

# *L'Empirical Mode Decomposition,* algorithmes et utilisation

Maud Kerebel, Luc Pellissier, Daniel Stan  
sous la direction de Corinne Vachier-Mammar

30 juin 2011

# Au delà de la décomposition de Fourier

Fourier : projection sur  $\{t \mapsto e^{-i\omega t} | \omega \in \mathbf{R}_+\}$ .

Ondelettes de Haar : projection sur les translatées et dilatées de  $t \mapsto -\mathbb{1}_{[0;1/2]} + \mathbb{1}_{[1/2;1]}$

Les éléments de la décomposition n'ont pas de sens.

Des signaux simples peuvent avoir des transformées compliquées (Dirac, crénaux).

# Au delà de la décomposition de Fourier

Fourier : projection sur  $\{t \mapsto e^{-i\omega t} | \omega \in \mathbf{R}_+\}$ .

Ondelettes de Haar : projection sur les translatées et dilatées de  $t \mapsto -\mathbb{1}_{[0;1/2]} + \mathbb{1}_{[1/2;1]}$

Les éléments de la décomposition n'ont pas de sens.

Des signaux simples peuvent avoir des transformées compliquées (Dirac, crénaux).

# Au delà de la décomposition de Fourier

## Vers une solution

Avoir une base de projection variable, dépendant du signal.

On donne un sens physique aux « harmoniques ».

Mais on perd la linéarité.

Est-ce si grave ?

# Au delà de la décomposition de Fourier

## Vers une solution

Avoir une base de projection variable, dépendant du signal.

On donne un sens physique aux « harmoniques ».

Mais on perd la linéarité.

Est-ce si grave ?

# Généraliser les sinusoides

Pouvoir définir la phase et la fréquence instantanée des modes  
Pour écrire le signal de la forme :

$$s(t) = \sum_{i=0}^N a_i(t) \cos \left( \int \omega_i \right)$$

# Définition d'une Intrinsic Mode Function

On veut une fonction telle que

- ▶  $|Nb(\text{extrema}) - Nb(\text{racines})| \leq 1$
- ▶ Sa moyenne *locale* est nulle.

Un peu comme une sinusoïde !

# Définition d'une Intrinsic Mode Function

On veut une fonction telle que

- ▶  $|Nb(\text{extrema}) - Nb(\text{racines})| \leq 1$
- ▶ Sa moyenne *locale* est nulle.

Un peu comme une sinusoïde !

# Définition d'une Intrinsic Mode Function

On veut une fonction telle que

- ▶  $|Nb(\text{extrema}) - Nb(\text{racines})| \leq 1$
- ▶ Sa moyenne *locale* est nulle.

Un peu comme une sinusoïde !

# Le Sifting process

On dispose d'un signal  $X(t)$  quelconque.

## Recherche d'une IMF

- ▶ Recherche des maxima (resp. minima)
- ▶ Calculer l'enveloppe : Interpolation  $E_{\max}$  (resp  $E_{\min}$ ) des maxima (resp. minima)
- ▶ Calculer la moyenne *locale*  $m = \frac{E_{\max} + E_{\min}}{2}$
- ▶ Si  $m \equiv 0$ , alors  $X$  est une IMF.  
Sinon,  $X \leftarrow X - m$  et on itère l'algorithme.

# Le Sifting process

On dispose d'un signal  $X(t)$  quelconque.

## Recherche d'une IMF

- ▶ Recherche des maxima (resp. minima)
- ▶ Calculer l'enveloppe : Interpolation  $E_{\max}$  (resp  $E_{\min}$ ) des maxima (resp. minima)
- ▶ Calculer la moyenne *locale*  $m = \frac{E_{\max} + E_{\min}}{2}$
- ▶ Si  $m \equiv 0$ , alors  $X$  est une IMF.  
Sinon,  $X \leftarrow X - m$  et on itère l'algorithme.

