

Instabilité de Turing pour un système de réaction-diffusion

M. BREDEN, M. VANICAT

Maîtres de stage :
Laurent DESVILLETES et Francesco SALVARANI

28 juin 2011

SOMMAIRE

- 1 Mise en évidence et étude numérique de l'instabilité de Turing
 - Système étudié
 - Apparition de l'instabilité de Turing
 - Simulations numériques
- 2 Preuve numérique rigoureuse d'existence des solutions
 - Idée générale de la méthode
 - Construction d'un opérateur contractant sur un espace de Banach
 - Polynômes de rayon

Un modèle de réaction diffusion

Système

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u + (5 - 3(u + v) - w)u + 100(v(1 - w) - uw), \\ \partial_t v = (d + 3)\Delta v + (5 - 3(u + v) - w)v - 100(v(1 - w) - uw), \\ \partial_t w = d\Delta w + (2 - (u + v) - 3w)w. \end{cases}$$

Un modèle de réaction diffusion

Système

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u + (5 - 3(u + v) - w)u + 100(v(1 - w) - uw), \\ \partial_t v = (d + 3)\Delta v + (5 - 3(u + v) - w)v - 100(v(1 - w) - uw), \\ \partial_t w = d\Delta w + (2 - (u + v) - 3w)w. \end{cases}$$

- Une solution stationnaire homogène :

$$u_{eq} = \frac{91}{64}, \quad v_{eq} = \frac{13}{64}, \quad w_{eq} = \frac{1}{8}.$$

Instabilité de Turing

- On considère des perturbations du type :

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \\ w(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_u(t) \\ \varepsilon_v(t) \\ \varepsilon_w(t) \end{pmatrix} \cos(k\pi x).$$

Instabilité de Turing

- On considère des perturbations du type :

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \\ w(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_u(t) \\ \varepsilon_v(t) \\ \varepsilon_w(t) \end{pmatrix} \cos(k\pi x).$$

- On linéarise et on réinjecte :

$$\begin{pmatrix} \partial_t \varepsilon_u \\ \partial_t \varepsilon_v \\ \partial_t \varepsilon_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1073}{64} - d(k\pi)^2 & \frac{5327}{64} & -\frac{10491}{64} \\ \frac{761}{64} & -\frac{5639}{64} - (d+3)(k\pi)^2 & \frac{10387}{64} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} - d(k\pi)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_u \\ \varepsilon_v \\ \varepsilon_w \end{pmatrix}$$

Instabilité de Turing

On parle d'instabilité de Turing lorsque le système homogène ($k = 0$) est stable mais qu'il existe une fréquence (un $k \neq 0$) pour laquelle le système est instable.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1073}{64} - d(k\pi)^2 & \frac{5327}{64} & -\frac{10491}{64} \\ \frac{761}{64} & -\frac{5639}{64} - (d+3)(k\pi)^2 & \frac{10387}{64} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} - d(k\pi)^2 \end{pmatrix}$$

Résultats théoriques

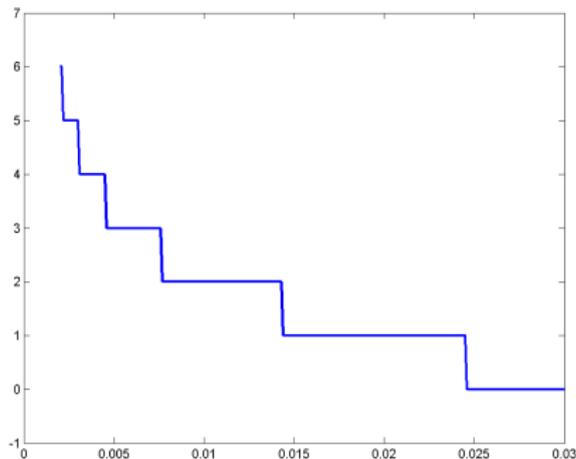
- Pour $d > 70$, stable pour tout k .

