

## Transformée de Fourier discrète et transformée inverse.

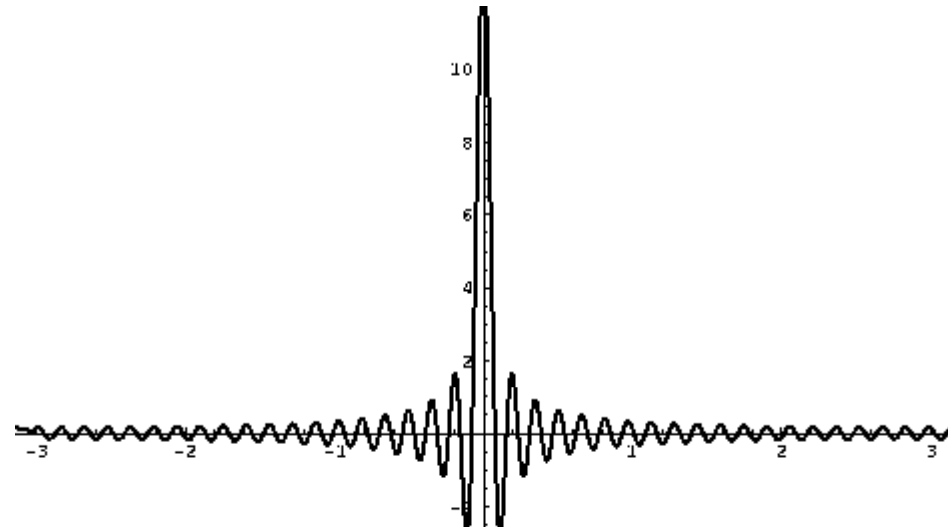
La transformée de Fourier discrète est l'application de  $L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$  qui associe à une fonction  $u$  la suite de ses coefficients de Fourier  $c(f) = (c_k(u))_{k \in \mathbb{Z}}$ .  
la transformée inverse est la série de Fourier associée à  $c \in l^2(\mathbb{Z})$ , notée

$$S(c)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

On a donc  $S(c(f)) = f$ , ce qui constitue une *formule d'inversion de Fourier*.  
Si  $a, b \in l^2(\mathbb{Z})$ , on note  $ab$  le produit terme à terme, défini par  $(ab)_k = a_k b_k$ .

$$S(ab) = \frac{1}{2\pi} S(a) * S(b).$$

Considérons le “filtre passe-bas”  $b_k^N = 1$  si  $|k| \leq N$ ,  $b_k^N = 0$



la série de Fourier tronquée de  $f$ ,  $s_N f$ , est obtenue par convolution  $2\pi$ -périodique de  $f$  avec le noyau de Dirichlet:

$$s_N f = h_N * f$$

$$h_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}}$$

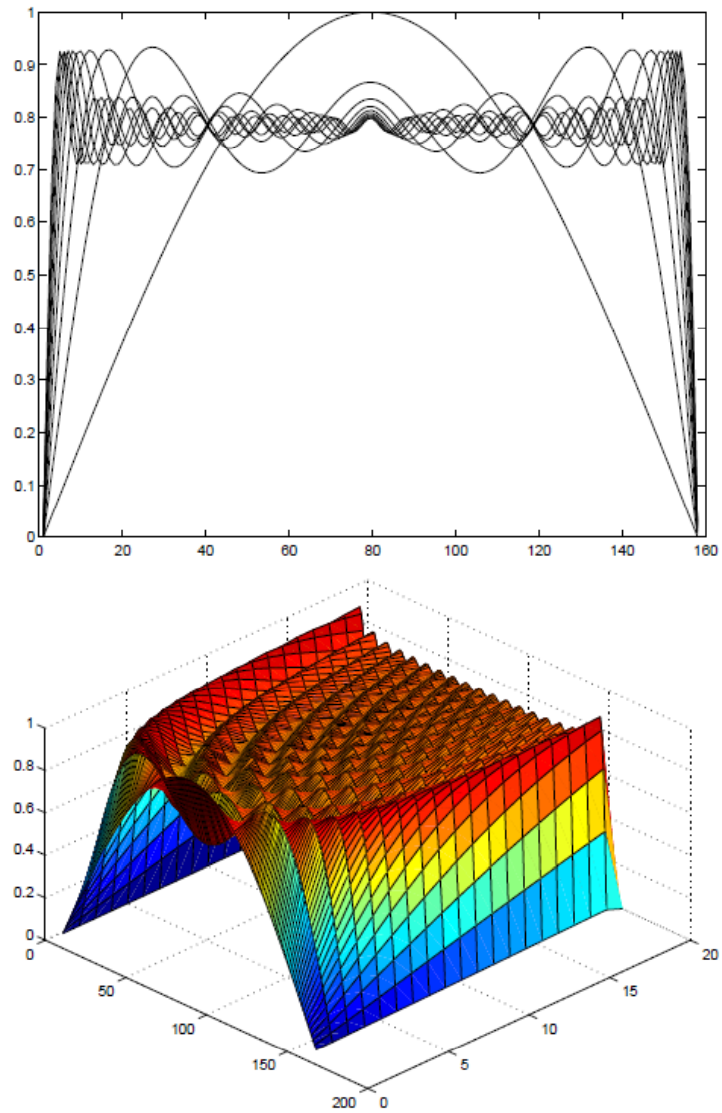


Figure 6.1: Sommes partielles de la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique, impaire, valant 1 sur  $]0, \pi]$ . Haut: les approximations sont représentées sur le même graphe, sur l'intervalle  $]0, \pi]$ . Bas: les différentes approximations sont tracées selon un troisième axe (nombre de termes entre 1 et 20). On remarque que l'erreur maximale d'approximation ne varie pas avec le nombre de termes, tandis que la fréquence des oscillations augmente.



Figure 6.2: Illustration de l'effet de Gibbs. Gauche: l'image originale; droite: l'image après que l'on ait tronqué ses hautes fréquences, et sur laquelle sont visibles de nombreuses oscillations. L'image de droite est obtenue en ne conservant que les fréquences dont le module est inférieur au quart de la fréquence maximale. Le phénomène est particulièrement visible le long des frontières du domaine de l'image (voir en particulier le côté droit) et le long des discontinuités de l'image. Remarquons que l'image est également devenue floue par suppression des hautes fréquences.