# Le Sifting process

On dispose d'un signal  $X(t)$  quelconque.

## Recherche d'une IMF

- ▶ Recherche des maxima (resp. minima)
- ▶ Calculer l'enveloppe : Interpolation  $E_{\max}$  (resp  $E_{\min}$ ) des maxima (resp. minima)
- ▶ Calculer la moyenne *locale*  $m = \frac{E_{\max} + E_{\min}}{2}$
- ▶ Si  $m \equiv 0$ , alors  $X$  est une IMF.  
Sinon,  $X \leftarrow X - m$  et on itère l'algorithme.

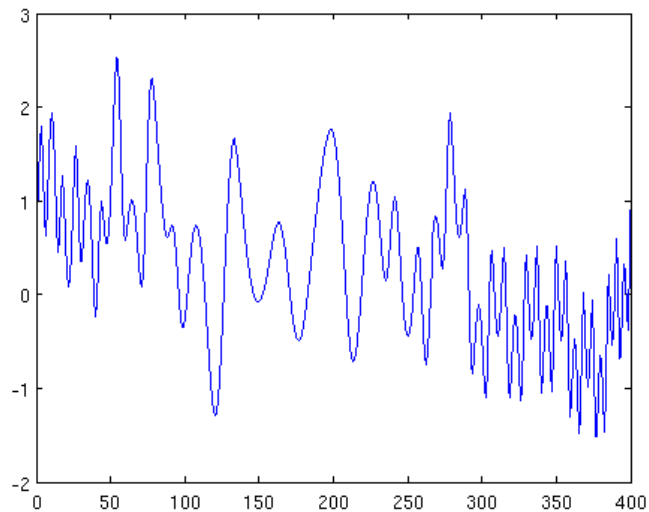
# Le Sifting process

On dispose d'un signal  $X(t)$  quelconque.

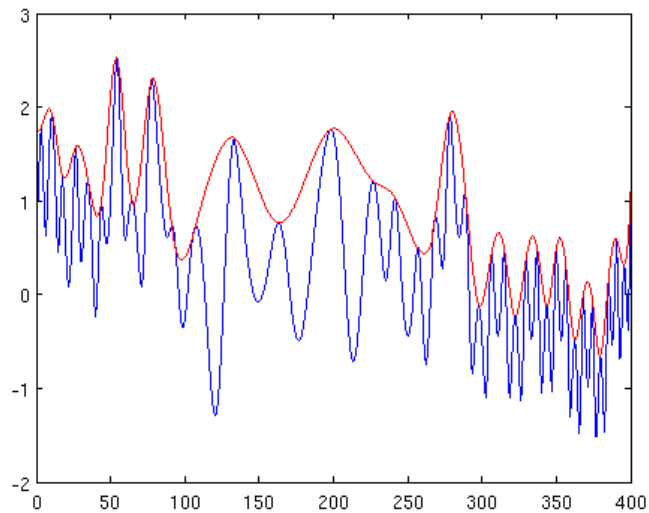
## Recherche d'une IMF

- ▶ Recherche des maxima (resp. minima)
- ▶ Calculer l'enveloppe : Interpolation  $E_{\max}$  (resp  $E_{\min}$ ) des maxima (resp. minima)
- ▶ Calculer la moyenne *locale*  $m = \frac{E_{\max} + E_{\min}}{2}$
- ▶ Si  $m \equiv 0$ , alors  $X$  est une IMF.  
Sinon,  $X \leftarrow X - m$  et on itère l'algorithme.

