MI 101 Maple
Variables - Arithmétique - Complexes

Feuille de TD numéro 2 v. 2 - jeudi 11 octobre

Table des matières

1 Infos diverses

- Le site web n'est pas encore disponible... Probablement bientôt... A suivre... (désolé)
- Après examen détaillé, la version Démo gratuite de Maple (voir doc. semaine 1) est restreinte dans une proportion non négligeable, notamment dans ses fonctionnalités, et dans l'aide; Essayez plutôt d'utiliser Maple dans le cadre des logithèques.
- Voici une nouvelle version, plus claire, du planning de cours et examens[1].

04 octobre	Présentation et utilisation du logiciel
11 octobre	Variables - arithmétique - nombres complexes
18 octobre	Polynômes - listes et ensembles
25 octobre	Suites et séries
01 novembre	*Férié*
08 novembre	Programmation
15 novembre	Fonctions - résolution d'équations
29 novembre	Géométrie affine
06 décembre	Algèbre linéaire
13 décembre	Graphiques
20 décembre	Etudes de fonctions
03 janvier	*Vacances*
10 janvier	Dérivation et intégration
17 janvier	*Séance libre, selon avancement du cours*

[1] Il n'y a qu'un examen final, mais celui-ci peut avoir lieu le 24 ou le 31 janvier, selon le groupe.

25 octobre	QCM n°1 - sujet du devoir n°1
15 novembre	Remise du devoir n°1
22 novembre	*Examen intra*
20 décembre	QCM n°2 - sujet du devoir n°2
17 janvier	Remise du devoir n°2
24 janvier	*Examen final*
31 janvier	*Examen final*

2 Variables

Comme cela a été évoqué lors de la première séance, Maple manipule des variables, c'est-à-dire des objets mathématiques qui peuvent être bien définis, et avoir une valeur, ou indéfinis et abstraits.

Une variable est composée d'un nom associé à un contenu. Le nom peut être n'importe quelle chaîne de caractères, et Maple fait la différence entre majuscules et minuscules. Le contenu peut être vide (alors la variable est indéfinie, ou non affectée). S'il ne l'est pas, la variable peut contenir n'importe quel objet Maple, une valeur, une fonction, une suite d'objets, ..., et Maple remplace automatiquement la variable par son contenu lorsqu'il la rencontre.

Le contenu d'une variable `a` peut faire référence à une autre variable `b`, comme dans `a:=2*b`; dans ce cas, `a` est créée en utilisant `b` telle que celle-ci existe au moment de la définition de `a`, et ne change pas ensuite si on modifie `b`. Plus clairement, si on définit `a` en faisant référence à `b`, Maple étudiera ce que contient `b`; si `b` est définie, Maple remplace `b` par son contenu dans la définition de `a`, et cela ne tient plus compte, ensuite, des modifications de `b`.

Les variables sont 'créées' ou 'détruites' ainsi:

- On affecte une valeur (contenu) à une variable par `toto:=2`; ATTENTION : la simple égalité `=` est très différente, et vos instructions ne fonctionneraient pas.
- Pour 'vider' le contenu d'une variable, il faut faire `toto:='toto'` ou `unassign('toto')`. La commande `restart` efface toutes les variables.

Si une instruction contient une chaîne de caractères ne correspondant pas à une commande connue ou à une variable précédemment définie, Maple considère qu'il s'agit d'une variable non définie, non affectée.

3 Arithmétique en nombres entiers

Rappels :

- x est le PPCM (plus petit commun multiple) de a et b si a divise x, b divise x et si il n'existe pas de nombre x' plus petit que x qui vérifie les mêmes propriétés.
- y est le PGCD (plus grand commun diviseur) de a et b si y divise a, y divise b et si il n'existe pas de nombre y' plus grand que y qui vérifie les mêmes propriétés.
- Un nombre premier est un nombre entier positif qui n'a pas de diviseurs hormis 1 et lui-même.
- Deux nombres entiers positifs sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de diviseurs communs.

