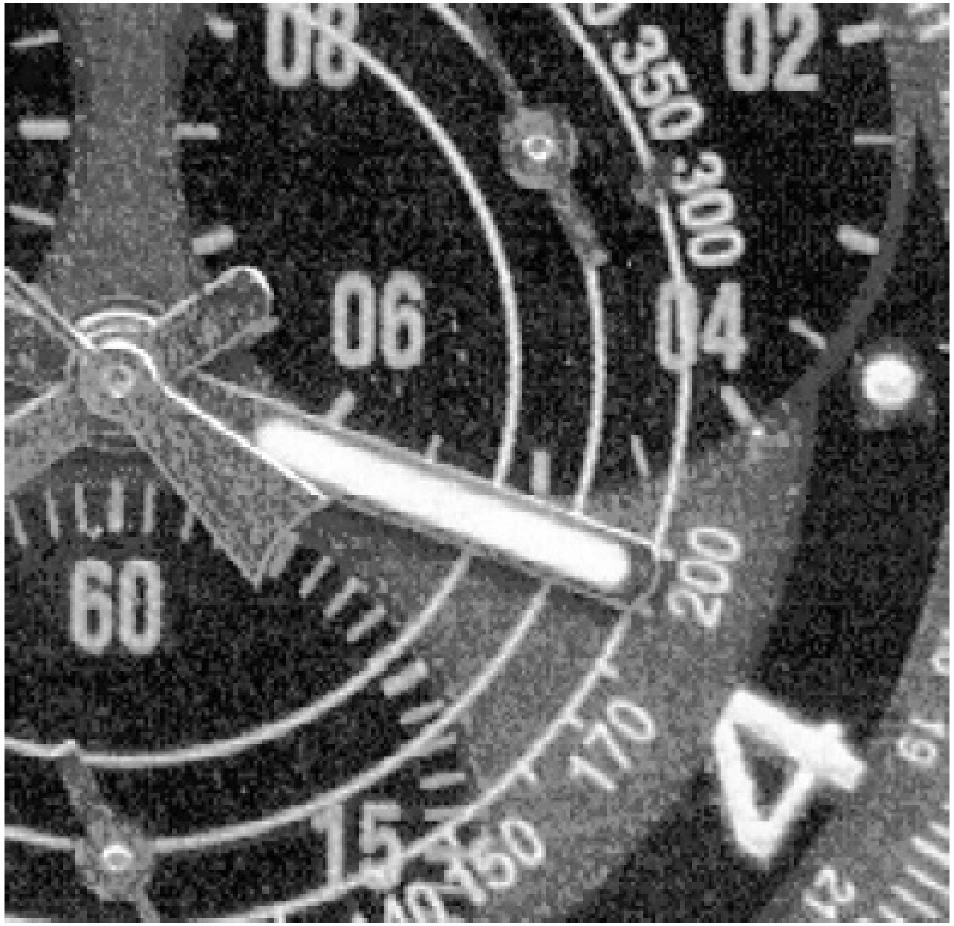
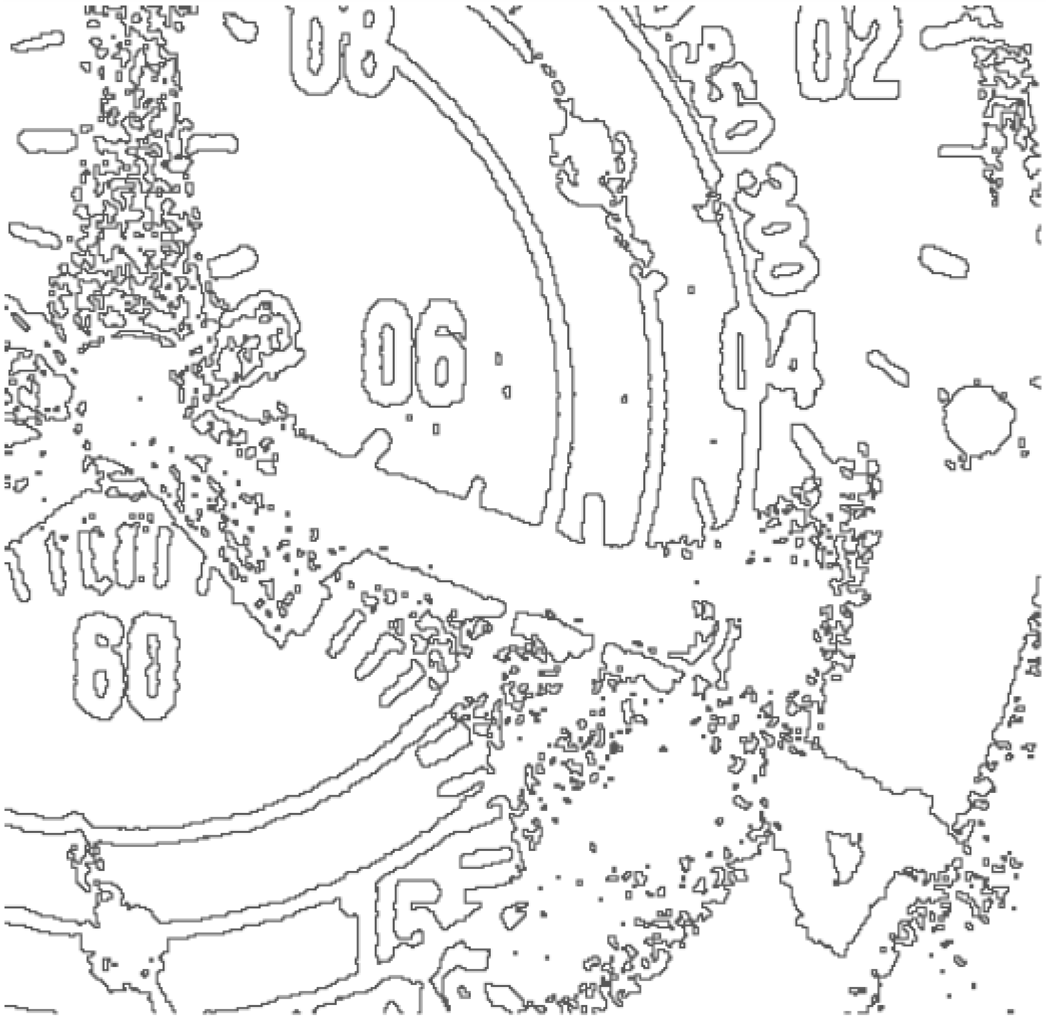