## Autres bases de Fourier

i) On pose pour  $T > 0$   $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , c'est la fréquence de base associée à la période  $T$ . Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}} e^{ik\omega t}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

forment une base hilbertienne de  $L^2(0, T)$ . Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$$

forment également une base hilbertienne de  $L^2(0, T)$  : c'est en fait la base originale de Fourier !

**Démonstration** i) La deuxième base résulte de l'application à la base de Fourier de la remarque générale suivante. Si  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne, alors le système  $f_0 = e_0, \dots, f_{2k} = \frac{e_k + e_{-k}}{\sqrt{2}}, f_{2k+1} = \frac{e_k - e_{-k}}{\sqrt{2}}, \dots$  aussi.

ii) Il en est de même pour les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$$

La transformée associée à la base en cosinus s'appelle la "transformée en cosinus."

Il y a également une "base en sinus",  $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right), k = 1, 2, \dots$

ii) Si  $f \in L^2(0, T)$ , on lui associe la fonction paire  $\tilde{f}$  sur  $[-T, T]$  qui coïncide avec  $f$  sur  $[0, T]$ . On décompose  $\tilde{f}$  sur la base de Fourier de  $[-T, T]$ . La base de Fourier sur  $[-T, T]$  est formée des fonctions  $\frac{1}{\sqrt{2T}} e^{\frac{i\pi kt}{T}}$ . Donc on a

$\tilde{f}(x) =_{L^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2T} \left( \int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{-\frac{i\pi kt}{T}} dt \right) e^{\frac{i\pi kx}{T}}$ . Comme  $\tilde{f}$  est paire, on voit en faisant le changement de variables  $t \rightarrow -t$  dans les intégrales que les coefficients de  $e^{\frac{i\pi kx}{T}}$  et  $e^{-\frac{i\pi kx}{T}}$  sont égaux. On remarque aussi que  $\int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{\frac{i\pi kt}{T}} dt = 2 \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right) dt$ . Aussi,

$$\tilde{f}(x) =_{L^2} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{f}(t) dt + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2T} \left( \int_{-T}^T \tilde{f}(t) e^{-\frac{i\pi kt}{T}} dt \right) \left( e^{\frac{i\pi kx}{T}} + e^{-\frac{i\pi kx}{T}} \right), \text{ et donc}$$

$$f(x) =_{L^2} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{T} \left( \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right) dt \right) \cos\left(\frac{\pi kx}{T}\right).$$

**Lemme 6.2** Les fonctions à variables séparées, c'est-à-dire de la forme  $w(x) = u(x_1)v(x_2)$  avec  $u, v \in L^2(0, 2\pi)$  forment un système total de  $L^2([0, 2\pi]^2)$ .

**Démonstration** Les fonctions caractéristiques de rectangles sont à variables séparées et elles forment un système total de  $L^2([0, 2\pi]^2)$ .  $\circ$

**Lemme 6.3** Si  $u_k(x) \rightarrow u(x)$  et  $v_l(x) \rightarrow v(x)$  dans  $L^2(0, 2\pi)$ , alors  $u_k(x_1)v_l(x_2) \rightarrow u(x_1)v(x_2)$  dans  $L^2([0, 2\pi]^2)$  quand  $k, l \rightarrow +\infty$ .

$$u(x_1) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} c_{k_1} e^{ik_1 x_1}, \quad c_{k_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} u(x_1) e^{-ik_1 x_1};$$

$$v(x_2) = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_2} e^{ik_2 x_2}, \quad c_{k_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} v(x_2) e^{-ik_2 x_2}.$$

En appliquant le lemme 6.3 à  $u_N(x_1) = \sum_{-N}^N c_{k_1}(u) e^{ik_1 x_1}$

et  $v_M(x_2) = \sum_{-M}^M c_{k_2}(v) e^{ik_2 x_2}$  qui convergent respectivement vers  $u(x_1)$  et  $v(x_2)$  dans  $L^2([0, 2\pi])$

on obtient une série double convergente dans  $L^2([0, 2\pi]^2)$

# Séries de Fourier

**Corollaire 5.2** *Le système*

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(e^{ikt})_{k \in \mathbb{Z}}$$

*est une base hilbertienne de  $L^2(-\pi, \pi)$ . Notant  $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$ , on a donc pour toute  $f$  dans  $L^2([-\pi, \pi])$ ,*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx},$$

*la série précédente convergeant au sens  $L^2$ .*

## **Transformée de Fourier discrète et transformée inverse.**

La transformée de Fourier discrète est l'application de  $L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$  qui associe à une fonction  $u$  la suite de ses coefficients de Fourier  $c(f) = (c_k(u))_{k \in \mathbb{Z}}$ .



## Bases de Fourier en dimension 2

On pose  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

$$k \cdot x = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

**Théorème 6.3** *Les fonctions  $e_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ik \cdot x}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ , forment une base hilbertienne de  $L^2([0, 2\pi]^2)$  et on a donc pour toute fonction  $u \in L^2([0, 2\pi]^2)$ ,*

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k(u) e^{ik \cdot x}, \text{ avec } c_k(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0, 2\pi]^2} u(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad (6.2)$$

*la convergence de la série se vérifiant au sens de  $L^2$ .*

# Chapitre 8

## Le cas discret

La transformée de Fourier discrète est un moyen de calculer les coefficients de Fourier d'une fonction  $a$ -périodique  $u$  à partir de ses  $N$  échantillons  $u(\frac{ka}{N})$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ .  $N$  est pair.

On cherche un polynôme trigonométrique de la forme

$$P(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{a}\right),$$

qui soit égal à  $u$  aux points  $\frac{ka}{N}$  pour  $k = 0, \dots, N-1$ . On dira dans la suite que  $P$  est de degré  $\frac{N}{2}$ . Le but est donc d'interpoler les échantillons  $u(\frac{ka}{N}) = u_k$ .