Résultats théoriques

- Pour $d > 70$, stable pour tout k .
- Pour $d \in [0, 70]$ fixé, stable pour $k > k_0(d)$.

Résultats théoriques

- Pour $d > 70$, stable pour tout k .
- Pour $d \in [0, 70]$ fixé, stable pour $k > k_0(d)$.

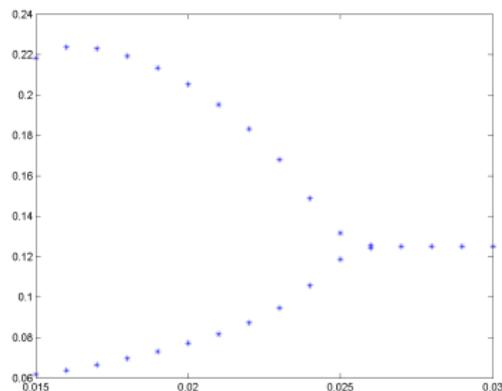


Sous la courbe, le domaine de (d, k) pour lesquels le système est instable (il est stable pour $d \in [0.030, 70]$).

Méthode en temps long

Schéma aux différences finies

$$u_i^n \simeq u(n\Delta t, i\Delta x), \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \simeq \partial_t u(n\Delta t, i\Delta x), \quad \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2} \simeq \partial_{xx} u(n\Delta t, i\Delta x).$$



En abscisse la valeur de d , en ordonnée la valeur de $W(0)$. Solutions obtenues avec $\Delta x = 2.10^{-2}$ et $\Delta t = 4.10^{-5}$, à $t = 3.10^6$.

Méthode de Newton (différences finies)

Système stationnaire

$$\begin{cases} d \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{(\Delta x)^2} + (5 - 3(u_i + v_i) - w_i)u_i + 100(v_i - (u_i + v_i)w_i) = 0, \\ (d + 3) \frac{v_{i+1} + v_{i-1} - 2v_i}{(\Delta x)^2} + (5 - 3(u_i + v_i) - w_i)v_i - 100(v_i - (u_i + v_i)w_i) = 0, \\ d \frac{w_{i+1} + w_{i-1} - 2w_i}{(\Delta x)^2} + (2 - (u_i + v_i) - 3w_i)w_i = 0, \end{cases}$$

$$\forall i \in \{0 \dots N\}.$$

Méthode de Newton (différences finies)

Système stationnaire

$$\begin{cases} d \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{(\Delta x)^2} + (5 - 3(u_i + v_i) - w_i)u_i + 100(v_i - (u_i + v_i)w_i) = 0, \\ (d + 3) \frac{v_{i+1} + v_{i-1} - 2v_i}{(\Delta x)^2} + (5 - 3(u_i + v_i) - w_i)v_i - 100(v_i - (u_i + v_i)w_i) = 0, \\ d \frac{w_{i+1} + w_{i-1} - 2w_i}{(\Delta x)^2} + (2 - (u_i + v_i) - 3w_i)w_i = 0, \end{cases}$$

$$\forall i \in \{0 \dots N\}.$$

- En notant $U = (u_0, \dots, u_N)$ (idem pour V et W), on est ramené à un problème du type :

$$f(U, V, W) = 0.$$

Méthode de Newton (différences finies)

Système stationnaire

$$\begin{cases} d \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{(\Delta x)^2} + (5 - 3(u_i + v_i) - w_i)u_i + 100(v_i - (u_i + v_i)w_i) = 0, \\ (d + 3) \frac{v_{i+1} + v_{i-1} - 2v_i}{(\Delta x)^2} + (5 - 3(u_i + v_i) - w_i)v_i - 100(v_i - (u_i + v_i)w_i) = 0, \\ d \frac{w_{i+1} + w_{i-1} - 2w_i}{(\Delta x)^2} + (2 - (u_i + v_i) - 3w_i)w_i = 0, \end{cases}$$

