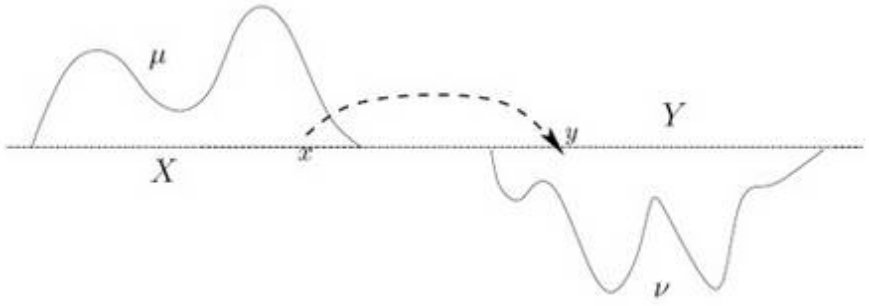
Transport optimal

Cécile Carrère, Didier Lesesvre, Paul Pegon

École Normale Supérieure de Cachan

1. Introduction aux problèmes de transport
   - Le problème de G. Monge (1781)
   - Le problème de L. Kantorovich (1942)
   - Dualité
   - Quelques résultats
2. Résolution numérique du problème discret
   - Le cas discret
   - L'algorithme des enchères
3. Problème de recherche
   - Formulations
   - Un résultat général
   - Le cas de la dimension 1
4. Bilan du stage

Le problème de G. Monge (1781)



Le critère de Monge

$$\inf_{T\#\mu=\nu} \int_{\Omega} c(x, T(x))d\mu(x)$$

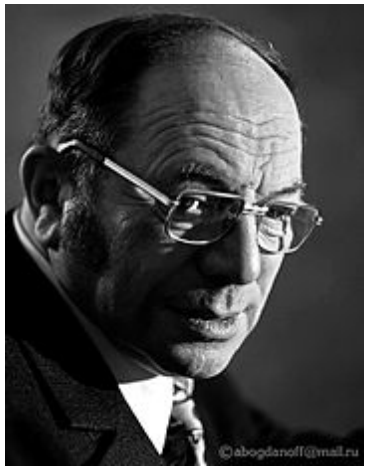
Le problème de G. Monge (1781)

Si f et g sont les densités de μ et ν, T injective et régulière :

Une condition... inutilisable !

$$\nu = T\#\mu \Longleftrightarrow \det(\mathcal{J}T) = \frac{f}{g \circ T}$$

Le problème de L. Kantorovich (1942)



Le critère de Kantorovich

$$\min_{\gamma \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{\Omega \times \Omega} c(x,y)\, d\gamma(x,y)$$

où $\quad \Pi(\mu,\nu) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega) \mid \pi_1 \# \gamma = \mu, \pi_2 \# \gamma = \nu\}$

Dualité

C'est un problème linaire sous contraintes convexes.

Problème dual

$$\sup\left\{\int \phi d\mu + \int \psi d\nu \colon \phi \oplus \psi \leq c\right\}$$

Des ϕ, ψ réalisant ce sup sont des *potentiels de* Kantorovitch.

Quelques résultats

Théorème de Brenier

Si $\mu \ll \lambda$ et $c(x,y) = h(x-y)$ où h est strictement convexe, alors

- il existe un unique plan de tranfert optimal γ
- ce transfert dérive d'un transport T

Dans le cas $c_2(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$

$$T = \mathrm{Id} - \nabla\phi = \nabla\left(\frac{\mathrm{Id}^2}{2} - \phi\right) = \nabla\chi$$

où χ convexe et ϕ est un potentiel de Kantorovich.

