Synthèse de textures à partir de chaînes de Markov

Massé, Meiniel, Roussillon

sous la direction de
L. Moisan et B. Galerne

CMLA - ENS Cachan

Juin 2011

Définition (Chaînes de Markov Homogènes)

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ *une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace dénombrable* E. *Si pour tous entiers* $n \geq 0$ *et tous états* $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$,

$$P(U_{n+1} = j | U_n = i, \ldots, U_0 = i_0) = P(U_{n+1} = j | U_n = i)$$

alors la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ *est appelée une chaîne de Markov. Si, de plus, le terme de droite est indépendant de* n, *on parle de chaîne de Markov homogène (HMC).*

Définition (Irréductibilité)

Deux états communiquent s'il existe un chemin de l'un à l'autre et réciproquement. Cette relation définit une partition de l'espace des états. Lorsqu'il n'y a qu'une seule classe, on parle de chaîne irréductible.

Théorème de Convergence

Définition (Irréductibilité)

Deux états communiquent s'il existe un chemin de l'un à l'autre et réciproquement. Cette relation définit une partition de l'espace des états. Lorsqu'il n'y a qu'une seule classe, on parle de chaîne irréductible.

Théorème (Convergence vers la distribution stationnaire)

Supposons $(U_n)_{n \geq 0}$ irréductible, à valeurs dans E fini. Alors $(U_n)_{n \geq 0}$ admet une unique distribution stationnaire, et la distribution de U_n converge vers celle-ci quand $n \to \infty$.

Définition (Champ de Markov Aléatoire)

Un champ de Markov est une application U à valeurs dans l'ensemble des images possibles, telle que $\forall x \in \Omega$,

$$U(x) \text{ et } U(S \backslash \tilde{\mathcal{N}}_x) \text{ sont indépendantes sachant } U(\mathcal{N}_x).$$

Champ de Markov - Champ de Gibbs

Définition (Champ de Markov Aléatoire)

Un champ de Markov est une application U à valeurs dans l'ensemble des images possibles, telle que $\forall x \in \Omega$,

$$U(x) \text{ et } U(S \backslash \tilde{\mathcal{N}}_x) \text{ sont indépendantes sachant } U(\mathcal{N}_x).$$

Définition (Champ de Gibbs)

Un champ de Gibbs est une une application U à valeurs dans l'ensemble des images possibles telle que, pour toute image u,

$$P(U = u) = \frac{1}{Z_T} e^{-\frac{1}{T}\mathcal{E}(u)}$$

Théorème de Hammersley-Clifford, 1968

Théorème

Les descriptions en termes de champ de Gibbs ou de champ de Markov sont équivalentes.

Un exemple : le procédé d'Ising

Soit une image rectangulaire où chaque pixel est blanc $(+1)$ ou noir (-1).

- Ensemble des pixels : $S = \mathbb{Z}^2_{n,m} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \mid |x| < n, |y| < m\}$
- Voisinage d'un pixel : les 4 pixels alentours.
- Energie totale de l'image :

$$\mathcal{E}(u) = \lambda \sum_{x,y} (u(x) - u(y))^2.$$

Algorithme de Metropolis-Hastings

pour tout pixel $x \in \Omega$:

    tirer aléatoirement $u(x)$ uniformément dans $\{-1, 1\}$

itérer :

    $i =$ État initial de l'image

    tirer aléatoirement x uniformément dans Ω

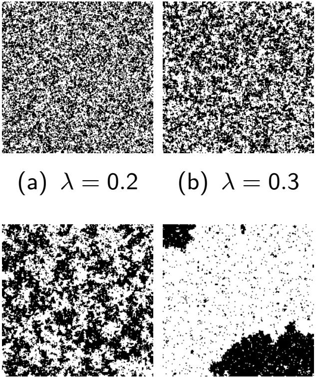
    tirer aléatoirement $u'(x)$ dans $\{-1, 1\}$,

    on note j l'état proposé

    $p \leftarrow \min\left(\frac{\pi(j)}{\pi(i)}, 1\right)$

    avec probabilité p, $u(x) \leftarrow u'(x)$ et $i \leftarrow j$

Images obtenues



(a) $\lambda = 0.2$ (b) $\lambda = 0.3$

(c) $\lambda = 0.4$ (d) $\lambda = 0.5$

Figure: Metropolis-Hastings classique, 10000 itérations.