On pose  $\omega_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$ , racine  $N$ -ième de l'unité.

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^k = 0, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kl} = 0 \text{ pour } l \neq 0 \text{ modulo } N$$

$$\sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} \omega_N^{kl} = 0 \text{ pour tout } l \neq 0 \text{ modulo } N.$$

**Définition 8.1** On pose  $u_k = u\left(\frac{ka}{N}\right)$  et, pour  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ ,

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl}. \quad (8.2)$$

Les  $N$  coefficients  $\tilde{u}_n$  sont appelés transformée de Fourier discrète (TFD) des  $N$  échantillons  $u_k$ . On appelle transformée de Fourier discrète inverse l'application de  $C^N$  dans lui même définie par

$$u_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{kn}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (8.3)$$

$$P(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{a}\right), \quad (8.1) \quad \omega_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$$

**Définition 8.1** On pose  $u_k = u\left(\frac{ka}{N}\right)$  et, pour  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ ,

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl}. \quad (8.2)$$

Les  $N$  coefficients  $\tilde{u}_n$  sont appelés transformée de Fourier discrète (TFD) des  $N$  échantillons  $u_k$ . On appelle transformée de Fourier discrète inverse l'application de  $C^N$  dans lui même définie par

$$u_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{kn}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (8.3)$$

**Proposition 8.1** Les coefficients  $(\tilde{u}_n)$  définis par (8.2) sont les uniques coefficients tels que le polynôme trigonométrique (8.1) vérifie  $P\left(\frac{ka}{N}\right) = u_k$ , pour tout  $k = 0, \dots, N-1$ . En d'autres termes, la transformée de Fourier discrète composée avec son inverse donne bien l'identité.

**Démonstration** Pour  $k = 0, \dots, N-1$ ,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{ka}{N}\right) &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left( \sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl} \right) \omega_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \left( \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \omega_N^{nk-nl} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} N \delta(k-l) u_l = u_k, \end{aligned}$$

où on a noté  $\delta$  la fonction définie sur les entiers, valant 1 en 0, et 0 ailleurs. L'unicité provient du fait que toute application linéaire surjective de  $\mathbb{C}^N$  dans lui-même est aussi injective. ◦

**Définition 8.1** On pose  $u_k = u\left(\frac{ka}{N}\right)$  et, pour  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ ,

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl}. \quad (8.2)$$

Les  $N$  coefficients  $\tilde{u}_n$  sont appelés transformée de Fourier discrète (TFD) des  $N$  échantillons  $u_k$ . On appelle transformée de Fourier discrète inverse l'application de  $C^N$  dans lui même définie par

$$u_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{kn}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (8.3)$$

**Corollaire 8.1** Si  $u$  est un polynôme trigonométrique  $u(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{a}\right)$ , les coefficients  $\tilde{u}_n$  sont obtenus à partir des échantillons de  $u$  par la formule (8.2). Ce sont les coefficients de Fourier de  $u$ .

On rappelle d'autre part que si  $u \in L^2(0, a)$ , les coefficients de la série de Fourier de  $u$  sont définis, pour  $n \in \mathbb{Z}$ , par

$$c_n(u) = \frac{1}{a} \int_0^a u(x) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{a}\right). \quad (8.4)$$

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl}.$$

**Proposition 8.2** *Soit  $u$  continue et  $a$ -périodique. Alors les  $\tilde{u}_n$  sont des approximations des  $c_n(u)$  par la formule des trapèzes, pour  $n = \frac{-N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ .*

**Démonstration** Il suffit d'écrire l'approximation de l'intégrale (8.4) par la méthode des trapèzes en tenant compte du fait que  $u(a) = u(0)$  pour une fonction  $a$ -périodique. ◦

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl}.$$

**Proposition 8.3** *On suppose que les échantillons  $u_k$  sont réels. Alors  $\tilde{u}_0$  et  $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}}$  sont réels, et pour  $k = 1 \dots \frac{N}{2} - 1$ ,  $\tilde{u}_k = \overline{\tilde{u}_{-k}}$ .*

**Démonstration**  $\tilde{u}_0 = \frac{1}{N} \sum_k u_k$ , et  $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum (-1)^k u_k$ ; ces deux coefficients sont donc réels. D'autre part

$$\tilde{u}_{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u_k \omega_N^{-nk}} = \overline{\tilde{u}_n}.$$



**Proposition 8.4** *si  $u$  est un polynôme trigonométrique réel dont les fréquences sont parmi  $-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ , le terme  $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}}$  est nul.*

**Démonstration** En effet, en regroupant les termes conjugués, on a, pour le polynôme trigonométrique  $P$  dont les coefficients sont les  $\tilde{u}_n$  :

$$P(x) = \tilde{u}_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} (\tilde{u}_n e^{\frac{2in\pi x}{a}} + \tilde{u}_{-n} e^{\frac{-2in\pi x}{a}}) + \tilde{u}_{-\frac{N}{2}} e^{\frac{-iN\pi x}{a}}.$$

Tous les termes de la somme sont réels sauf le dernier, qui ne l'est que si  $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}} = 0$ . ○