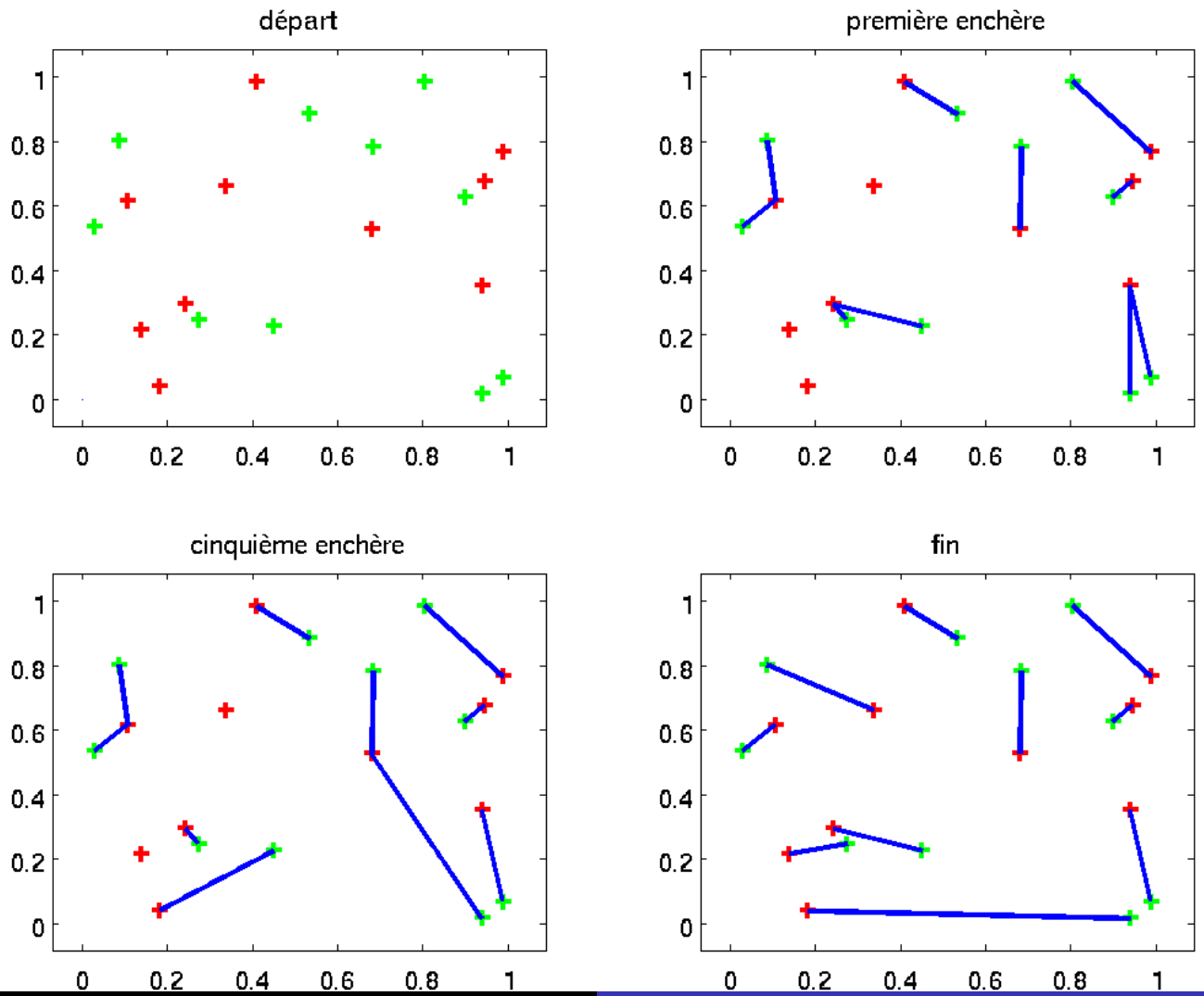
Cas discret

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i} \qquad \nu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{y_j}$$