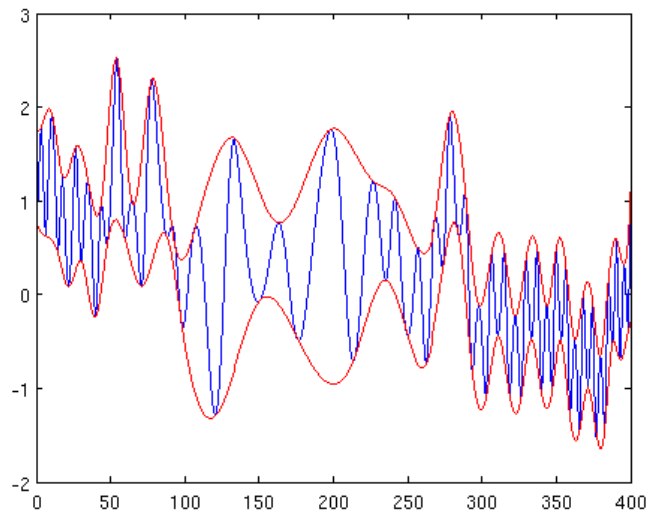
## Exemple de *sifting* process



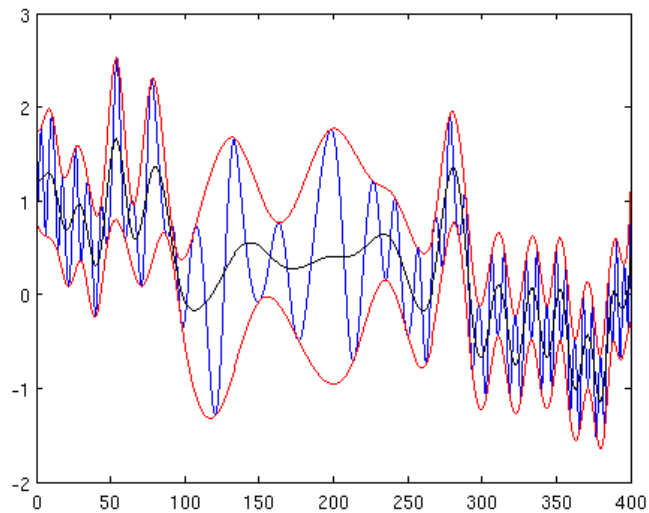
## Exemple de *sifting* process



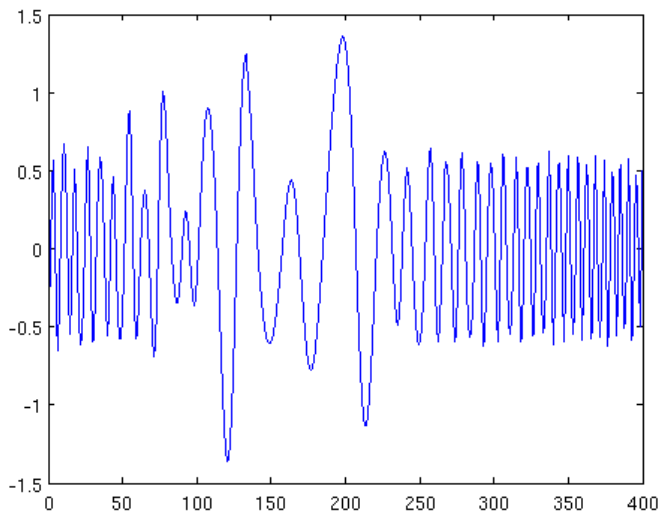
## Exemple de *sifting* process



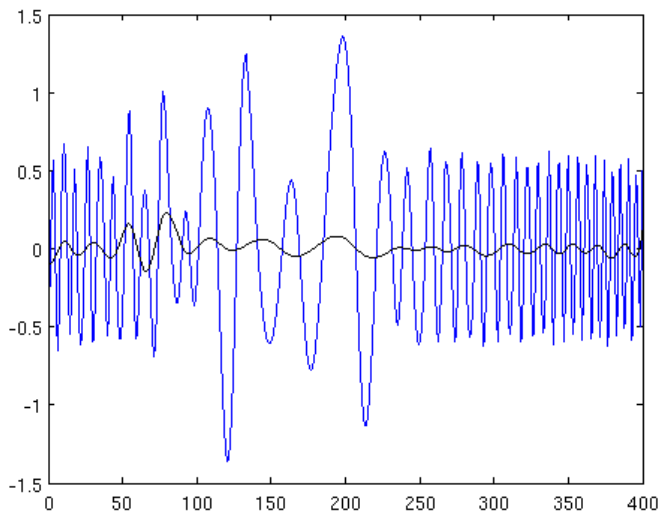
## Exemple de *sifting* process



## Exemple de *sifting* process



## Exemple de *sifting* process



# La décomposition

$$r_0 = X$$

Tant que  $r_i$  possède des extrema

