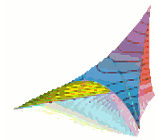

MI 101 Maple
Algèbre linéaire 1
Feuille de TD numéro 8 - jeudi 06 décembre

Table des matières

1 Infos diverses

La mise à jour du site web est toujours minimale (page d'accueil seulement).

2 Notations des vecteurs et matrices

L'objet 'matrice' existe sous Maple, avec toutes les propriétés associées. Il faut au préalable, pour l'utiliser, charger une bibliothèque (library) de fonctions spécialisées, par `with(linalg);`. Toutes les fonctions de cette bibliothèque sont détaillées dans l'aide, `?linalg`.

On peut alors définir les vecteurs par

- `V:=vector([x1,x2,x3,x4]);` pour le vecteur $M = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix}$.
- `V0:=vector(4,0);` pour un vecteur de taille 4 rempli de 0.
- `f:=t->2+2*t; VF:=vector(8,f);` pour une vecteur de taille 8 dont le iième élément vaut $2 + 2i$.

On peut également définir des matrices comme ci-après:

- Pour définir la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ \pi & \sqrt{\lambda} & \sin(\theta) \end{bmatrix}$, les deux formulations

  ```
  M:=matrix(3,3,[1,2,3,a,b,c,Pi,sqrt(lambda),sin(theta)]);
  M:=matrix([[1,2,3],[a,b,c],[Pi,sqrt(lambda),sin(theta)]]);
  ```

  sont équivalentes.
- On peut aussi définir une matrice unité de taille 5×5 par `MI:=matrix(...)` et une matrice de taille 7×4 remplie de 9 ou de a par `M4:=matrix(7,4,9);` et `MA:=matrix(7,4,a);`.

- On peut enfin définir une matrice par une formulation indiquant chacun des coefficients en fonction de la ligne et de la colonne correspondante par

```
f:=(i,j)->(-1)**(i+j); MF:=matrix(3,3,f);
```

ou directement

```
MF:=matrix(3,3,(i,j)->(-1)**(i+j));
```

, où la première variable de la fonction f correspond à la ligne et la seconde à la colonne du coefficient déterminé.

3 Manipulation des matrices

Sous réserve de dimentions compatibles, les matrices (de même que les vecteurs) manipulées aisément : on obtient leur somme par `A+B`, leur produit par `A*B`, le produit d'une matrice par un scalaire par `a*M`. On a aussi la puissance `M**2`, `M**n`.

On obtient la dimension d'un vecteur par `vectdim()`, et celles d'une matrice par `rowdim()` et `coldim()`.

On peut également transposer une matrice (symétriser par rapport à la diagonale) par `transpose(M)`, obtenir son déterminant par `det(M)` et sa trace par `trace(M)`, et l'inverser par `inverse(M)` (lorsque cela est possible, bien entendu).

ATTENTION : si on définit, par exemple `C:=A*B`, Maple 'garde en mémoire' le fait que C soit le produit de A et B, afin de gagner du temps lors de simplifications ultérieures, et vous répond $A.B$ si vous demandez l'affichage de C. On obtient l'affichage 'complet' de C, avec chacune de ses valeurs, avec la commande `evalm(C)`.

4 Résolution de système linéaire

On a vu lors de la séance précédente des outils destinés à la résolution de systèmes d'équations; dans le cas de systèmes d'équations linéaires, le problème mathématique est plus simple et peut se formuler sous forme matricielle: le systèmes de 3 équations à 3 inconnues x, y et z, et où a, b, c, ..., m, n et o sont des paramètres du système

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = o \end{cases}$$

est totalement équivalent à l'équation à une inconnue X

$$A.X = B$$

où X est une inconnue vectorielle de dimension 3 et A et B sont des paramètres de l'équation,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} m \\ n \\ o \end{bmatrix}.$$

Si A est inversible (ie s'il s'agit d'une matrice carrée à déterminant non nul), alors on peut écrire

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}.B$$

ce qui nous donne la solution de d'équation matricielle et simultanément celle du système d'équations.

Maple résout un système (supposé cohérent en dimentions) $A.X = B$, d'inconnue X, par la commande `linsolve(A,B)`. On obtient la solution du système linéaire, qui peut dépendre d'éléments de A ou B si ces deux matrices ne sont pas composées que de constantes.

5 Exercices

Exo 1
Définissez à l'aide d'une fonction une matrice carrée de taille 5 dont tous les éléments sont nuls sauf deux de la diagonale qui valent 1 (une matrice identité, quoi). De la même manière, définissez une matrice carrée dont seuls les éléments au-dessus de la diagonale sont non nuls et valent 1.