$$\forall i \in \{0 \dots N\}.$$

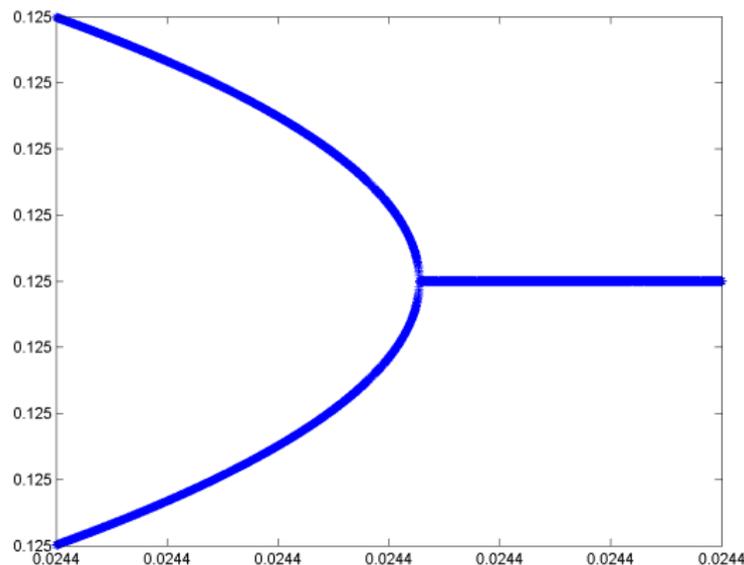
- En notant $U = (u_0, \dots, u_N)$ (idem pour V et W), on est ramené à un problème du type :

$$f(U, V, W) = 0.$$

- Méthode de Newton :

$$X_{n+1} = X_n - (Df(X_n))^{-1} f(X_n).$$

Méthode de Newton (différences finies), résultats



Ici on a fait varier d de 0.024371714 à 0.024371711 avec un pas de 10^{-12} .

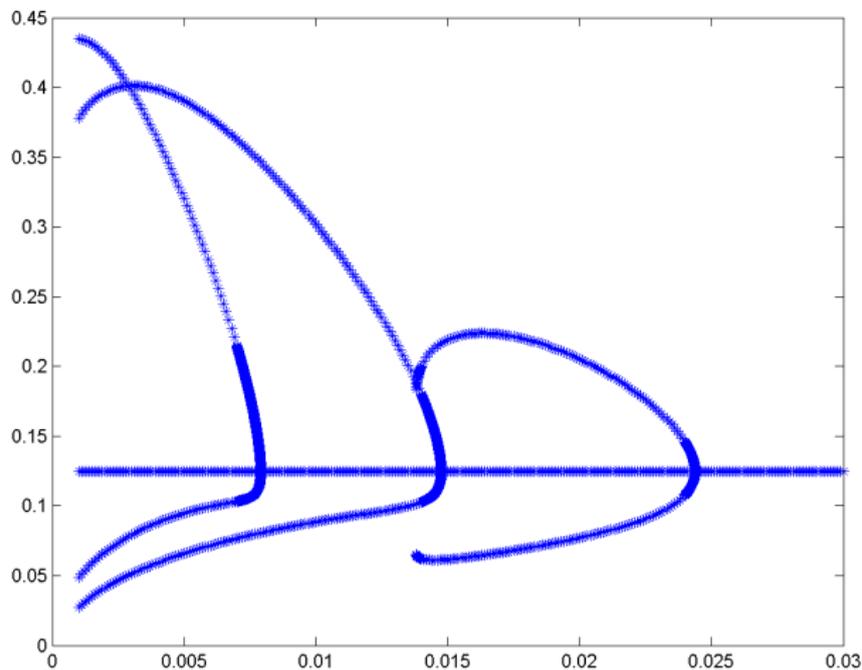


Diagramme de bifurcation complet.

Idée générale

- Prouver que la solution obtenue par la méthode de Newton est proche de la solution exacte.

Idée générale

- Prouver que la solution obtenue par la méthode de Newton est proche de la solution exacte.
- Construire un opérateur contractant sur un voisinage de la solution approchée pour utiliser le théorème du point fixe.