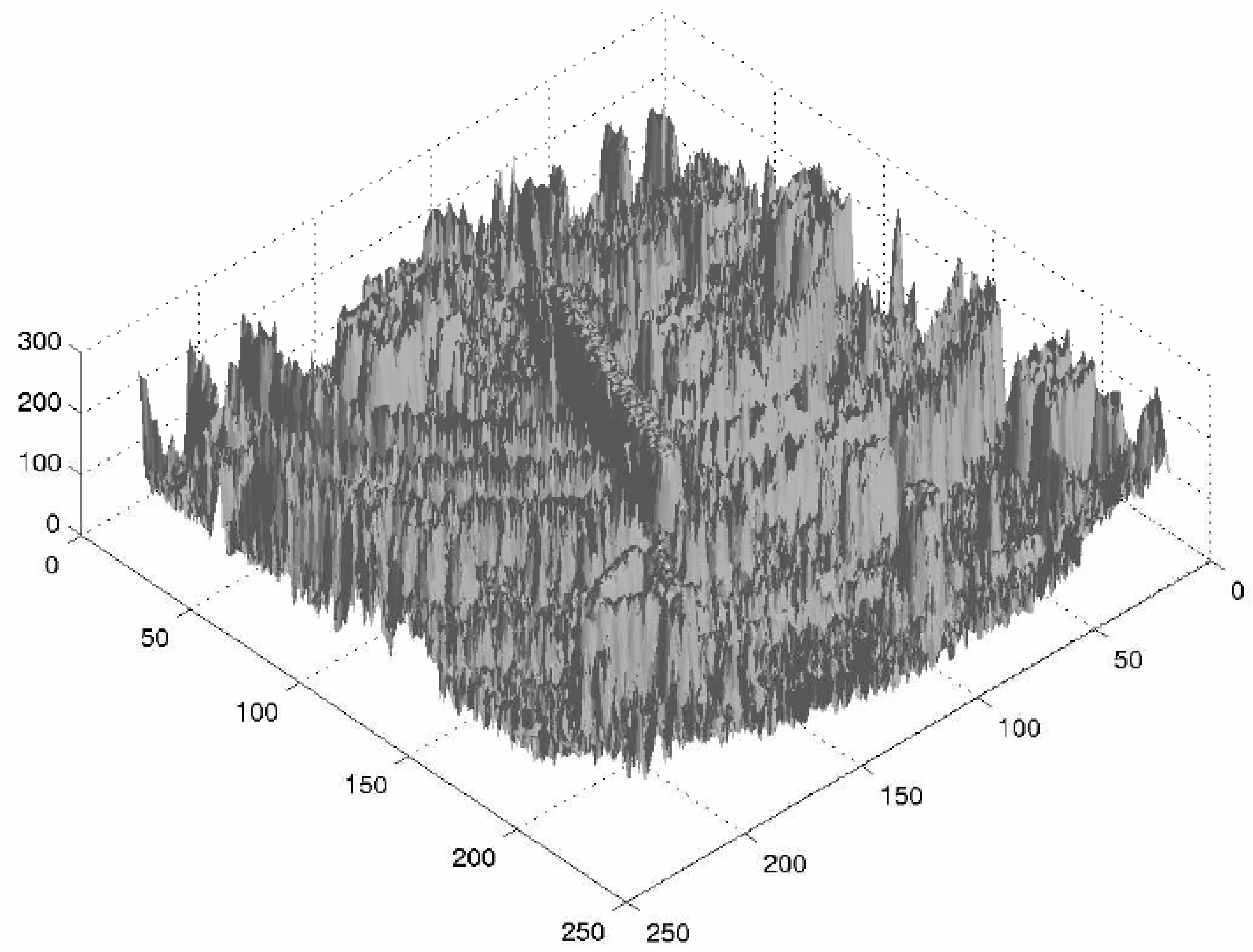