Exo 2
Définissez la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *puis vérifiez que* $M^5 = M$. *Expliquez alors (avec de la logique) que* $M^4 = I$ *et que* $M^{-1} = M^3$, *puis vérifiez-le. 'Devinez' alors combien vaudra* M^{125}.

Exo 3
Définissez 2 matrices carrées de même taille A *et* B, *et vérifiez que vous avez bien*

- $A + B = B + A$
- $A.B \neq B.A$
- $(A.B)^t = B^t.A^t$
- $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ *(si* A *et* B *sont inversibles)*
- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $\det(A.B) = \det(A)\det(B)$

Exo 4
Si A *est une matrice et* A^t *sa transposée, alors on peut définir* As *et* Aa *deux matrices telles que* $A = As + Aa$, As *étant symétrique* (As=As^t) *et* Aa *antisymétrique* ($Aa = -Aa^t$). *Ces deux matrices sont données par* $As = 1/2(A + A^t)$ *et* $Aa = 1/2(A - A^t)$. *Définissez deux procédures, prenant une matrice en argument, et renvoyant respectivement la composante symétrique et la composante antisymétrique de cette matrice.*

Exo 5
Définissez la matrice $R = \begin{bmatrix} \cos(r) & \sin(r) \\ \sin(r) & -\cos(r) \end{bmatrix}$, r *étant indéterminé, et vérifiez que* $\det(R) = 1$, *quel que soit* r. *déterminez ensuite, avec solve, les valeurs de* r *telles que* $R^4 = I$.

Exo 6
Résolvez $A.X = B$, *où* A *est une matrice carrée de taille 50 dont l'élément à la iième ligne et jième colonne vaut* i^j, *et où* B *est une vecteur de taile 50 où le iième élément vaut* $-i$. *Expliquez le résultat, en regardant en taille 3 au lieu de 50.*

Exo 7
Résolvez le système

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ a + lb + c = 0 \\ a + b + l^2 c = 1 \end{cases}$$

où les variables sont a, b *et* c, *et où* l *est un paramètre non déterminé. Affichez ensuite graphiquement les valeurs de* a, *de* b *puis de* c *en fonction de* l.

6 Corrections

Exo 1

```
fi:=(i,j)->if i=j then 1 else 0 fi; I5:=matrix(5,5,fi);
ft:=(a,b)->if a>=b then 1 else 0 fi; TS5:=matrix(5,5,ft);
```

Exo 2

```
M:=matrix([[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1],[1,0,0,0]]); evalm(M&**5);
```

$M = M^5 = M^4.M$, donc $M = M^4.M$ et M est inversible (testez son déterminant ...), donc $I = M.M^{-1} = M^4.M.M^{-1} = M^4$.

De même, $I = M^4 = M^3.M$, donc $M^{-1} = I.M^{-1} = M^3.M.M^{-1} = M^3$. On a alors $M^{125} = M^{5^{25}} = M^{25} = M^{5^5} = M^5 = M$!!

Exo 3

```
A:=matrix([[2,7,9],[4,2,7],[3,3,1]]); B:=matrix([[1,6,3],[8,8,0],[4,7,2]]);
A+B;B+A;A*B;B*A;transpose(A*B);transpose(B)*transpose(A);...
```

Exo 4

```
matsym:=proc(M)
local S;
if coldim(M)=rowdim(M) then
S:=(A+transpose(A))/2; fi;
S;
end;
```

et

```
matasym:=proc(M)
local AS;
if coldim(M)=rowdim(M) then
AS:=(A-transpose(A))/2; fi;
AS;
end;
```

Exo 5

```
R:=matrix(2,2,[cos(r),sin(r),sin(r),-cos(r)]);
det(R);
solve(R**4=matrix([[1,0],[0,1]]),r);
```

Exo 6

```
f:=(i,j)->i**j: A:=matrix(50,50,f): f:=i->-i: B:=vector(50,f):
linsolve(A,B);
```

On comprend mieux en dimension 3 par

```
f:=(i,j)->i**j: A:=matrix(3,3,f): f:=i->-i: B:=vector(3,f): X:=vector([x,y,z]):
evalm(A*X)=B;
```

Exo 7

```
A:=matrix([[1,1,1],[1,l,1],[1,1,l**2]]); B:=vector([1,0,-1]);
S:=linsolve(A,B)
plot(S[1],l=-5..5); plot(S[2],l=-5..5); plot(S[3],l=-5..5);
```