3.1 PPCM, PGCD, etc...

- Le quotient de la division entière est donné par la fonction `iquo()`, et son reste par `irem()`.
- Le PGCD est obtenu par `igcd()`, et le PPCM par `ilcm()`.

3.2 Nombres premiers

Maple propose plusieurs commandes dans ce domaine :

- `ifactor(x)` donne la séquence des facteurs premiers de `x`.
- `isprime(x)` vous indique si `x` est un nombre premier.
- `nextprime(x)` et `prevprime(x)` donne le premier nombre premier qui suit ou précède `x`.
- `ithprime(x)` retourne le xième nombre premier.

4 Nombres complexes

Dans Maple, le nombre complexe $a+ib$ se note `a+I*b`; `I` est la notation Maple pour le nombre imaginaire $i = sqrt(-1)$. On peut aussi utiliser la notation exponentielle, par laquelle `r*exp(I*t)` désigne le nombre complexe $r\ e^{i\ t}$ de module r et d'argument t.

On peut manipuler les nombres complexes par les fonctions Maple suivantes :

- `Re(x)` et `Im(x)` sont les parties réelles et imaginaires de `x`.
- `abs(x)` est le module de `x`, `argument(x)` est son argument, `congugate(x)` est son conjugué.
- `evalc(x)` met `x` sous la forme `a+I*b`, et permet d'expliciter les parties réelles et imaginaires.
- On utilise toujours `evalf()` pour obtenir une valeur décimale approchée.

5 Exercices

5.1 Variables

Exo 1 Définissez `c:=a**b`, pour `a` et `b` quelconques. Ensuite, avec `a` OU `b` nuls, combien vaut `c`? Et avec les deux nuls?

Exo 2 Définissez $x = 4\ y^2 - 2\ y + 1$, puis $y = \frac{x+1}{x-1}$. Que se passe-t'il? Pourquoi? Et avec $x = 2\ y + 1$ et $y = 1/2\ x - 1/2$?

Exo 3 Définissez $x1$ et $x2$,racines du polynôme $a\ x^2 + b\ x + c$, avec a et b quelconques, puis donnez leurs valeurs pour $a, b, c = \{-1, 1, 1\}$, $a, b, c = \{-1, 0, 2\}$, $a, b, c = \{2, 1, 1\}$.

5.2 Arithmétique

Exo 4 Quels sont les facteurs premiers que 16033248 et 5566176 ont en commun?

Exo 5 0 est-il un nombre premier?

Exo 6 Combien y a-t'il de nombres premiers entre 150 et 200?

Exo 7 $2^{2^n} + 1$ est-il un nombre premier? Testez avec $n = 1, 2, 3, \ldots$ Quelle est votre conclusion?

Exo 8 Je souhaite séparer 24 personnes en plusieurs groupes de même taille. Combien de configurations (taille des groupes) puis-je choisir?

5.3 Nombres complexes

Exo 9 Quelles sont les coordonnées cartésiennes et polaires du point du plan associé au nombre complexe $\frac{i(4\ i-1}{(2\ i+3)^2}$?

Exo 10 Montrez que le nombre complexe de module r et d'argument t vaut $r(\cos(t) + i\sin(t))$.

Exo 11 Si $z1 = a1 + i\ b1$ et $z2 = a2 + i\ b2$, que valent les parties réelles et imaginaires de $z1 \times z2$ et $z1 + z2$?

Exo 12 Déduisez des deux exercices précédents que $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Exo 13 Les racines nièmes de l'unité (nombres complexes z tels que $z^n = 1$) sont les nombres de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où $k \in [0 \ldots n-1]$ (elles sont donc au nombre de n). Pour $n = 5$, définissez z comme une des 5 racines cinquièmes de l'unité. Combien valent ses parties réelles et imaginaires? Existe-t'il α tel que $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$? Combien vaut la somme des 5 racines cinquièmes de l'unité?