08
02
350
300
06
04
60
200
170
150
15
4


08
02
06
04
60



300
200
100
0
0
50
100
150
200
250
0
50
100
150
200
250

1862 –1943

"Wir müssen wissen
Wir werden wissen" (1930)

Espaces de Hilbert

Définition 5.1 *Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire* (u, v) *et tel que* $||u|| = \sqrt{(u, u)}$ *soit une norme pour laquelle* H *soit complet. Un espace de Hilbert hermitien est un espace vectoriel sur* C *muni d'un produit hermitien* (u, v) *c'est-à-dire vérifiant*

$$(u, v) = \overline{(v, u)}, \ (\lambda u, v) = \lambda (u, v), \ (u + v, w) = (u, w) + (v, w).$$

et tel que $||u|| = \sqrt{(u, u)}$ *soit une norme rendant* H *complet. Remarquons aussi que*

$$(u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v) \ \text{et} \ (u, v + w) = (u, v) + (u, w).$$

Exemple 5.1 *On pose $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $u = (u_1, ..., u_n, ...)$ avec $u_n \in C$ et vérifiant $\sum_n |u_n|^2 < \infty$. Muni du produit scalaire $(u, v) = \sum_n u_n \overline{v_n}$, c'est un espace de Hilbert. $L^2(\mathbb{R}^N)$, muni du produit scalaire $(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}dx$ est également un espace de Hilbert : on a vu qu'il est complet. Remarquer que $l^2(\mathbb{N})$ peut être plongé naturellement dans $L^2(\mathbb{R})$ en posant $u(x) = u_n$ si $x \in [n, n+1[$ et qu'il apparaît alors sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$. La complétude de $L^2(\mathbb{R})$ implique donc la complétude de $l^2(\mathbb{N})$.*