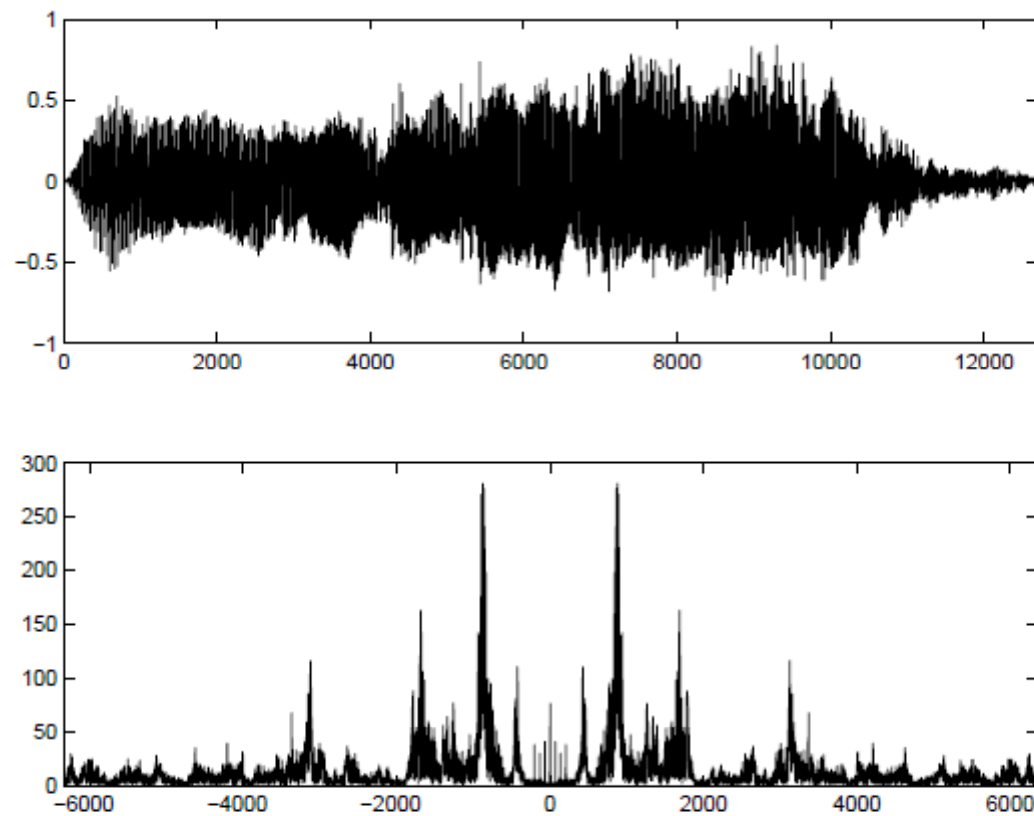


FIGURE 8.2 – Haut : un signal correspondant à la voyelle "Ah" (le signal représente la pression de l'air en fonction du temps); bas : module de la TFD (coefficients  $|\tilde{u}_i|$ , voir le texte). On remarque que le module du spectre est symétrique, et qu'il existe trois pics importants correspondant aux fréquences dominantes.

### 8.1.2 La dimension 2

On considère un réel  $a$ , une fonction  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $u(x+a, y+a) = u(x, y)$ . On fixe à nouveau un entier  $N$ , et l'on pose  $u_{k,l} = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$ . On définit la TFD des  $u_{k,l}$  comme la suite des coefficients, pour  $m, n \in \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\}$ ,

$$\tilde{u}_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} u_{k,l} \omega_N^{-mk} \omega_N^{-nl}. \quad (8.5)$$

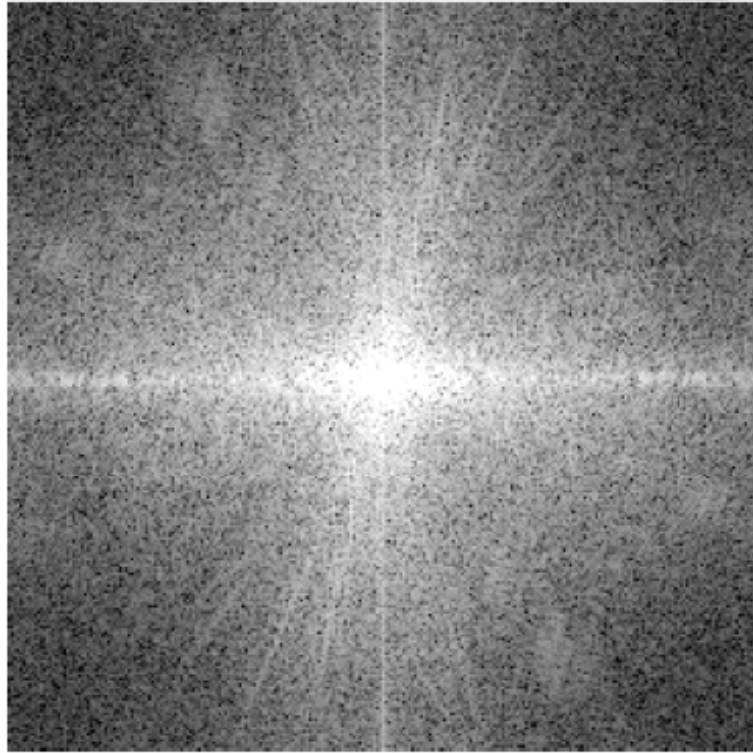
**Proposition 8.5** *Soient les coefficients  $\tilde{u}_{m,n}$  définis, pour  $m, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ , par (8.5). Considérons le polynôme trigonométrique*

$$P(x, y) = \sum_{m,n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_{m,n} \exp\left(\frac{2i\pi mx}{a}\right) \exp\left(\frac{2i\pi ny}{a}\right).$$

*Les coefficients  $\tilde{u}_{m,n}$  sont les seuls nombres complexes tels que, pour tout  $k, l \in \{0, \dots, N-1\}$ , on ait  $P\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right) = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$ . Par conséquent, la transformée discrète inverse de  $u_{k,l} \rightarrow \tilde{u}_{m,n}$  est donnée par le calcul du polynôme aux*

*échantillons  $\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$ ,  $0 \leq k, l \leq N-1$  :*

$$u(k, l) = P\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right) = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_{m,n} \omega_N^{km+ln}.$$



## Le phénomène du repliement de spectre ou aliasage

Dans cette section, on considère une fonction  $u \in L^2(0, a)$  et

sa série de Fourier 
$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{\frac{2in\pi x}{a}}.$$

Dans toute la suite, on supposera que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(u)| < +\infty$ , ce qui implique que  $u$  est continue et  $a$ -périodique.

On suppose également, ce qui est réaliste, qu'un signal  $u$  n'est en fin de compte connu que par ses échantillons sur  $[0, a]$ ,  $u(0), \dots, u(\frac{N-1}{N}a)$ .