- ▶ Extraire (*Sifting process*) une IMF  $c_i$  de  $r_i$
- ▶ Poser  $r_{i+1} = r_i - c_i$   
 $i \leftarrow i + 1$

Résultat final :

$$X = \sum_{i=0}^{k-1} c_k + r_k$$

où les  $c_i$  sont des IMF,  $r_k$  est monotone

# La décomposition

$$r_0 = X$$

Tant que  $r_i$  possède des extrema

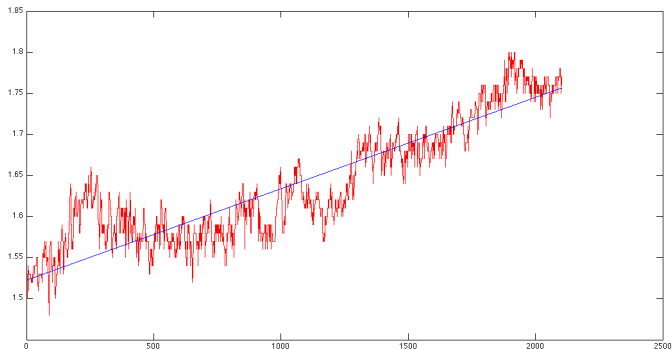
- ▶ Extraire (*Sifting process*) une IMF  $c_i$  de  $r_i$
- ▶ Poser  $r_{i+1} = r_i - c_i$   
 $i \leftarrow i + 1$

Résultat final :