Nous avons toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f,g)| \leq ||f||\ ||g||.$$

Démonstration la démonstration est évidemment la même qu'en dimension finie puisqu'elle se fait dans le plan de f et g. On pose $(f,g) = e^{i\theta}|(f,g)|$ et on développe $||f + te^{i\theta}g||^2 \geq 0$, ce qui donne

$$||f||^2 + t(f, e^{i\theta}g) + t(e^{i\theta}g, f) + t^2||g||^2 \geq 0, \text{ soit}$$

$$||f||^2 + 2t|(f,g)| + t^2||g||^2 \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime que le discriminant de ce trinôme est négatif. $\circ$

La relation de Pythagore reste valable : si f et g sont orthogonaux, alors

$$||f+g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2.$$

Cette relation s'étend à une suite de vecteurs orthogonaux deux à deux, f_k. On a alors

$$||\sum_k f_k||^2 = \sum_k ||f_k||^2.$$

Grâce à la complétude, le premier membre de cette égalité, $\sum_k f_k$, est bien un élément de H si le deuxième membre est une série convergente. On a donc

Proposition 5.2 *Soit H un Hilbert et u_n une suite d'éléments de H. Si la série u_n est composée d'éléments orthogonaux deux à deux et si $\sum_n ||u_n||^2$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ converge dans H. Si la série de terme général $||u_n||$ est convergente, la série $\sum_n u_n$ converge dans H.*

Démonstration Les deux convergences découlent de la complétude de H. En effet, dans le premier cas, la suite $v_k = \sum_0^k u_n$ est de Cauchy puisque pour $k \geq l$, par le théorème de Pythagore, $||v_k - v_l||^2 = \sum_{l+1}^k ||u_n||^2$. Dans le second cas, elle est également de Cauchy puisque, par l'inégalité triangulaire, $||v_k - v_l|| \leq \sum_{l+1}^k ||u_n||$. $\circ$

Théorème 5.1 *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé et non vide de H. Pour tout $f \in H$ il existe un unique point de C, appelé* projection de f sur H *dont la distance à f soit minimum. Cette projection se caractérise comme l'unique point g de C tel que*

$$\forall h \in C,\ \mathrm{Re}(f-g, h-g) \leq 0. \tag{5.1}$$

Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H, la projection de f est l'unique point $g \in C$ tel que $f-g$ soit orthogonal à tous les éléments de C.

Lemme 2.1 *(identité du parallélogramme). La somme des carrés des longueurs des cotés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.*

$$||u||^2 + ||v||^2 = \frac{1}{2}(||u+v||^2 + ||u-v||^2).$$

Démonstration du théorème 5.1 Montrons d'abord l'unicité. S'il existait deux éléments g_1 et g_2 réalisant la projection de f sur C, on aurait en considérant leur milieu $\frac{g_1+g_2}{2}$ et en appliquant l'identité du parallélogramme à $u = f - g_1$ et $v = f - g_2$,

$$\frac{1}{2}||2f - (g_1 + g_2)||^2 = ||f - g_1||^2 + ||f - g_2||^2 - \frac{1}{2}||g_1 - g_2||^2.$$

Donc $||f - \frac{g_1+g_2}{2}||^2 < d(f, C)^2$. Mais comme $\frac{g_1+g_2}{2}$ est dans C, c'est impossible.

On montre maintenant l'existence de la projection. Soit g_n une suite de C telle que $||f-g_n|| \to d(f,C)$. En utilisant de nouveau l'inégalité du parallélogramme,

$$\frac{1}{2}||g_n - g_m||^2 = ||f - g_n||^2 + ||f - g_m||^2 - 2||f - \frac{g_n + g_m}{2}||^2.$$

Quand n et m tendent vers l'infini, le membre de droite tend vers 0. En effet, $||f-g_n||$ et $||f-g_m||$ tendent vers $d(f,C)$ et on a $-2||f-\frac{g_m+g_n}{2}|| \leq -2d(f,C)$, puisque $\frac{g_m+g_n}{2}$ appartient à C.