**Théorème 8.1** Soit  $u$  définie sur  $[0, a]$ , vérifiant  $\sum_n |c_n(u)| < +\infty$ . Alors la transformée de Fourier discrète de  $u$  est la  $N$ -périodisée de la suite des coefficients de Fourier de  $u$  :

$$\tilde{u}_n = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{n+qN}(u), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (8.6)$$

**Démonstration** On rappelle la notation  $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$  et  $(\omega_N)^N = 1$ . Comme

$$u(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(u) e^{\frac{2im\pi x}{a}},$$

on a

$$u\left(\frac{ka}{N}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(u) \omega_N^{mk}.$$

On pose pour  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m = qN + n$ ,  $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$ . En regroupant les termes de la série de Fourier on obtient

$$u\left(\frac{ka}{N}\right) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left( \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{n+qN}(u) \right) \omega_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Ces deux dernières formules définissent toutes deux la transformée de Fourier discrète et par identification on obtient la formule de "repliement de spectre" (8.6).

◦

On a le résultat analogue en deux dimensions :

**Théorème 8.2** *Soit  $u$  définie sur  $[0, a]^2$ , vérifiant  $\sum_n |c_{m,n}(u)| < +\infty$ . Alors la transformée de Fourier discrète de  $u$  est la  $(N, N)$ -périodisée de la suite des coefficients de Fourier de  $u$  :*

$$\tilde{u}_{m,n} = \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} c_{m+pN,n+qN}(u), \quad m, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (8.7)$$

Le terme aliasage se réfère

à la présence des coefficients parasites  $c_{m+pN,n+qN}$ , pour  $(p, q) \neq (0, 0)$  dans le calcul du coefficient de la fréquence  $(m, n)$ ,  $\tilde{u}_{m,n}$ . Quand la transformée de Fourier discrète fait correctement son travail, qui est de retrouver le coefficient  $c_{m,n}$  de la fréquence  $(m, n)$  de  $u$ , on doit avoir  $\tilde{u}_{m,n} = c_{m,n}$ . Les coefficients  $c_{m+pN,n+qN}$  qui s'y ajoutent dans (8.7) sont des répliques, ou "alias".

comment interpréter l'expérience pratique suivante : un signal est donné par ses échantillons, et on le sous-échantillonne.

**Définition 5.2** *Soit un signal échantillonné  $(u_k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , et soit  $p$  un entier divisant  $N$ . On définit l'opérateur "sous-échantillonnage d'ordre  $p$ " comme suit :*

$$S_p : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N/p}$$

$$(u_k)_{k=0, \dots, N-1} \longrightarrow (v_k) = (u_{kp})_{k=0, \dots, N/p}.$$

*Le signal  $(v_k)$  est dit sous-échantillonné d'un facteur  $p$ .*



**Corollaire 5.2** Soit  $(v_k) = S_2((u_k))$  (on suppose que  $\frac{N}{2}$  est pair). Alors  $(\tilde{v}_n)$ , la transformée de Fourier Discrète de  $(v_k)$ , s'écrit, pour  $n = -\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1$ ,

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-\frac{N}{2}} + \tilde{u}_{n+\frac{N}{2}}, \quad (5.8)$$

le deuxième terme étant par ailleurs nul si  $n < 0$  et le troisième étant nul si  $n \geq 0$ .

**Démonstration** Appliquons le théorème 5.1 à l'unique polynôme trigonométrique  $P$  à  $N$  coefficients qui a pour échantillons les  $u_k$ . Alors par définition de la transformée de Fourier discrète,  $\tilde{u}_n = c_n(P)$ . On a donc pour  $\frac{N}{4} \leq n \leq \frac{N}{4} - 1$ ,

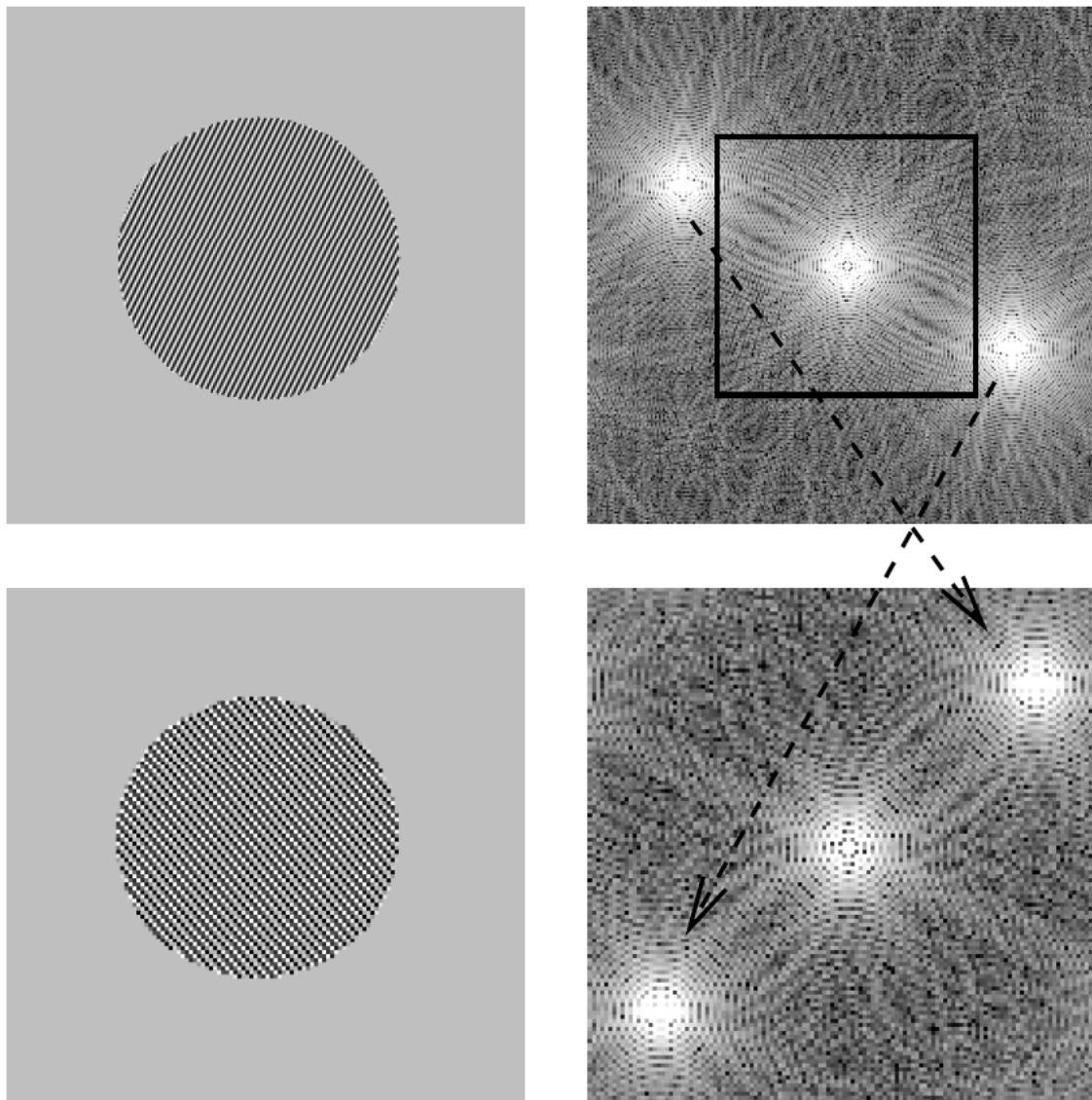
$$\tilde{v}_n = \sum_{q \in \mathbb{Z}} c_{n+q\frac{N}{2}}(P) = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-\frac{N}{2}} + \tilde{u}_{n+\frac{N}{2}}.$$