Idée générale

- Prouver que la solution obtenue par la méthode de Newton est proche de la solution exacte.
- Construire un opérateur contractant sur un voisinage de la solution approchée pour utiliser le théorème du point fixe.
- Cadre d'application :

$$\partial_t u = L(u) + \sum_{p=0}^d c_p u^p.$$

Exemple étudié

Équation avec non-linéarité de degré 2

$$\partial_t u = d\Delta u + u + u^2, \quad \text{sur } [0, T] \times [0, 1].$$

Exemple étudié

Équation avec non-linéarité de degré 2

$$\partial_t u = d\Delta u + u + u^2, \quad \text{sur } [0, T] \times [0, 1].$$

Problème stationnaire dans l'espace de Fourier

$$f_n(u) := -dn^2 u_n + u_n + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{|n-k|} u_{|k|} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple étudié

Équation avec non-linéarité de degré 2

$$\partial_t u = d\Delta u + u + u^2, \quad \text{sur } [0, T] \times [0, 1].$$

Problème stationnaire dans l'espace de Fourier

$$f_n(u) := -dn^2 u_n + u_n + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{|n-k|} u_{|k|} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- On cherche donc un zéro de $f := (f_0, \dots, f_n, \dots)$.

Projection de Galerkin

- On tronque les coefficients de Fourier à l'indice m .

Projection de Galerkin

- On tronque les coefficients de Fourier à l'indice m .
- On définit pour $n \in \{0, \dots, m-1\}$ et $v \in \mathbb{R}^m$:

$$f_n^{(m)}(v) = -dn^2 v_n + v_n + \frac{1}{2} \sum_{|k| < m} v_{|n-k|} v_{|k|}.$$

Projection de Galerkin

- On tronque les coefficients de Fourier à l'indice m .
- On définit pour $n \in \{0, \dots, m-1\}$ et $v \in \mathbb{R}^m$:

$$f_n^{(m)}(v) = -dn^2 v_n + v_n + \frac{1}{2} \sum_{|k| < m} v_{|n-k|} v_{|k|}.$$

- On pose $f^{(m)} := (f_0^{(m)}, \dots, f_{m-1}^{(m)})$.

Projection de Galerkin

- On tronque les coefficients de Fourier à l'indice m .
- On définit pour $n \in \{0, \dots, m-1\}$ et $v \in \mathbb{R}^m$:

$$f_n^{(m)}(v) = -dn^2 v_n + v_n + \frac{1}{2} \sum_{|k| < m} v_{|n-k|} v_{|k|}.$$

- On pose $f^{(m)} := (f_0^{(m)}, \dots, f_{m-1}^{(m)})$.
- On détermine numériquement un zéro $\bar{u}^{(m)}$ de $f^{(m)}$.

Projection de Galerkin

- On tronque les coefficients de Fourier à l'indice m .
- On définit pour $n \in \{0, \dots, m-1\}$ et $v \in \mathbb{R}^m$:

$$f_n^{(m)}(v) = -dn^2 v_n + v_n + \frac{1}{2} \sum_{|k| < m} v_{|n-k|} v_{|k|}.$$

- On pose $f^{(m)} := (f_0^{(m)}, \dots, f_{m-1}^{(m)})$.
- On détermine numériquement un zéro $\bar{u}^{(m)}$ de $f^{(m)}$.
- On pose $\bar{u} = (\bar{u}_0^{(m)}, \bar{u}_1^{(m)}, \dots, \bar{u}_{m-1}^{(m)}, 0, \dots, 0, \dots)$ de telle sorte que $f(\bar{u}) \simeq 0$.

Définition de l'espace de Banach

On considère l'espace de Banach :

$$\Omega_s = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| n^s < +\infty \right\},$$

muni de la norme définie par :

$$\|u\|_s = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| n^s.$$

Définition de l'espace de Banach

On considère l'espace de Banach :

$$\Omega_s = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| n^s < +\infty \right\},$$

muni de la norme définie par :

$$\|u\|_s = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| n^s.$$

- Si u est C^s , alors la suite de ses coefficients de Fourier est dans Ω_s .