La suite g_n est donc de Cauchy et converge vers un élément g de C, car C est fermé. Donc $||f-g_n|| \to ||f-g||$ et donc $||f-g|| = d(f,C)$. Montrons l'inégalité

Pour tout $h \in C$, et $t \in [0,1]$, les points $g + t(h-g)$ du segment $[g,h]$ appartiennent à C. On a donc

$$\forall t \in [0,1],\ ||f-g||^2 \leq ||f-g-t(h-g)||^2 \text{ ce qui est équivalent à} \tag{5.2}$$

$$\forall t \in [0,1],\ t^2||h-g||^2 - 2t\mathrm{Re}(f-g, h-g) \geq 0.$$

On divise par $t > 0$ et on fait tendre t vers 0^+ pour obtenir (5.1). Réciproquement si (5.1) est vérifiée pour tout $h \in C$, (5.2) aussi et en faisant $t = 1$ on voit que $||f-g||$ réalise la distance minimale de f à un point de C.

Considérons pour terminer le cas où C est un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit g la projection de f. Pour tout v dans C, $g + e^{i\theta}v$ appartient à C. On a donc $\mathrm{Re}(e^{i\theta}(v, g-f)) \leq 0$ pour tout θ et donc $(v, g-f) = 0$. Réciproquement, si $g \in C$ vérifie $(v, g-f) = 0$ pour tout $v \in C$, on a $(v-g, g-f) = 0$ pour tout v dans C et par la deuxième partie du théorème 2.1, g est bien la projection de f sur C. $\circ$

Définition 2.2 *On appelle orthogonal d'un sous-ensemble A de H et note $A^\perp$ l'ensemble*

$$A^\perp = \{v, \forall f \in A,\ (v, f) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de H.

Corollaire 2.1 *Si F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, alors tout élément de H se décompose de manière unique sous la forme*

$$f = g + h, \; g \in F, \; h \in F^{\perp} \tag{2.3}$$

où g est la projection de f sur F et h la projection de f sur $F^{\perp}$. On a donc

$$H = F + F^{\perp}, \; (F^{\perp})^{\perp} = F, \; H^{\perp} = \{0\}. \tag{2.4}$$

Si $A \subset H$, on a toujours

$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$

Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H, la projection de f est l'unique point $g \in C$ tel que $f - g$ soit orthogonal à tous les éléments de C.

Démonstration La relation (2.3) est une conséquence du théorème 2.1. Par (2.1), la projection g de f sur F est caractérisée par le fait que $f - g = h \in F^{\perp}$. Comme $f - h = g \in F \subset F^{\perp\perp}$, h est par cette même caractérisation la projection de f sur $F^{\perp}$. On a donc $H = F \oplus F^{\perp}$. Montrons que $F = F^{\perp\perp}$. On a immédiatement $F \subset F^{\perp\perp}$. Donc la décomposition $f = g + h$ sur F et $F^{\perp}$ est aussi une décomposition sur $F^{\perp\perp}$ et $F^{\perp}$. $F^{\perp}$ étant fermé, cette dernière décomposition est unique. Or si $f \in F^{\perp\perp}$ on a $f = f + 0$ qui est une décomposition sur $F^{\perp\perp}$ et $F^{\perp}$. Par identification on obtient $f = g$ et donc $f \in F$.

