Modèle de Black-Scholes

R. WARLOP

Maîtres de stages : Laurent DESVILLETTES et Francesco SALVARANI

École Normale Supérieure de Cachan

29 juin 2011

SOMMAIRE

Notions de finances

Les options :

Call européen

Liberté de l'acheteur, achète une certaine quantité de sous-jacent S (CAC 40, indices boursiers, ...).
Transactions dans le futur (à la date T).
Prix fixé à l'avance (E).
pay-off : $(S_T - E)^+$.

Put européen

Liberté du vendeur, vend une certaine quantité de sous-jacent S (CAC 40, indices boursiers, ...).
Transactions dans le futur (à la date T).
Prix fixé à l'avance (E).
pay-off : $(E - S_T)^+$.

Absence d'Opportunité d'Arbitrage (A.O.A)

A.O.A : impossible de faire un gain à coup sûr.
conséquence : si $X_T = Y_T$ alors $\forall$ t $X_t = Y_t$

Marché complet

Pour tout actif financier A, on peut construire une stratégie d'achat et vente qui à toute date a même valeurs que A.

Parité Call-Put

$$\forall t \in [0, T], \quad C_t - P_t = S_t - Ee^{-r(T-t)}$$

Présentation du modèle

Hypothèses :
- le marché est complet
- le temps est continu
- le sous-jacent est infiniment divisible (par exemple on peut acheter 1/1000 de sous jacent)
- les ventes à découvert sont autorisées
- il n'y a pas de coup de transaction
- il existe un taux d'intérêt constant
- il n'y a pas de dividendes (bénéfices distribués aux détenteurs d'actions)

Equation de Black-Scholes

Equation de Black-Scholes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + rx\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \dfrac{\sigma^2}{2}x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = ru(t,x), & \forall t \in [0,T], x \in \mathbb{R}_+ \\ u(T,x) = h(x), & \forall x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

avec h la fonction pay-off.

Solution de l'équation

Call

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Put

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{\ln\frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \dfrac{\ln\frac{S}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases}$$

Volatilité

volatilité implicite

Inversion de la formule de Black-Scholes.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\ln(\frac{E}{S}) - r(T-t)}{(T-t)(E_\xi - \frac{1}{2})}} \text{ avec } E_\xi = \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial \ln S} \text{ et } \xi = \frac{\partial^2 C}{\partial (\ln S)^2} - \frac{\partial C}{\partial (\ln S)}.$$

Numériquement, on résout : $C_0 - SN(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2) = 0$

volatilité historique

Utilisation des données historiques, calcul statistique.

Tracé de la solution explicite

r=0.1, T=10, σ=0.3, E=100.

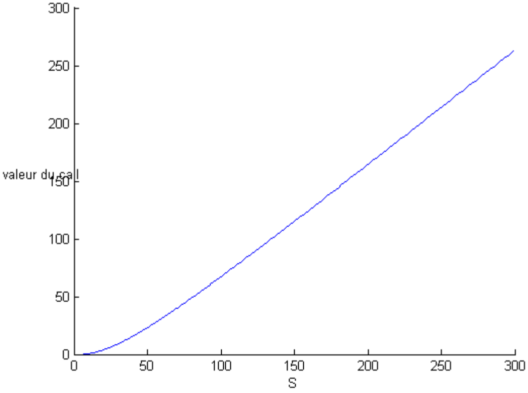


FIGURE: Tracé de la solution pour un call en 2D à t=0

Tracé de la solution explicite

r=0.1, T=10, σ=0.3, E=100.

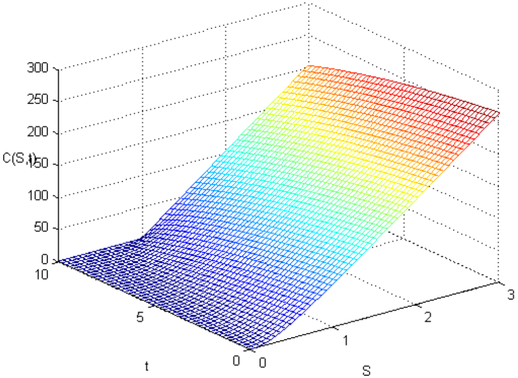


FIGURE: Tracé de la solution pour un call en 3D

Tracé de la solution par différence finie

r=0.1, T=1, σ=0.3, E=100.

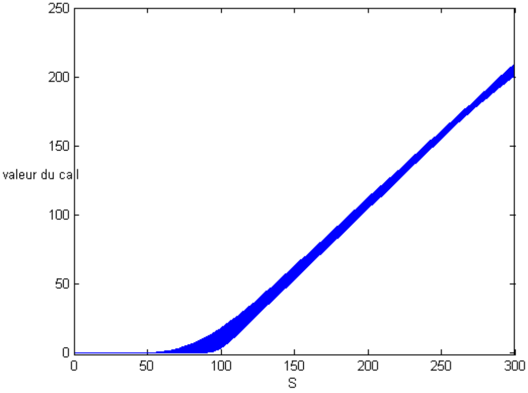


FIGURE: Tracé de la solution pour un call en 2D

Comparaison des résultats

r=0.1, T=1, σ=0.3, E=100.

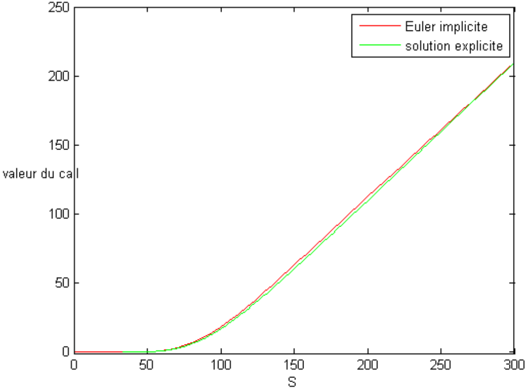


FIGURE: Tracé de la solution explicite et par différence finie

Application

call européen basé sur le cac40 de maturité T=1 jour.

Le sous-jacent : S=3 850 €.

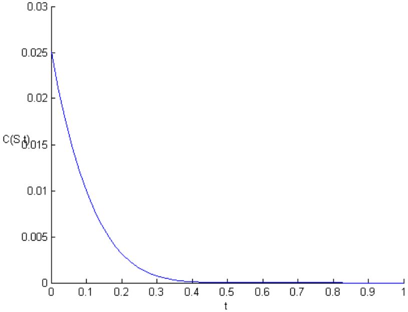
Le strike : E=4 100€

Le taux constant est celui de la banque centrale européene : r=1,25%.

Valeur actuelle du call : C_0=0.025 €.

On résout alors par dichotomie l'équation $C_0 - SN(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2) = 0$.

On obtient comme volatilité : σ=0.0168.



Critiques du modèle

Les hypothèses sont discutables
Calcul du risque : le Delta, le Thêta, le Gamma, le Vega et le Rhô.

Bibliographie

- L. Gabet, F. Abergel, I.M. Toke, Introduction aux mathématiques financières, Ecole Centrale Paris (2010)
- N. Sukhomlin, P. Jacquinot , Solution exacte du problème inverse de la valorisation des options dans le cadre du modèle de Black et Scholes, Ecole Centrale Paris (2010)
- A. Verraux , Résolution de l'équatin de Black et Scholes, Tampere University of technoligy (2008)