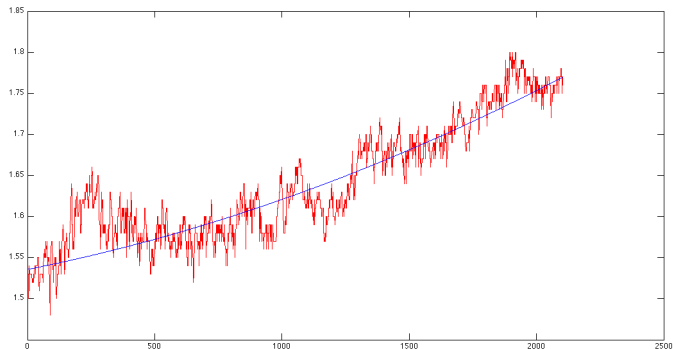
$$X = \sum_{i=0}^{k-1} c_k + r_k$$

où les  $c_i$  sont des IMF,  $r_k$  est monotone

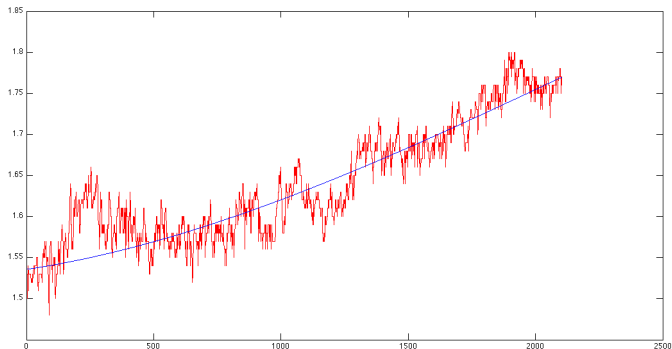
## Exemple : Fréquence cardiaque



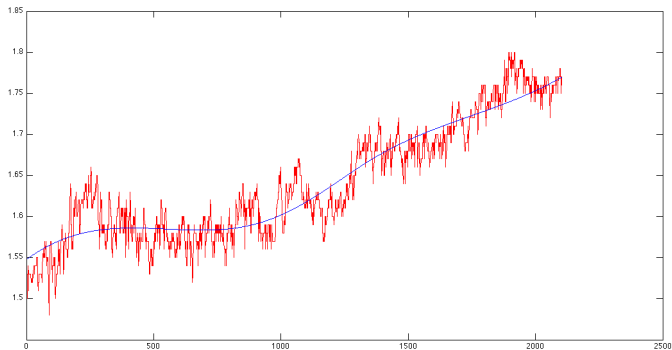
# Exemple : Fréquence cardiaque



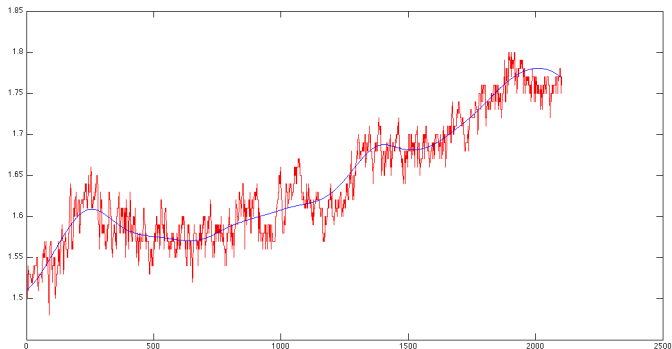
# Exemple : Fréquence cardiaque



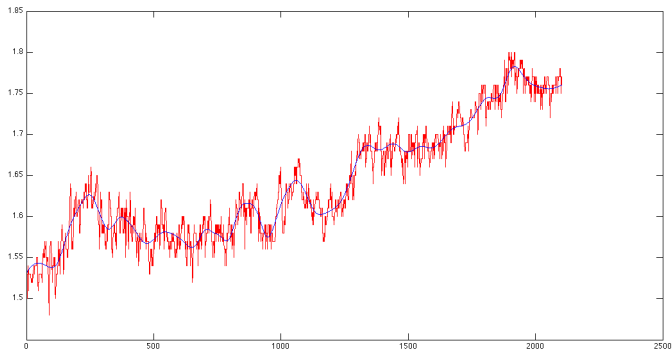
# Exemple : Fréquence cardiaque



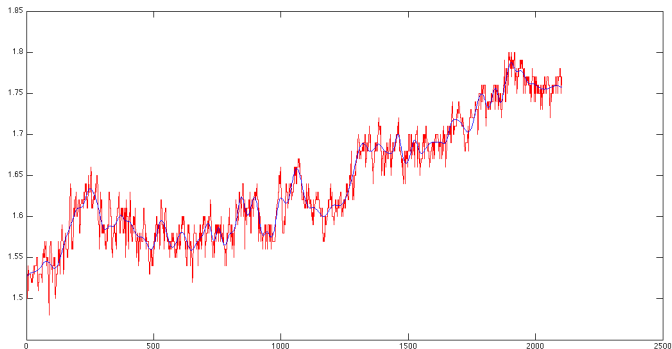
# Exemple : Fréquence cardiaque



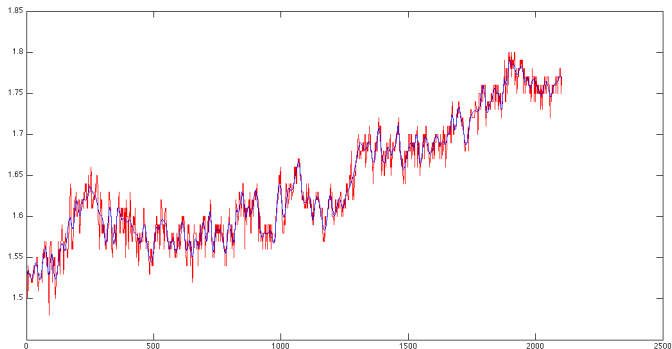
# Exemple : Fréquence cardiaque



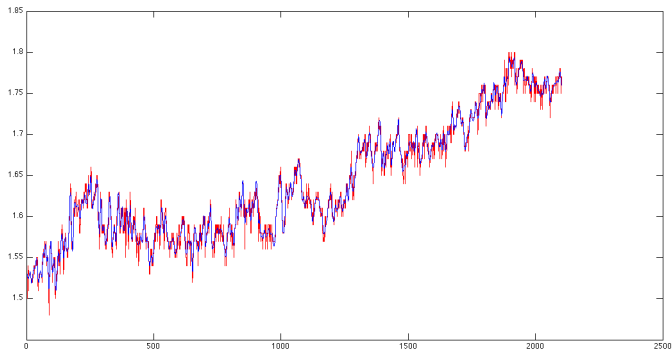
# Exemple : Fréquence cardiaque



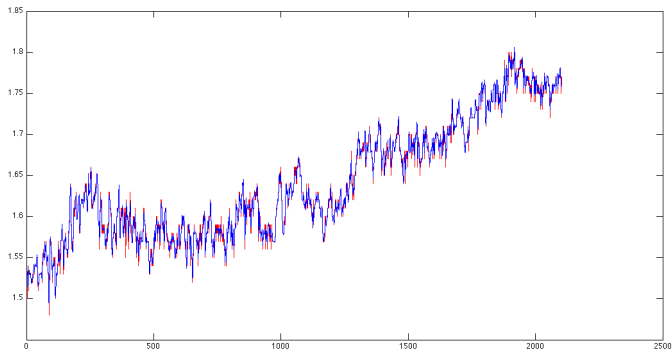
# Exemple : Fréquence cardiaque



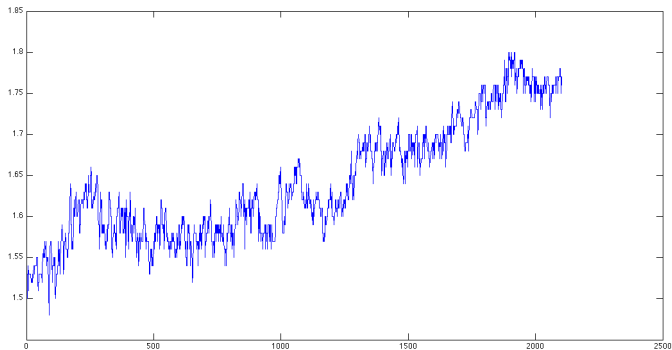
# Exemple : Fréquence cardiaque



# Exemple : Fréquence cardiaque



# Exemple : Fréquence cardiaque



# Orthogonalité des IMFs

## Intérêt

- ▶ Garantir la monotonie de l'énergie lors de la sélection des modes
- ▶ Obtenir un critère énergétique pour le débruitage/compression

## Expérimentalement

- ▶ Utiliser l'algorithme EMD initial
- ▶ La tendance n'est pas prise en compte
- ▶ On regarde l'angle géométrique plutôt que le produit scalaire

## Résultats

- ▶ Signaux réels :
- ▶ Moins concluant pour des signaux synthétiques.

# Orthogonalité des IMFs

## Intérêt

- ▶ Garantir la monotonie de l'énergie lors de la sélection des modes
- ▶ Obtenir un critère énergétique pour le débruitage/compression

## Expérimentalement

- ▶ Utiliser l'algorithme EMD initial
- ▶ La tendance n'est pas prise en compte
- ▶ On regarde l'angle géométrique plutôt que le produit scalaire

## Résultats

- ▶ Signaux réels :
- ▶ Moins concluant pour des signaux synthétiques.