Corollaire 2.1 *Si F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, alors tout élément de H se décompose de manière unique sous la forme*

$$f = g + h, \; g \in F, \; h \in F^{\perp} \tag{2.3}$$

où g est la projection de f sur F et h la projection de f sur $F^{\perp}$. On a donc

$$H = F + F^{\perp}, \; (F^{\perp})^{\perp} = F, \; H^{\perp} = \{0\}. \tag{2.4}$$

Si $A \subset H$, on a toujours

$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$

On remarque enfin que $A^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}^{\perp}$. En effet, si un élément f est orthogonal à A, il est orthogonal aux combinaisons linéaires d'éléments de A et donc à $\mathrm{Vect}(A)$ et par un passage à la limite immédiat à $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$. Utilisant (2.4), on obtient alors

$$(A^{\perp})^{\perp} = (\overline{\mathrm{Vect}(A)})^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$

$\circ$

Corollaire 5.2 et définition *On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est total si l'espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(A)$ *engendré par A est dense dans H. Pour que A soit total dans H, il faut et il suffit que $A^\perp$ soit réduit à $\{0\}$.*

Démonstration Si A est total, $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$ est égal à H et donc $A^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(A)}^\perp = H^\perp = \{0\}$. Réciproquement, si $A^\perp = 0$, on a $\overline{\mathrm{Vect}(A)}^\perp = \{0\}$ et donc par (5.4) $\overline{\mathrm{Vect}(A)} = H$, ce qui signifie que A est total. ○

Théorème 5.2 *(Riesz) Pour tout $f \in H$, l'application $v \in H \to (v, f)$ est une forme linéaire continue sur H. Réciproquement, si $\tilde{f}$ est une forme linéaire continue sur H, il existe un unique élément $f \in H$ tel que*

$$\tilde{f}(v) = (v, f).$$

En d'autres termes, H est son propre dual. Il est donc aussi le dual de son dual, propriété que l'on appelle la réflexivité.

Théorème 2.2 *(Riesz) Pour tout $f \in H$, l'application $v \in H \to (v, f)$ est une forme linéaire continue sur H. Réciproquement, si $\tilde{f}$ est une forme linéaire continue sur H, il existe un unique élément $f \in H$ tel que*

$$\tilde{f}(v) = (v, f).$$

Démonstration La première assertion découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrons la réciproque. Soit $\tilde{f}$ une forme linéaire continue et non nulle sur H et L son noyau, qui est un espace vectoriel fermé. Comme $\tilde{f} \neq 0$, L est un sous-espace propre de H (c'est-à-dire strictement inclus dans H). Comme L est fermé, par la relation (5.4) $L^{\perp}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $g \in L^{\perp}$, non nul. On a donc $\tilde{f}(g) \neq 0$ et on pose pour tout $v \in H$

$$v = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} g + (v - \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} g) = v_1 + v_2.$$

Le second terme vérifie $\tilde{f}(v_2) = 0$ et appartient donc à L. Comme $g \in L^{\perp}$, on a donc

$$(v, g) = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} ||g||^2.$$

Il en résulte que

$$\tilde{f}(v) = (v, \frac{\overline{\tilde{f}(g)}}{||g||^2} g).$$

$\circ$

Définition 5.3 *Soit un espace de Hilbert séparable. On appelle* base hilbertienne *de H un système orthonormé fini ou infini $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est total. En d'autres termes, (e_n) est une base hilbertienne si $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$ et $\overline{\mathrm{Vect}((e_n)_n)} = H$.*

Théorème 5.3 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Démonstration Soit $(f_n)_n$ une suite dense de H. On en extrait par récurrence sur n un sous-système libre (que nous appellerons encore par commodité (f_n)), c'est-à-dire tel qu'aucun vecteur de la suite n'est combinaison linéaire des autres. Le système obtenu n'est plus nécessairement dense, mais il reste total. On applique alors le procédé de Gram-Schmidt à la suite f_n. Celà veut dire qu'on pose par récurrence

$$g_1 = f_1, \ \ g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (f_{n+1}, g_k) \frac{g_k}{||g_k||^2},$$

ce qui donne un système orthogonal et on pose finalement $e_n = \frac{g_n}{||g_n||}$, ce qui donne une suite e_n orthonormée. Le système est bien total, puisque les e_n engendrent les f_n.