Construction de l'opérateur

On définit :

$$T : \begin{cases} \Omega_s \longrightarrow \Omega_s \\ u \longmapsto u - Jf(u), \end{cases}$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} J^{(m)} & & 0 & & \\ & \frac{1}{1-dm^2} & & & \\ 0 & & \frac{1}{1-d(m+1)^2} & & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix},$$

où

$$J^{(m)} \simeq \left(Df^{(m)}(\bar{u}^{(m)}) \right)^{-1}.$$

Polynômes de rayon

Vérifier que T est contractant revient trouver un $r > 0$ tel que pour un nombre n_0 fini de polynômes P_n à coefficients rationnels :

$$P_n(r) < 0.$$

Polynômes de rayon

Vérifier que T est contractant revient trouver un $r > 0$ tel que pour un nombre n_0 fini de polynômes P_n à coefficients rationnels :

$$P_n(r) < 0.$$

- Pour $n \in \{0, \dots, n_0\}$, on détermine par arithmétique d'intervalle un ensemble I_n de $r > 0$ tels que $P_n(r) < 0$.

Polynômes de rayon

Vérifier que T est contractant revient trouver un $r > 0$ tel que pour un nombre n_0 fini de polynômes P_n à coefficients rationnels :

$$P_n(r) < 0.$$

- Pour $n \in \{0, \dots, n_0\}$, on détermine par arithmétique d'intervalle un ensemble I_n de $r > 0$ tels que $P_n(r) < 0$.
- Si

$$\bigcap_{n \in \{0, \dots, n_0\}} I_n \neq \emptyset,$$

on a démontré rigoureusement l'existence d'une solution au voisinage de notre solution approchée !

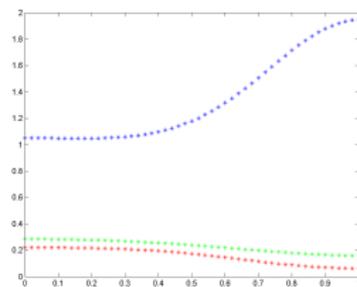
Bibliographie

- W. RUDIN, Analyse réelle et complexe, Collection Sciences Sup., Dunod, Paris 2009.
- C. ZUILLY et H. QUEFFELEC, Elements d'analyse pour l'agrégation, Collection Sciences Sup., Dunod, Paris 2006.
- L. DESVILLETES, About entropy methods for reaction-diffusion equations, Rivista di Matematica della Università di Parma (7) 2007, 81 - 123.
- M. IDA, M. MIMURA, H. NIMOMIYA, Diffusion, cross-diffusion and competitive interaction, J. Math. Biol. (2006).
- J.D. MURRAY, Mathematical Biology, Springer, Berlin 1989.
- L. DESVILLETES, Cours d'ouverture ENS Cachan 2008/09.
- S. DAY, J.P. LESSARD, K. MISCHAIKOW, Validated continuation for equilibria of PDEs, SIAM J. Numer. Anal. 45 (4) (2007) 1398–1424.

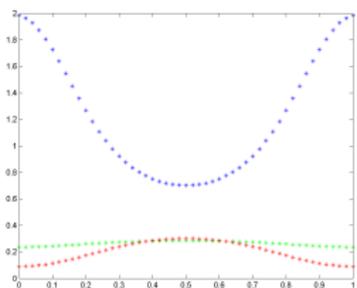
FIN



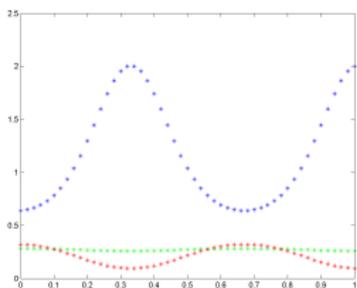
(a) $d = 0.030$



(b) $d = 0.015$



(c) $d = 0.010$



(d) $d = 0.005$

En bleu U , en vert V et en rouge W sur l'intervalle $[0, 1]$.

