La solution de ce système est alors donnée par
> linsolve(A,B);

En fait, mathématiquement, le système n'a de solution que si le déterminant de la matrice A est non nul. On peut alors calculer la matrice $\mathbf{A^{-1}}$, inverse de **A**, c'est à dire telle que $\mathbf{AA^{-1}=A^{-1}A=1}$.
Dans ce cas, on a déjà **AX=B** , donc $\mathbf{A^{-1}AX=A^{-1}B}$, $\mathbf{X=A^{-1}B}$.

Exercices :
>Résoudre AX=B, où A est une matrice 50x50, dont l'élément des $i^{ième}$ ligne et $j^{ième}$ colonne est i^j, et où B est un vecteur à 50 éléments, le $i^{ième}$ étant –i. Expliquer le résultat ,en regardant avec 3 au lieu de 50.

>faire une procédure qui teste si les dimensions de la matrices A en argument sont identiques (donc si A est carrée), et renvoie true ou false (utiliser les fonctions **rowdim()** et **coldim()**).
>faire une procédure qui teste si la matrice A en argument est carrée et si elle est de même dimension que le vecteur B en argument (utiliser la fonction **vectdim()**, et ce qui précède).
>faire une procédure qui calcule le déterminant de la matrice en argument si et seulement si celle-ci est une matrice carrée (utiliser la fonction **det()**).
>faire une procédure qui renvoie l'inverse de la matrice en argument si et seulement si son déterminant est non nul (utiliser la procédure précédente, et la fonction **inverse()**).
>faire une procédure qui renvoie la solution du système (S'), si elle existe, en utilisant les procédure précédentes.

La méthode du pivot de Gauss peut aussi être employée par Maple, sur une matrice, avec la fonction **gausselim()**. Seulement, utiliser cette fonction sur la matrice carrée nxn des coefficients (appelée A ci-avant) n'est pas très utile, car on ne sait pas comment modifier B pour conserver les égalités. On peut plutôt l'utiliser sur une troisième matrice, C par exemple, de dimensions nx(n+1), où la dernière colonne correspond à B et le reste à A ; ainsi B et A sont manipulées en même temps.

Exercices :
>Utiliser **gausselim()** sur des matrices correspondant à des systèmes de 3 équations de 3 inconnues, 2 équations de 3 inconnues, 3 équations de 2 inconnues, en utilisant les mêmes données initiales, tronquées. Interprétez.

Algèbre linéaire et espaces vectoriels

Voyons maintenant quelques considérations classiques sur les espaces vectoriels : dimension, familles libres ou génératrices, bases, sous-espace engendré…

La principale fonction est **basis()**, qui donne une base de l'espace vectoriel engendré par une famille (*liste*) de vecteurs (de même dimension).

On rappele que
- la dimension **n** de l'espace initial est nécessairement la dimension commune des **k** vecteurs de la famille.
- la dimension **l** de l'espace engendré est exactement le nombre de vecteurs de la base de celui-ci.
- si une famille est liée, la dimension **l** de l'espace qu'elle engendre est < au nombre **k** de vecteurs qu'elle contient.
- si elle est libre, la dimension **l** de l'espace qu'elle engendre est = au nombre **k** de vecteurs qu'elle contient.
- si une famille est génératrice, la dimension **l** de l'espace qu'elle engendre est = à la dimension **n** de l'espace initial.
- Si elle ne l'est pas, la dimension **l** de l'espace qu'elle engendre est < à la dimension **n** de l'espace initial.

Exercices :
>En utilisant **nops()** et **basis()**, écrivez 3 procédures qui donnent le nombre de vecteurs d'une famille de vecteurs, la dimension de l'espace initial et la dimension de l'espace engendré.
>Après une synthèse des rappels ci-dessus, écrivez des procédures qui indiquent si une famille de vecteurs est libre, liée, génératrice ou non, et si c'est une base. Vérifiez dans les 4 cas de figure possibles.

Maple TD 5

Infos diverses

Suite aux travaux de désamiantage, le SCRIPT sera fermé du 20 au 26 novembre. Il n'y aura donc pas de cours/TD le 21 novembre.
L'examen partiel est programmé pour le 28 novembre, même salle. Le groupe sera dissocié en 2 sous-groupes pour un examen d'une heure chacun, afin de disposer d'un ordinateur par étudiant(e). Documentation autorisée : les feuilles de TD (pas les corrections de TD), avec très peu d'annotations (corrections des erreurs des documents).

Sujet de ce TD :
Algèbre linéaire, matrices, espaces vectoriels…

Généralités
Systèmes d'équations linéaires
Algèbre linéaire et espaces vectoriels

Généralités

L'ensemble des fonction d'algèbre linéaire doit être chargé dans Maple à l'aide de l'instruction

```
> with(linalg);
```

Un vecteur est défini comme suit :

```
> vector([x1,x2,x3,x4]);
> vector(4);
> vector(4,0);
> f:=i->(-1)^i; vector(4,f);
```

Le i$^{\text{ème}}$ élément du vecteur V est **`V[i]`** (comme pour un tableau).
La syntaxe est semblable pour les matrices :

```
> matrix(2,2,[x1,x2,x3,x4]);
> matrix(2,2);
> matrix(2,3,0);
> matrix([[1,2],[3,4]]);
> matrix(2,3,[1,2,3,4,5,6]);
> f:=(i,j)->(-1)^(i+j); matrix(3,3,f);
```

L'élément à la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M est **`M[i,j]`** ; la i$^{\text{ème}}$ colonne est **`col(M,i)`**, et la i$^{\text{ème}}$ ligne est **`row(M,i)`**.
Vous pouvez intervertir les lignes avec **swaprow()**, les colonnes avec **swapcol()**, extraire un vecteur avec **subvector()** Le produit de la matrice A par la matrice B est **`A&*B`**, différent de **`B&*A`** (sous réserve de compatibilité de dimensions). On évalue cela par **`evalm()`**.
La multiplication de la matrice M par le scalaire a est **`M*a`** ou **`a*M`**. Et la somme des matrices de même dimension A et B est **`A+B`**.

Systèmes d'équations linéaires

Considérons le système (S) d'équations linéaires suivant :

```
ax+by+cz=m
dx+ey+fz=n
gx+hy+iz=o
```

Notons X le vecteur **`[x,y,z]`**, B le vecteur **`[m,n,o]`**, et A la matrice

```
[a  b  c]
[d  e  f]
[g  h  i]
```

(S) peut alors se noter (S') : **`AX=B`**.