Algorithme de Metropolis-Hastings avec échange

pour tout pixel $x \in \Omega$:

    tirer aléatoirement $u(x)$ uniformément dans $\{-1, 1\}$

itérer :

    $i =$ État initial de l'image

    tirer aléatoirement x et y uniformément dans Ω

    SI x et y sont voisins, recommencer.

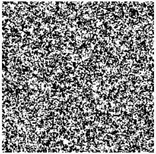
    SINON :

    inverser les valeurs $u(x)$ et $u(y)$, le nouvel état est noté j

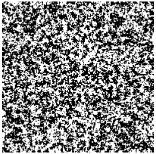
    $p \leftarrow \min\left(\frac{\pi(j)}{\pi(i)}, 1\right)$

    avec probabilité p, faire $i \leftarrow j$

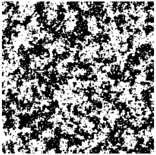
Images obtenues



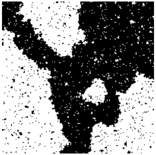
(a) $\lambda = 0.2$



(b) $\lambda = 0.3$



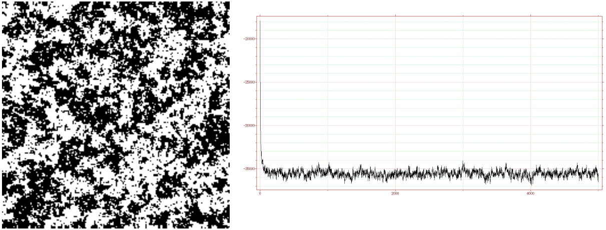
(c) $\lambda = 0.4$



(d) $\lambda = 0.5$

Figure: Metropolis-Hastings avec échange, 10000 itérations.

Problème de convergence



(a) Image de la distribution stationnaire

(b) Courbe d'énergie en fonction du nombre d'itérations

Figure: Courbe d'énergie, 5000 itérations, $\lambda = 0.4$

Un exemple d'indicateur de convergence.

Notations

- Soit u une image.
- Soit x le pixel sur lequel on se place au cours de l'algorithme.
- Soit z le pixel que l'on souhaite échanger avec x.

On pose alors :

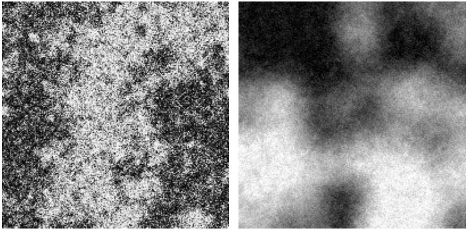
$$Q_p(u, x, z) = \sum_{y \in V(x)} |u(y) - u(z)|^p$$

Q_p est une mesure de la proximité des niveaux de gris des pixels du voisinage de x par rapport à la valeur $u(z)$.

p-Écart au point central local

pour tout pixel $x \in \Omega$:
    tirer aléatoirement $u(x)$ uniformément dans $[0, 255]$
itérer :
    tirer aléatoirement x_1 et x_2 dans Ω
    SI x_1 et x_2 ne sont pas voisins et $u(x_1) \neq u(x_2)$
        calculer $e_{1,1} = Q_p(u, x_1, x_1)$, $e_{1,2} = Q_p(u, x_1, x_2)$,
            $e_{2,2} = Q_p(u, x_2, x_2)$, $e_{2,1} = Q_p(u, x_2, x_1)$
        calculer $q = (e_{1,2} + e_{2,1}) - (e_{1,1} + e_{2,2})$
        SI $q < 0$ échanger $u(x_1)$ et $u(x_2)$
        SINON tirer t uniformément sur $[0, 1]$
            SI $t < e^{-\lambda q}$ faire l'échange quand même
            FIN SI
        FIN SI
    FIN SI