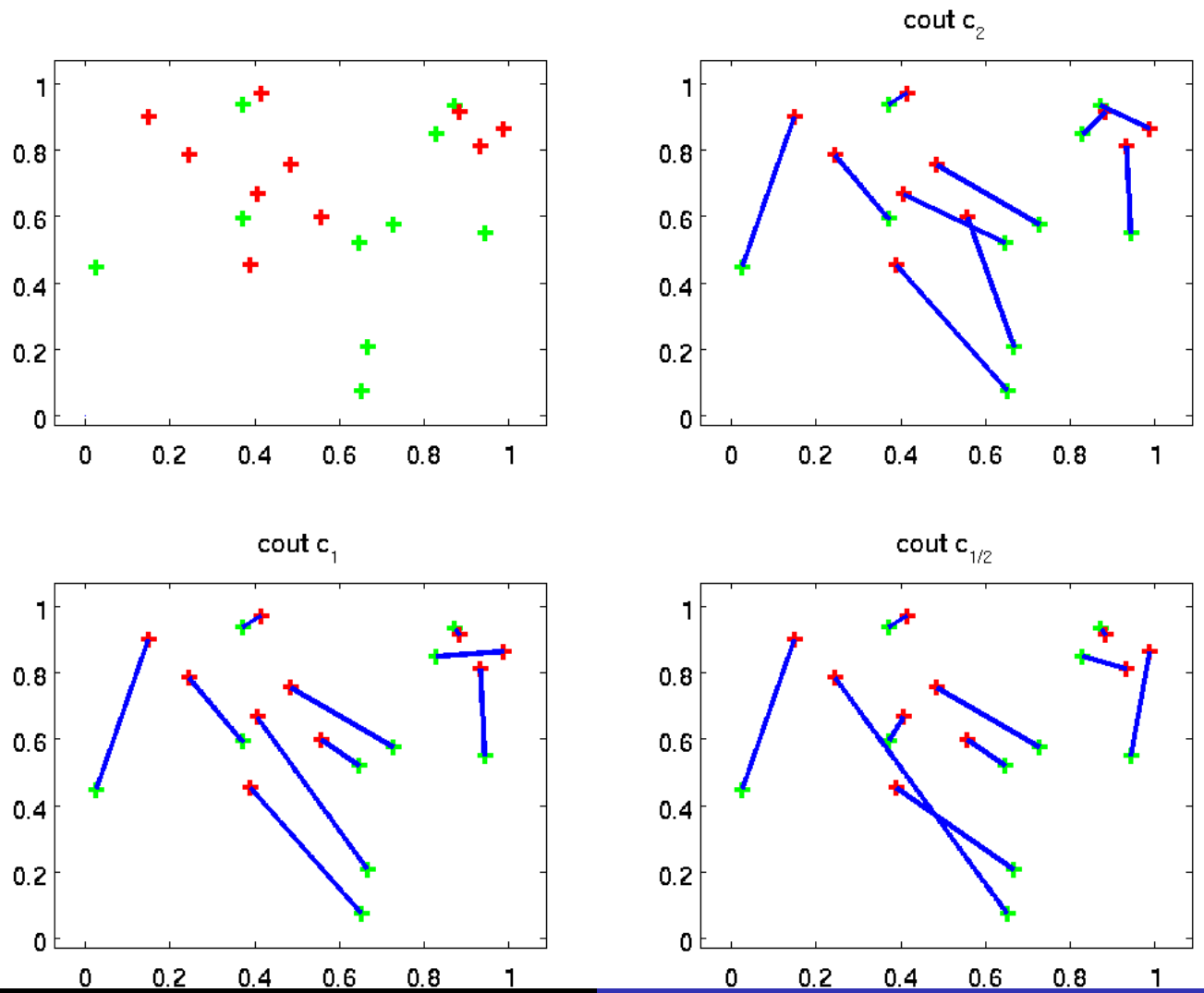
Caractérisation des plans optimaux

Il existe toujours une permutation optimale.