Exo 14 Vérifiez que les points du plan associés aux nombres complexes $3i + 1$, $-i + 2$ et $7i$ sont alignés. Qu'en est-il si effectue sur ces points une dilatation de rapport $t > 0$, c'est-à-dire si on multiplie les nombres associés par $t > 0$ (utilisez éventuellement la fonction `assume()`)?

6 Corrections

Il peut être utile de faire un `restart` entre chaque exercice...

6.1 Variables

Exo 1

```
>c:=a**b;
>a:=0:c;
>a:='a':b:=0:c;
>a:=0:c;
```

Exo 2

```
>x:=4*y**2-2*y+1;y:=(x+1)(x-1);y;
```

il y a une erreur car x est défini en fonction de y qui est défini en fonction de x qui est... de y qui..., et la boucle est sans fin.

```
>restart;
>x:=2*y+1;y=1/2 x-1/2;
```

Ici, $y = 1/2(2\ y + 1) - 1/2 = y$, donc les définitions sont cohérentes.

Exo 3

```
>x1:=(-b+sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a);x1:=(-b-sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a);
>a:=-1:b:=1:c:=1:x1;x2;
>a:=-1:b:=0:c:=2:x1;x2;
>a:=2:b:=1:c:=1:x1;x2;
```

On obtient dans le dernier cas des racines complexes du polynôme.

6.2 Arithmétique

Exo 4

```
>igcd(16033248,5566176);ifactor(%);
```

Exo 5

```
>isprime(0);
```

Bah non!!

Exo 6

```
>nextprime(149);
```

Puis

```
>nextprime(%);
```

jusqu'à arriver au-delà de 200. Et on compte au fur et à mesure.

Exo 7

```
>N:=2**(2**n)+1;
>n:=1:isprime(N);
>n:=2:isprime(N);
>n:=3:isprime(N);
```

Jusque là ça marche. Mais après...

```
>n:=5:isprime(N);
```

Ca ne marche plus. donc la réponse est non.

Exo 8

```
>ifactor(24);
```

On obtient $2, 2, 2, 3$. Donc on peut faire des groupes de taille 2, 3, 2×2, 2×3, $2 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 3$ et $2 \times 2 \times 2 \times 3$, soit 7 configurations.

6.3 Nombres complexes

Exo 9

```
>Z:=(I*(4*I-1))/(2*i=3)**2;
```

Et Maple le met en forme directement (attention, ce n'est pas toujours le cas...).

Exo 10

```
>k:=r*exp(I*t);evalc(r);
```

Exo 11

```
>z1:=a1=I*b1;z2:=a2+I*b2;
>evalc(z1*z2);evalc(z1+z2);
>z1:=r1*esp(I*t1);
>z2:=r2*exp(I*t2);
>abs(z1*z2);argument(z1*z2);
>abs(z1/z2);argument(z1/z2);
```

Exo 12 D'après l'exo 10, $cos(a+b)$ est la partie réelle de $e^{i(a+b)} = e^{i\ a} \times e^{i\ b}$. $e^{i\ a} = cos(a) + i\sin(a), e^{i\ b} = cos(b) + i\sin(b)$, et les expressions des produits de nombres complexes de l'exo 11 donnent l'expression finale.

Exo 13

```
>z:=exp(I*2*k*Pi/n):n:=5:k:=3:z;
>zz:=evalc(z);
>arccos(Re(zz));arcsin(Im(zz));
>Z:=0:k:=0:Z:=Z+z;
>k:=1:Z:=Z+z;
>k:=2:Z:=Z+z;
>k:=3:Z:=Z+z;
>k:=4:Z:=Z+z;
>Z;
```

Exo 14

```
>z1:=3*i+1;z2:=-I+2;z3:=7*I;
>argument(z1-z2);argument(z1-z3);
```

Les arguments sont identiques à Pi près.

```
>assume(t>0);
>w1:=t*z1:w2:=t*z2:w3:=t*z3:
>argument(w1-w2);argument(w1-w3);
```

Ils restent alignés, bien sûr, car les argument restent identiques.