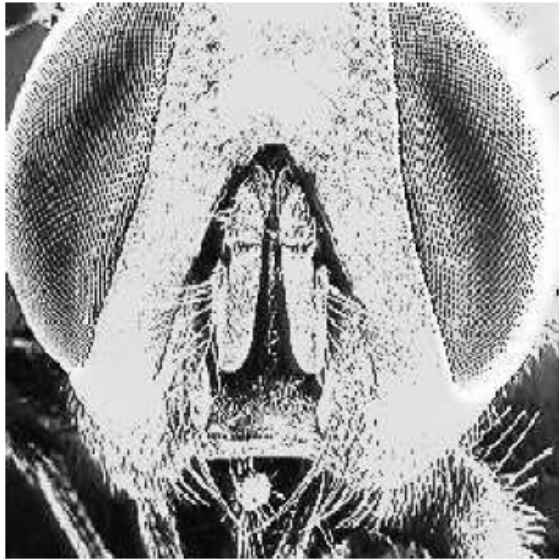
Remarquons que si  $n \geq 0$  cela donne  $\tilde{v}_n = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n-\frac{N}{2}}$ , l'autre coefficient étant nul. De même, si  $n < 0$ , on obtient  $\tilde{v}_n = \tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+\frac{N}{2}}$ .

○

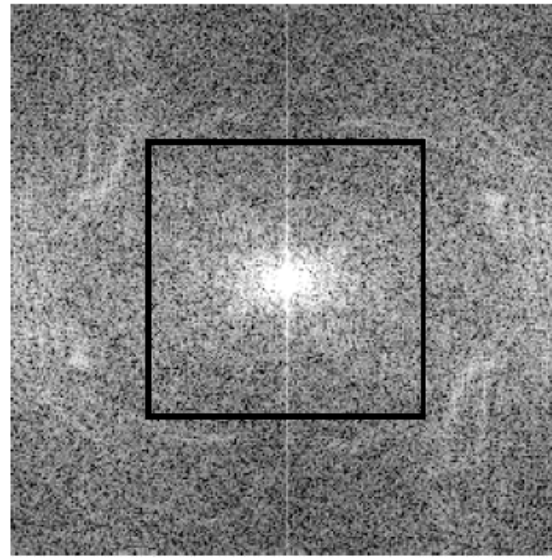
**Corollaire 8.3** Soit  $(v_{k,l}) = S_2((u_{k,l}))$  la sous-échantillonnée d'un facteur 2 d'une image discrète. (on suppose que  $\frac{N}{2}$  est pair). Alors  $(\tilde{v}_{m,n})$ , la transformée de Fourier Discrète de  $(v_{k,l})$ , s'écrit, pour  $m, n = -\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1$ ,

$$\tilde{v}_{m,n} = \tilde{u}_{m,n} + \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{0,1,-1\}} \tilde{u}_{m+\varepsilon_1 \frac{N}{2}, n+\varepsilon_2 \frac{N}{2}}. \quad (8.9)$$





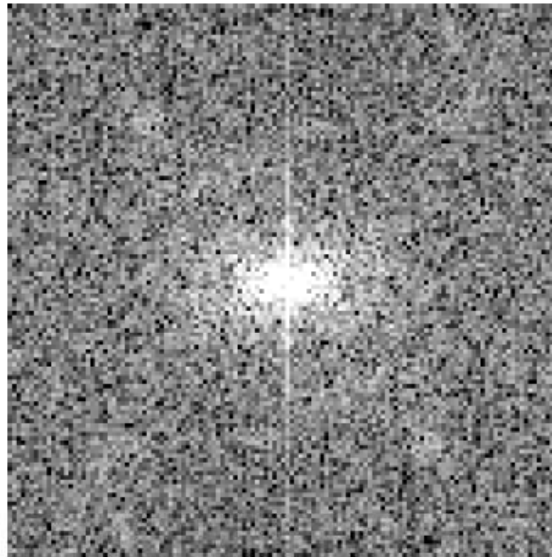
(a) Image originale



(b) Sa TFD, non nulle en dehors du carré visible en surimpression



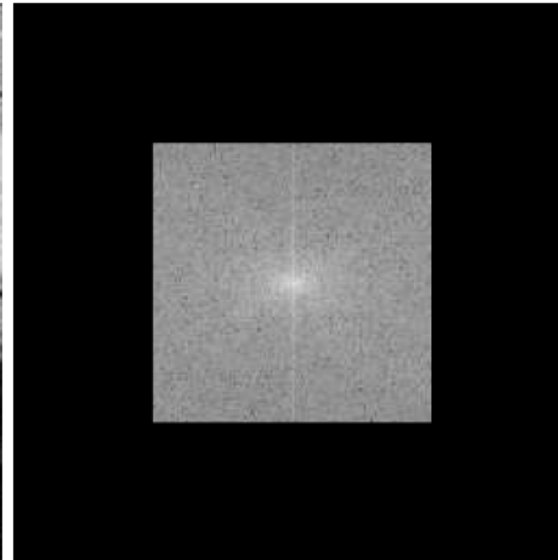
(c) Image sous-échantillonnée d'un facteur 2