# Orthogonalité des IMFs

## Intérêt

- ▶ Garantir la monotonie de l'énergie lors de la sélection des modes
- ▶ Obtenir un critère énergétique pour le débruitage/compression

## Expérimentalement

- ▶ Utiliser l'algorithme EMD initial
- ▶ La tendance n'est pas prise en compte
- ▶ On regarde l'angle géométrique plutôt que le produit scalaire

## Résultats

- ▶ Signaux réels :
- ▶ Moins concluant pour des signaux synthétiques.

# L'EMD : de nombreux paramètres

- ▶ Choix de l'interpolation entre les maxima et les minima :  
splines cubiques

- ▶ Arrêt du sifting process : critère de Cauchy en norme  $L^2$

$$\text{On veut } \sum_{t=0}^T \left( \frac{c_k(t) - c_{k+1}(t)}{c_k(t)} \right)^2 \in [0.2; 0.3]$$

# L'EMD : de nombreux paramètres

- ▶ Choix de l'interpolation entre les maxima et les minima :  
splines cubiques

- ▶ Arrêt du sifting process : critère de Cauchy en norme  $L^2$

$$\text{On veut } \sum_{t=0}^T \left( \frac{c_k(t) - c_{k+1}(t)}{c_k(t)} \right)^2 \in [0.2; 0.3]$$

# Défauts de l'EMD

- ▶ Effets de bord
- ▶ Robustesse
- ▶ Absence d'expression analytique

Corrigeable avec un autre critère d'arrêt, une autre interpolation...  
Ou avec une autre méthode

# Défauts de l'EMD

- ▶ Effets de bord
- ▶ Robustesse
- ▶ Absence d'expression analytique

Corrigeable avec un autre critère d'arrêt, une autre interpolation...  
Ou avec une autre méthode

## Piste de recherche

- Équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( g(x, t) \frac{\partial^3 s(x, t)}{\partial x^3} \right) = 0$$

- S'intéresse aux points de courbure et pas seulement aux extrema

## Piste de recherche

- Équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( g(x, t) \frac{\partial^3 s(x, t)}{\partial x^3} \right) = 0$$

- S'intéresse aux points de courbure et pas seulement aux extrema

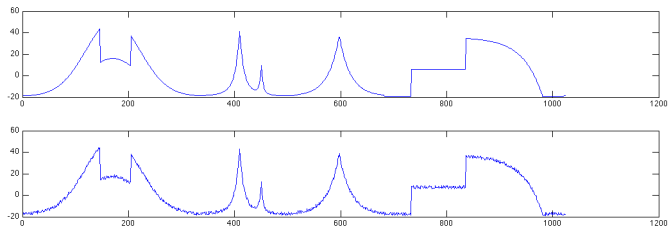
# Application potentielle : le débruitage

- ▶ Hypothèse : le bruit est capturé par les premières IMFs.
- ▶ Méthode : on tronque le premier tiers des IMFs à la variance
- ▶ Technique : les pics dont l'amplitude dépasse la variance sont conservés, les autres annulés
- ▶ Code : `imreconstruct.m` de Matlab

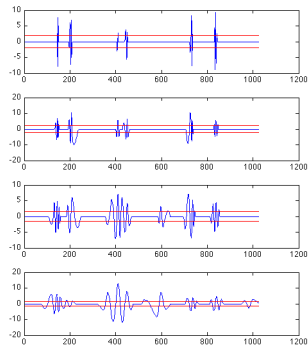
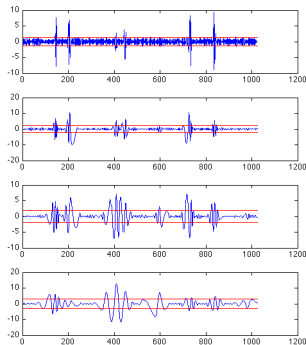
# Application potentielle : le débruitage