L'algorithme des enchères



Des résultats satisfaisants



Énoncé du problème

Énoncé du problème d'optimisation

$$\theta_\delta : T \in T(\mu,\nu) \longmapsto \sup_{\|x-y\|<\delta} \|T(x) - T(y)\|$$

$$\text{où} \quad T(\mu,\nu) = \{T \in \mathcal{B}(\Omega,\Omega) : T\#\mu = \nu\}$$

Reformulation *à la Kantorovich*

$$\vartheta_\delta : \gamma \in \Pi(\mu,\nu) \longmapsto \sup_{\substack{\|x-x'\|<\delta \\ (x,y),(x',y')\in \mathrm{Supp}(\gamma)}} \|y - y'\|$$

$$\text{où} \quad \Pi(\mu,\nu) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\Omega\times\Omega) : \pi_1\#\gamma = \mu,\ \pi_2\#\gamma = \nu\}$$

Existence d'un γ optimal

Théorème

Si $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\delta > 0$, il existe un plan de transfert $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ minimisant le coût

$$\vartheta_\delta : \gamma \longmapsto \sup_{\substack{\|x-x'\|<\delta \\ (x,y),(x',y') \in \mathrm{Supp}(\gamma)}} \|y - y'\|$$

Idée de la preuve :

- $\vartheta_\delta(\gamma) = \left\| |\pi_2(a) - \pi_2(b)| \, \mathbf{1}_{\|\pi_1(a)-\pi_1(b)\|<\delta} \right\|_{L^\infty(\gamma \otimes \gamma)}$
- Fonctionnelle semi-continue inférieure sur un compact.

Existence d'un T optimal

Théorème

$\Omega \subset \mathbb{R}$ compact, $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si μ est sans atome, alors il existe un transport optimal $T \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$ pour le coût

$$\theta_\delta : T \longmapsto \sup_{|x-y|<\delta} |T(x) - T(y)|$$

Aperçu de la preuve

Soit γ optimal de coût K et :

$$g(x) = \sup\{y : (x,y) \in \mathrm{Supp}(\gamma)\}$$
$$f(x) = \inf\{y : (x,y) \in \mathrm{Supp}(\gamma)\}$$

- La bande $[f,g] = \{(x,y) \colon f(x) \leq y \leq g(x)\}$ vérifie :

$$\mathrm{Supp}(\gamma) \subset [f,g]$$
$$\forall (x,y),(x',y') \in [f,g], \quad \left(\left|x-x'\right| < \delta \Longrightarrow \left|y-y'\right| \leq K\right)$$

- Idée : Élargir $[f,g]$ et chercher T t.q. $G_T \subset [f,g]$

Aperçu de la preuve

- Élargissement de la bande avec les transformées :

$$\phi^{\downarrow}(x) = \sup_{y \in X, |y-x|<\delta} \phi(y) - K$$
$$\phi^{\uparrow}(x) = \inf_{y \in X, |y-x|<\delta} \phi(y) + K$$

- Étude de la régularité des transformées
- Existence d'un transport dans la bande $[f^{\uparrow\downarrow}, f^{\uparrow}]$

Un stage complet et diversifié

- ⋆ Étude du cours de Filippo Santambrogio
- ⋆ Groupe de lecture avec Adina Ciomaga
- ⋆ Rédaction d'un mémoire détaillant les résultats de la théorie
- ⋆ Lecture de deux articles de recherche récents
- ⋆ Travail sur un algorithme de recherche de transport discret
- ⋆ Travail sur un problème ouvert, résolution en dimension 1
  En cours en dimensions supérieures...

Bibliographie

- ⋆ Y. Brenier *et al.*, *Reconstruction of the early Universe*
- ⋆ H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*
- ⋆ G. Carlier & I. Ekeland, *Equilibrium structure of a bidimensional asymetric city*
- ⋆ C. Villani, *Topics in optimal transporation*
- ⋆ C. Villani, *Optimal Transport*

On aime le transport !