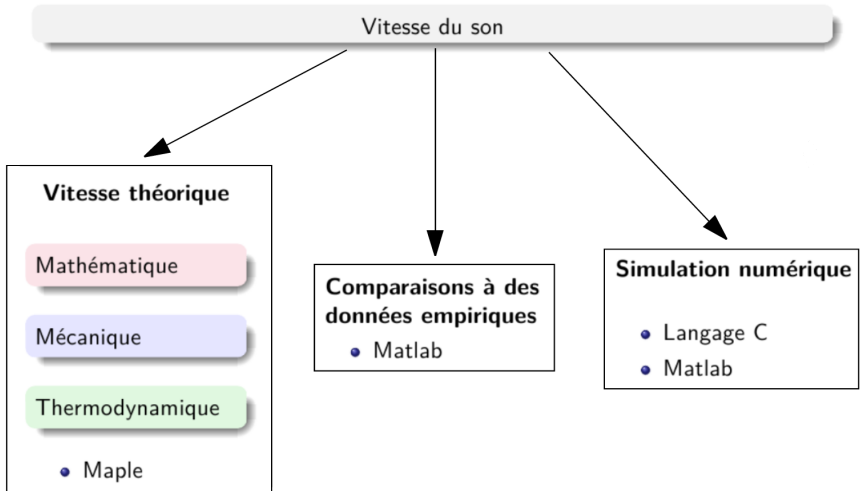
Fluide	c_p	c_m	Différence relative : $\frac{ c_p - c_m }{c_m}$
Azote	355m.s^{-1}	$354,1 \text{m.s}^{-1}$	0,2 %
hélium	$1,04 \cdot 10^3 \text{m.s}^{-1}$	$1,014 \cdot 10^3 \text{m.s}^{-1}$	2,6 %
Oxygène	329m.s^{-1}	$328,1 \text{m.s}^{-1}$	0,3 %

TABLE: Comparaison des vitesses du son dans les mono-fluides

Fluide 1	Fluide 2	c_p	c_m	Différence relative :
Azote	Hélium	470m.s^{-1}	$486,5 \text{m.s}^{-1}$	3.4 %
Azote	Oxygène	342m.s^{-1}	$340,5 \text{m.s}^{-1}$	0.44 %
Oxygène	Hélium	443m.s^{-1}	$456,3 \text{m.s}^{-1}$	2.9 %

TABLE: Comparaison des vitesses du son dans les bi-fluides composés de 50% du fluide 1 et de 50 % du fluide 2

Conclusion



Bibliographie I



A Britan, M Liverts, and G Ben-Dor.

Shock wave propagation through wet particulate foam.

Elsevier, 2011.



François Coulouvrat and Régis Marchiano.

Propagation atmosphérique-notes de cours.

2009.



Frédéric Dias, Denys Dutykh, and Jean-Michel Ghidaglia.

A two-fluid model for violent aerated flows.

Elsevier, 2009.



Jean-Michel Ghidaglia.

On the sound speed in two fluid flows.

2008.



Jean-Michel Ghidaglia, Anelo Kumbero, and Gérard Le Coq.

On the numerical solution to two fluid models via a cell centered finite volume method.

Elsevier, 2001.



Khaled Halaoua.

Quelques solveurs pour les opérateurs de convection et leur application à la mécanique des fluides diphasiques.

PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.

Bibliographie II



Susan Werner Kieffer.

Sound speed in liquid-gas mixtures : Water-air and water-steam.
Journal of geophysical research, 1977.



Torbjörn Löfqvist, Kęstutis Sokas, and Jerker Delsing.

Speed of sound measurements in gas-mixtures at varying composition using an ultrasonic gas flow meter with silicon based transducers.



D Mc William and R.K Duggins.

Speed of sound in bubbly liquids.
Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1969.



Marie-Françoise Roy.

Basic algorithms in real algebraic geometry and their complexity : from Sturm theorem to the existential theory of reals.
1996.