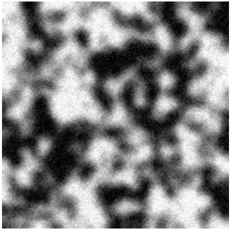
Images obtenues - Influence de λ



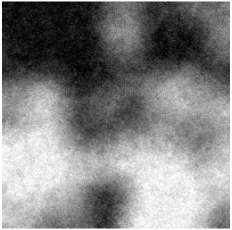
(a) $\lambda = 0.5$ (b) $\lambda = 10$

Figure: "p-Écart au point central local", $n = 1000$, $r = 3$, $p = 2$

Images obtenues - Influence de n



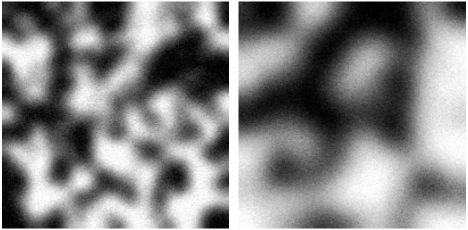
(a) $n = 50$



(b) $n = 1000$

Figure: "p-Écart au point central local", $\lambda = 10$, $r = 3$, $p = 2$.

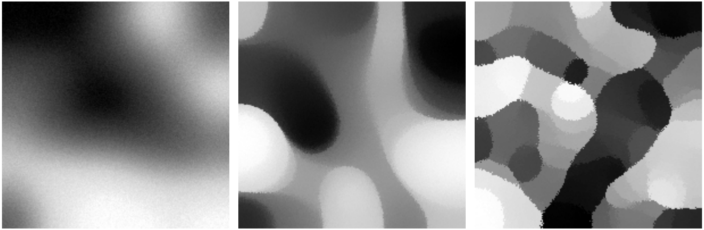
Images obtenues - Influence de r



(a) $r = 5$ (b) $r = 10$

Figure: "p-Écart au point central local", $\lambda = 10$, $n = 50$, $p = 2$.

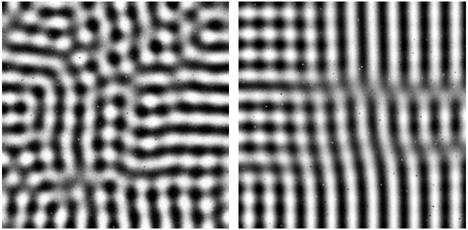
Images obtenues - Influence de p



(a) $p = 2$ (b) $p = 1$ (c) $p = \frac{1}{2}$

Figure: "p-Écart au point central local", $\lambda = 10$, $n = 1000$, $r = 10$

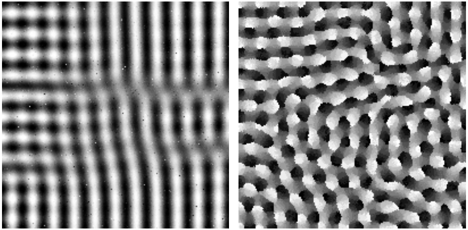
Algorithme modifié - Influence de n



(a) $n = 50$ (b) $n = 1000$

Figure: "p-Écart au point central modifié", $\lambda = 10$, $r = 15$, $p = 2$.

Algorithme modifié - Influence de p



(a) $p = 2$ (b) $p = \frac{1}{2}$

Figure: "p-Écart au point central modifié", $\lambda = 10$, $r = 15$, $n = 1000$.

Algorithme du patch

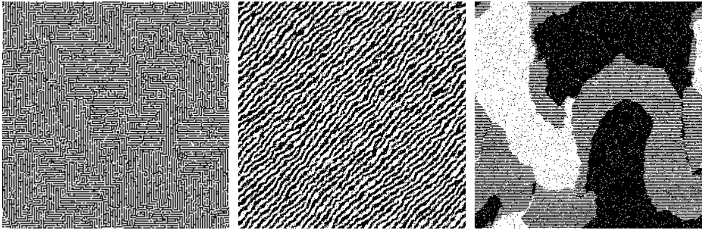


Figure: “Textures obtenues avec différents patchs”, $n = 500$.

Conclusion et Pistes

- Étude du lien entre l'algorithme de l' “Écart quadratique au point central” et celui de “Metropolis-Hastings”.
- Exprimer l'énergie de cet algorithme.
- Étude de l'algorithme de patch - notamment du phénomène de déplacement.
- Travailler avec d'autres voisinages.
- Etudier le phénomène de “seuil” - moment avant la convergence où la texture est la plus intéressante.

Bibliographie

- BRÉMAUD, Pierre, *Markov Chains - Gibbs Fields, Monte Carlo simulation, and Queues*, Springer, 1999.
- EFROS, Alexei A. and LEUNG, Thomas K., *Texture Synthesis by Non-parametric Sampling*, September 1999
- PÉREZ, Patrick, *Markov Random Fields and Images*, 1998