Théorème 5.4 *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors tout élément de H peut s'écrire comme la somme d'une série convergente*

$$f = \sum_n (f, e_n)e_n = \sum_n c_n(f)e_n \tag{5.5}$$

et les coordonnées sur la base vérifient l'égalité de Parseval

$$||f||^2 = \sum_n |c_n(f)|^2. \tag{5.6}$$

Réciproquement, si c_n est une suite vérifiant $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, la série $\sum_n c_n e_n$ converge dans H et sa somme f vérifie $c_n(f) = c_n$.

Démonstration On pose $f_m = \sum_1^m c_n(f)e_n$. On vérifie que $(f - f_m, e_n) = 0$ pour $n \leq m$. Par le théorème 5.1 des projections, cela veut dire que f_m est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les e_n pour $0 \leq n \leq m$. Par la relation (5.3) et le théorème de Pythagore, on déduit que $||f_m||^2 \leq ||f||^2$. Toujours par le théorème de Pythagore, on a donc

$$||f_m||^2 = \sum_1^n |c_n(f)|^2 \leq ||f||^2, \tag{5.7}$$

ce qui prouve que la série $\sum_n c_n(f)e_n$ est convergente dans H (proposition 5.2). Appelons g sa somme. Reste à montrer que $f = g$. Mais si $n < m$, on voit que $(f_m - g, e_n) = 0$ et en passant à la limite quand $m \to \infty$, on obtient $(f - g, e_n) = 0$. Donc $f - g$ est orthogonal à un système total et est donc nul.

Corollaire 5.3 *Tout espace de Hilbert séparable est isométrique à* $l^2(\mathbb{N})$. *Il suffit d'associer à* $f \in H$ *son vecteur de coordonnées sur une base hilbertienne,* $c = (c_1(f), ..., c_n(f), ...)$. *En particulier, on a*

$$(f, g) = \sum_n c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

5.2 Convergence faible

Définition 5.4 *On dit qu'une suite u_n dans un Hilbert converge faiblement vers $u \in H$ si pour tout $v \in H$ on a $(v, u_n) \to (v, u)$. On écrit alors $u_n \rightharpoonup u$.*

Proposition 5.3 *Si $u_n \in H$ séparable est bornée ($||u_n|| \leq C$), alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge faiblement :*

$$\forall v \in H, \ (u_{n_k}, v) \to (u, v)$$

et on a

$$||u|| \leq \liminf_n ||u_n||.$$

Démonstration On utilise l'isomorphisme avec $l^2(\mathbb{N})$ muni de la base canonique $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Par commodité on notera encore u_n une sous-suite de u_n extraite par un procédé d'extraction diagonale de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $(u_n, e_k) \to x_k$. Ceci est possible car par le théorème de Cauchy-Schwartz, $|(u_n, e_k)| \leq ||u_n|| \leq C$ est borné. Pour plus de détails sur le procédé d'extraction diagonale, voir le théorème 1.6. En appliquant le lemme de Fatou à la suite de suites (u_n, e_k), $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\sum_k x_k^2 \leq \liminf_n \sum_k |(u_n, e_k)|^2 = \liminf_n ||u_n||^2 \leq C^2.$$

Posons $u = \sum_k x_k e_k$. Alors $u \in H$ et

$$||u||^2 = \sum_k |x_k|^2 \leq \liminf_n ||u_n||^2.$$

Finalement montrons que $(u_n, v) \to (u, v)$ pour tout $v \in H$. C'est immédiat quand v est une combinaison linéaire finie des e_n et donc pour v dans un sous-ensemble dense D de H. Prenons maintenant v quelconque dans H. On fixe ε, puis $w \in D$ tel que $||v - w|| \leq \varepsilon$. On a $|(u_n - u, v)| \leq |(u_n - u, w)| + |(u_n - u, w - v)|$. Le premier terme est petit pour n grand. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité triangulaire, le second est plus petit que $2C\varepsilon$. ◦