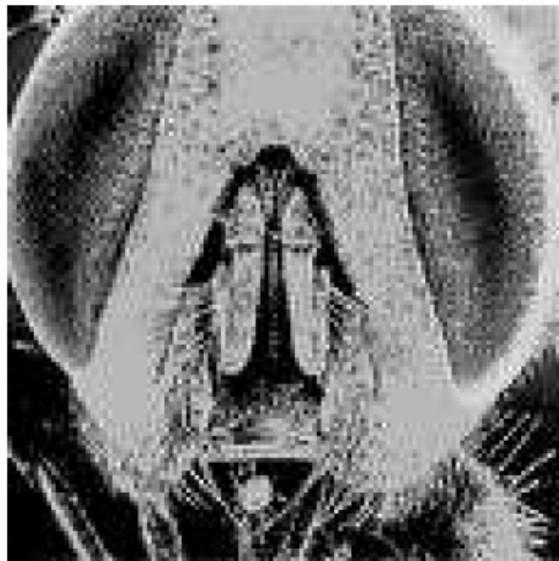
(d) La TFD correspondante, sur laquelle il y a repliement



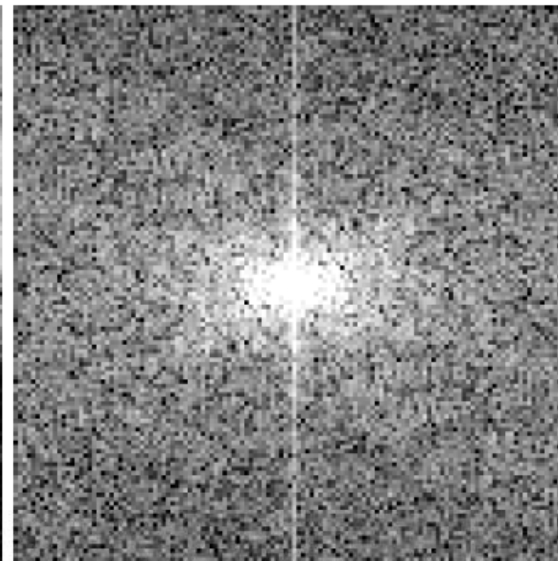
(a) Image obtenue par TFD inverse de b



(b) Image obtenue en mettant à zéro les hautes fréquences de 8.1.3-a



(c) Sous-échantillonnage: le repliement a disparu



(d) TFD de c

### 8.1.4 La transformée de Fourier rapide

Appelons “calcul d’ordre  $N$ ” l’évaluation d’un polynôme de degré  $N-1$  aux racines  $N$ -ièmes de l’unité. Et soit  $T(N)$  le nombre d’opérations (additions et multiplications) demandées par ce calcul.

On se place dans le cas  $N = 2^n$  et soit un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k.$$

On pose

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k} X^k, \quad R(X) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k+1} X^k.$$

Alors

$$P(\omega_N^k) = Q\left(\left(\omega_N^k\right)^2\right) + \omega_N^k R\left(\left(\omega_N^k\right)^2\right).$$

$$T(N) = 2T\left(\frac{N}{2}\right) + 2N. \quad \text{On en tire aisément } T(N) = \mathcal{O}(N \log(N)).$$

$$P(x) = \sum_{-\underline{N}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n e^{\frac{2i\pi nx}{a}}.$$

En translatant de  $\alpha$ , on obtient

$$\tau_\alpha P(x) = P(x - \alpha) = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n e^{-\frac{2i\pi n\alpha}{a}} e^{\frac{2i\pi nx}{a}}.$$

La TFD ( $\tilde{v}_n$ ) de  $P(x - \alpha)$  s'obtient à partir de la TFD de  $P(x)$ ,  $\tilde{u}_n$ , par

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n e^{-\frac{2i\pi n\alpha}{a}}.$$

## La rotation

$$R(-\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tan(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := T(\theta)S(\theta)T(\theta)$$

Une rotation d'angle  $\theta$  de l'image discrète  $u(i, j)$  consiste à calculer  $u(R(-\theta)(i, j))$  que l'on notera  $(R(-\theta)u)(i, j)$ . Mais on a  $R(-\theta)u = T(\theta)S(\theta)T(\theta)u$ . Donc il suffit d'expliquer comment calculer  $T(\theta)u$  et  $S(\theta)u$ . Or ces deux opérations ont la même structure, à savoir une translation ligne par ligne ou une translation colonne par colonne. Traitons par exemple le cas de  $T(\theta)$ . On a  $(T(\theta)u)(i, j) = u(i + j \tan(\frac{\theta}{2}), j)$ . Donc partant de la matrice  $u_{i,j}$ , on translate sa première ligne de  $\tan(\frac{\theta}{2})$ , la deuxième de  $2 \tan(\frac{\theta}{2})$ , etc.



**Remarque 5.4** *Du fait que l'on manipule des fonctions périodiques, une translation conduirait à faire sortir une partie de l'image par un bord pour la faire entrer par l'autre. Ce qui conduirait à l'apparition, sur les bords de l'image d'un certain nombre de détails qui sont en fait mal placés. On se débarrasse facilement de ce problème en insérant l'image dans un cadre deux fois plus grand. . .*





Figure 8.10: Bas: après douze rotations successives de  $\pi/4$  par TFD; haut: même expérience en utilisant une interpolation bilinéaire (la valeur en un nouveau point  $(x, y)$  est obtenue par combinaisons linéaires des valeurs aux quatre points à coordonnées entières de l'image originale les plus proches de  $(x, y)$ ).