Méthode de Newton spectrale

Système stationnaire

$$\begin{cases} (dn^2 - 5)a_n(u) - 100a_n(v) + 3a_n(u^2) + 3a_n(uv) + 101a_n(uw) - 100a_n(vw) = 0, \\ ((d + 3)n^2 + 95)a_n(v) + 3a_n(v^2) + 3a_n(uv) - 99a_n(vw) + 100a_n(uw) = 0, \\ (dn^2 - 2)a_n(w) + a_n(w^2) + a_n(uw) + a_n(vw) = 0, \end{cases}$$

$$\forall n \in \{0, \dots, m - 1\}.$$

Méthode de Newton spectrale

Système stationnaire

$$\begin{cases} (dn^2 - 5)a_n(u) - 100a_n(v) + 3a_n(u^2) + 3a_n(uv) + 101a_n(uw) - 100a_n(vw) = 0, \\ ((d + 3)n^2 + 95)a_n(v) + 3a_n(v^2) + 3a_n(uv) - 99a_n(vw) + 100a_n(uw) = 0, \\ (dn^2 - 2)a_n(w) + a_n(w^2) + a_n(uw) + a_n(vw) = 0, \end{cases}$$

$$\forall n \in \{0, \dots, m-1\}.$$

- $$a_n(uv) \simeq \frac{1}{2} \left(\sum_{p=0}^n a_p(u)a_{n-p}(v) + \sum_{p=n+1}^{m-1} a_p(u)a_{p-n}(v) + \sum_{p=1}^{m-1-n} a_p(u)a_{n+p}(v) \right).$$

Méthode de Newton spectrale

Système stationnaire

$$\begin{cases} (dn^2 - 5)a_n(u) - 100a_n(v) + 3a_n(u^2) + 3a_n(uv) + 101a_n(uw) - 100a_n(vw) = 0, \\ ((d + 3)n^2 + 95)a_n(v) + 3a_n(v^2) + 3a_n(uv) - 99a_n(vw) + 100a_n(uw) = 0, \\ (dn^2 - 2)a_n(w) + a_n(w^2) + a_n(uw) + a_n(vw) = 0, \end{cases}$$

$$\forall n \in \{0, \dots, m-1\}.$$

- $a_n(uv) \simeq \frac{1}{2} \left(\sum_{p=0}^n a_p(u)a_{n-p}(v) + \sum_{p=n+1}^{m-1} a_p(u)a_{p-n}(v) + \sum_{p=1}^{m-1-n} a_p(u)a_{n+p}(v) \right).$
- En notant $U = (u_0, \dots, u_{m-1})$ (idem pour V et W), on est à nouveau ramené à un problème du type :

$$f(U, V, W) = 0.$$

- On va essayer de montrer que T est une contraction de $B(\bar{u}, r)$ dans lui-même.

- On va essayer de montrer que T est une contraction de $B(\bar{u}, r)$ dans lui-même.
- Pour montrer que T est contractant, on a besoin de constantes K_n telles que $\forall u, v \in B(\bar{u}, r)$:

$$|T_n(u) - T_n(v)| \leq K_n \|u - v\|_s$$

et

$$\sup_n n^s K_n < 1.$$

- On va essayer de montrer que T est une contraction de $B(\bar{u}, r)$ dans lui-même.
- Pour montrer que T est contractant, on a besoin de constantes K_n telles que $\forall u, v \in B(\bar{u}, r)$:

$$|T_n(u) - T_n(v)| \leq K_n \|u - v\|_s$$

et

$$\sup_n n^s K_n < 1.$$

- Pour montrer que $B(\bar{u}, r)$ est stable par T , on va chercher d'autres constantes Y_n telles que :

$$|T_n(\bar{u}) - \bar{u}_n| \leq Y_n$$

et

$$rK_n + Y_n < \frac{r}{n^s}.$$