- ▶ Hypothèse : le bruit est capturé par les premières IMFs.
- ▶ Méthode : on tronque le premier tiers des IMFs à la variance
- ▶ Technique : les pics dont l'amplitude dépasse la variance sont conservés, les autres annulés
- ▶ Code : `imreconstruct.m` de Matlab

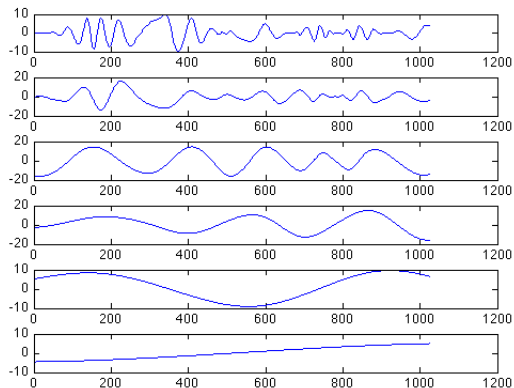
# Exemple : Débruitage



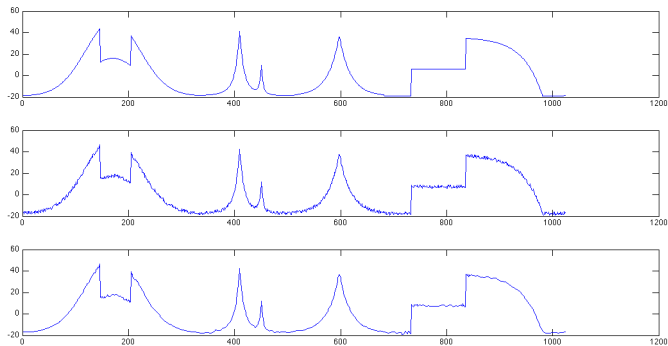
# Exemple : Débruitage



# Exemple : Débruitage



# Exemple : Débruitage



# Conclusion

L'EMD repose sur de nombreux choix arbitraires.

L'implémentation actuelle (*sifiting process*) n'est pas satisfaisante.

D'autres implémentations plus analytiques peuvent être adaptées :  
optimisation de fonctionnelles, EDP...

# Conclusion

L'EMD repose sur de nombreux choix arbitraires.

L'implémentation actuelle (*sifiting process*) n'est pas satisfaisante.

D'autres implémentations plus analytiques peuvent être adaptées :  
optimisation de fonctionnelles, EDP...

# Conclusion

L'EMD repose sur de nombreux choix arbitraires.

L'implémentation actuelle (*sifiting process*) n'est pas satisfaisante.

D'autres implémentations plus analytiques peuvent être adaptées : optimisation de fonctionnelles, EDP...

# Bibliographie I



Thomas Auberlin, Sylvain Meignen, and Valérie Perrier.

An alternative formulation for the empirical mode decomposition.

Formulation à base d'optimisation d'une fonctionnelle.



N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.L. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C., Yen C.C., Tung, and H.H. Liu.

The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis.

*Proc. R. Soc. Lond. A*, 454 :903–995, 1998.

Article fondateur introduisant l'EMD.



Oumar Niang, Éric Deléchelle, and Jacques Lemoine.

A spectral approach for sifting process in empirical mode decomposition.

*IEEE transactions on signal processing*, 58(11), November 2010.

# Bibliographie II



Jean-Claude Nunes and Éric Deléchelle.

Empirical mode decomposition : Applications on signal and image processing.

*Advances in Adaptive Data Analysis*, 1(1), 2009.

Généralisations en deux dimensions.



Gabriel Rilling, Patrick Flandrin, and Paulo Gonçalves.

On empirical mode decomposition and its algorithms.

Idées d'améliorations de l'algorithme.



Éric Deléchelle, Jacques Lemoine, and Oumar Niang.

Empirical mode decomposition : An analytical approach for sifting process.

*IEEE Signal Processing letters*, 12(11), November 2005.

Formulation des IMF à l'aide d'EDP.