Figure 8.10: Bas: après douze rotations successives de  $\pi/4$  par TFD; haut: même expérience en utilisant une interpolation bilinéaire (la valeur en un nouveau point  $(x, y)$  est obtenue par combinaisons linéaires des valeurs aux quatre points à coordonnées entières de l'image originale les plus proches de  $(x, y)$ ).

**Le zoom** Nous présentons une méthode d'interpolation reposant sur une extension de la TFD d'un signal ou d'une image. Nous détaillons la méthode, dite du "prolongement par des zéros ("zéro-padding"), en une dimension, le principe se généralisant sans mal pour une image. Comme précédemment, considérons des échantillons  $u_k$ ,  $k$  variant de 0 à  $N-1$ , et  $\tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega_N^{-kn}$ . On suppose que  $N$  est pair et que l'on veut zoomer d'un facteur 2, c'est à dire que l'on veut construire un signal de taille deux fois plus grande (avec deux fois plus d'échantillons) que le signal de départ. On définit un nouveau signal  $v$ , de taille  $2N$  comme étant la TFD inverse de  $\tilde{v}$ , donné par

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n \quad \text{si} \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \quad \tilde{v}_n = 0 \quad \text{si} \quad n \in [-N, -\frac{N}{2} - 1] \cup [\frac{N}{2}, N - 1].$$

(5.12)

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n \quad \text{si} \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \quad \tilde{v}_n = 0 \quad \text{si} \quad n \in [-N, -\frac{N}{2} - 1] \cup [\frac{N}{2}, N - 1].$$

(5.12)

**Proposition 5.8** *Le signal  $v$  dont la TFD est donnée par la formule (5.12) vérifie  $v_{2k} = u_k$ , pour  $k = 0, \dots, N - 1$ .*

**Démonstration** On a

$$v_{2k} = \sum_{-N}^{N-1} \tilde{v}_n \omega_{2N}^{2nk} = \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{nk} = u_k.$$

En effet,  $\omega_{2N}^{2nk} = \omega_N^{nk}$ . ◦

**Remarque 5.2** *Ce résultat est évident sans démonstration : en effet, on peut considérer l'unique polynôme trigonométrique de degré  $\frac{N}{2}$  passant par les échantillons  $u_k$ . Les échantillons  $v_k$  s'interprètent immédiatement comme des échantillons de ce même polynôme.*

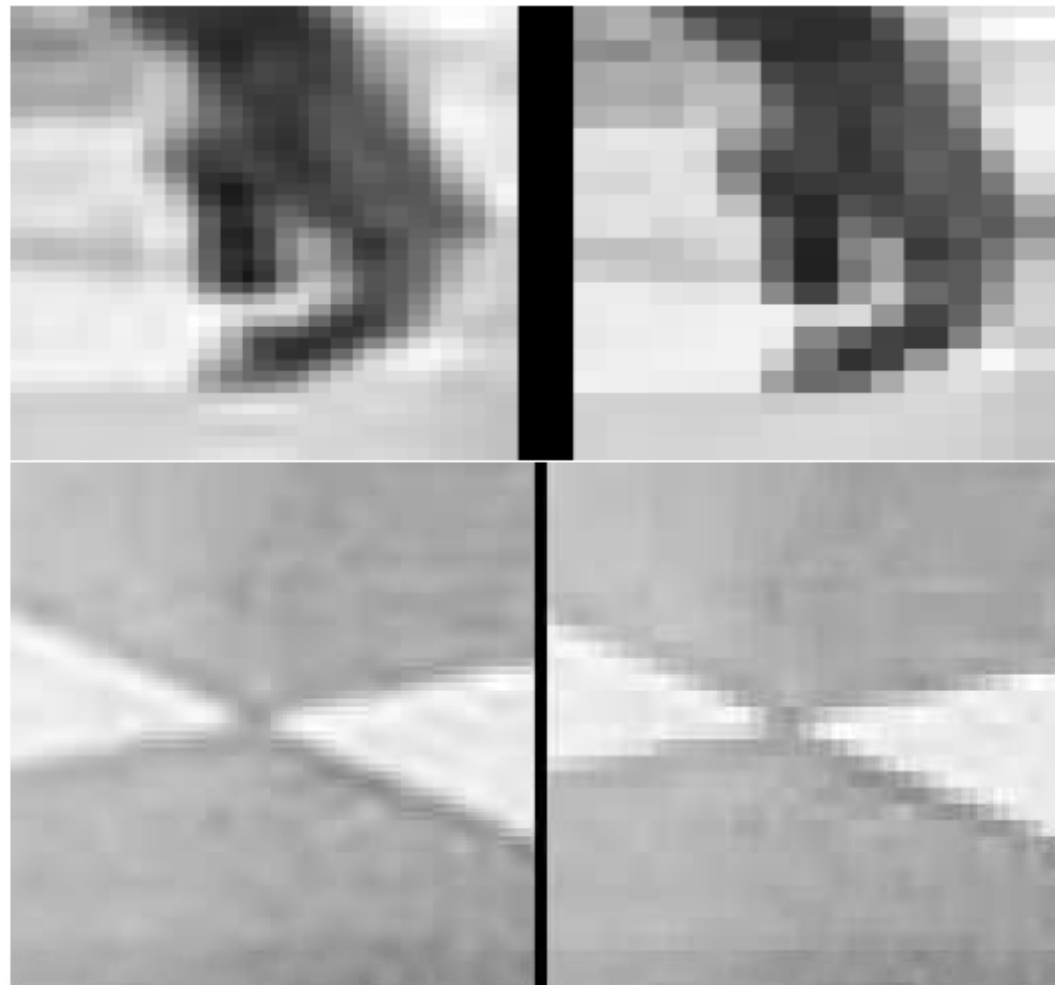


FIGURE 5.8 – détails après zoom, à gauche par TFD, à droite par réplication des pixels.



(a) Image A



(b) Image B



(c) Module de la TF de A et phase de B



(d) Module de la TF de B et phase de A

