MI 101 Maple
Limites et asymptotes - Suites
Feuille de TD numéro 10 - jeudi 20 décembre

Table des matières

1 Infos diverses

- Le devoir n°2 est à rendre au plus tard lors de la 12^{e}séance de TD.
- Le site web (`mi101.fr.st`) sera probablement remis en service durant les vacances. Si vous souhaitez en être informé(e), envoyez-moi un mail (`limare@altern.org`).
- Cette fois encore, la leçon est assez courte. Profitez-en pour poser toutes les questions nécessaires, sur le thème de la séance ou sur les thèmes précédents.

2 Limites de fonctions et d'expressions

Une seule commande Maple sert pour les limites : `limit()`.

- Pour obtenir la limite de l'expression `E` lorsque la variable libre `x` tend vers `a`, il suffit de taper `limit(E,x=a)`. Si `x` est la seule variable libre apparaissant dans `E`, on peut se contenter de `limit(E,a)`.
- Pour obtenir la limite de la fonction `f` lorsque sa variable tend vers `a`, il faut passer par l'espression de `f` évaluée en `x` : `limit(f(x),x=a)`.
- Pour la limite à droite ou à gauche, il suffit de spécifier l'option `limit(E,a,right)` ou `limit(E,a,left)`.

Maple revoie la valeur de la limite si il parvient à la déterminer, *'undefined'* si elle n'existe pas, ou un intervalle si l'expression oscille sans converger.

3 Asymptotes de fonctions

On se limitera aux asymptotes horizontales et verticales, ce qui exclut l'usage de la commande `asympt()`. On s'appuie pour cela sur les limites

- La droite d'équation $y = a$ est une asymptote pour la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (dans le repère (x, y)) ssi $f(x)$ tend vers a lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. On obtient donc les asymptotes horizontales d'une fonction `f` par `limit(f(x),x=...)`.

- La droite d'équation $x = b$ est une asymptote pour la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (dans le repère (x, y)) ssi $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers b (à droite ou à gauche). On obtient donc les asymptotes horizontales d'une fonction `f` par `limit(f(x),x=b)`. Si on ne connait pas b, on peut obtenir la liste des points de discontinuité d'une fonction à l'aide d'une commande qu'on verra à la prochaine séance.

Rappel : $+\infty$ et $-\infty$ se notent `+infinity` et `-infinity`.

4 Définition de suites

Dans tous les cas que nous rencontrerons, et pour chacune des applications envisagées, le plus simple sera de définir les suites à l'aide de fonctions; ainsi, une suite U_n sera définie comme une fonction $U : n \longrightarrow U_n$ ou $U : n \longrightarrow f(U_{n-1})$.

4.1 Définition explicite

Si on connait l'expression de U_n, alors la suite se définit très simplement. Par exemple, pour $U_n = \frac{n+1}{n-1}$, il suffit de définir `U:=n->(n+1)/(n-1)`.

4.2 Définition récursive

On peut aussi traduire de manière fonctionnelle des suites définies implicitement, en utilisant des fonctions récursives. Par exemple, pour $U_n = 1 - \frac{U_{n-1}}{2}$, on a $U_n = f(U_{n-1})$, avec $f : x \longrightarrow 1 - \frac{x}{2}$; il suffit de définir `fu:=u->1-u/2; U:=n->f(U(n-1));`.

Il reste le problème des valeurs initiales de la suite, souvent nécessaires. On peut le résoudre de deux manières:

- En effectuant des tests dans la définition de la fonction:

```
U:=n->if n=0 then 3; else f(U(n-1)); fi;
```

- En utilisant la 'table de remember', qui est beaucoup plus rapide et très simple, surtout lorsqu'on a plusieurs valeurs initiales à définir :

```
U:=n->f(U(n-1));
    U(0):=3;
```

Remarque : la commmande `rsolve()` peut, pour des cas simples ou particuliers, fournir une formulation explicite d'une fonction récursive, implicite.

5 Limites de suites

Les limites de suites posent des difficultés sous Maple.

- Pour les suites définies explicitement, comme des fonctions, il n'y a pas de problème dans les cas simples vus ici.

- Pour les suites définies récursivement ($U_n = f(U_{n-1})$), on se contentera de dire que si a est limite de la suite, alors $f(a) = a$ (le contraire est faux). On recherche alors les a qui vérifient cette propriété par `solve()`.

6 Exercices

Exo 1
Quelles sont les limites en 0 et $+\infty$ des fonctions suivantes ?

$$x \longrightarrow e^{-x}\sin(x) \quad x \longrightarrow \arctan(\cos(1/x)) \quad x \longrightarrow \frac{1}{x^3} \quad x \longrightarrow \frac{1}{x^4}$$

Exo 2
Quelles sont les limites en $+\infty$ de $\frac{\ln(x)}{x^a}$, $\frac{x^a}{b^x}$, $\frac{b^x}{\ln(x)}$, pour a et b quelconques > 0 ? Parmis ces 3 fonctions, laquelle domine laquelle en $+\infty$?

Exo 3
On définit $f : x \longrightarrow \frac{(x^2-x-6)-(x-3)}{x^2-4x+3}$. f n'est pas définie en 3. Comment fixer $f(3)$ pour que la nouvelle fonction f soit continue?

Exo 4
Quelles sont les asymptotes de la fonction f définie à l'exercice précédent?

Exo 5
Soit $U_n = (4U_{n-1}+1)/5$. Cherchez les limites possibles de U, puis calculez le 100$^{\text{e}}$terme U_{100}, pour des valeurs entières de U_0 allant de -10 à 10 (faites une boucle).

Exo 6
Suite de Fibonacci : $L_0 = 1$, $L_1 = 1$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ (elle est sensée représenter la croissance d'une population de lapins.). Calculez quelques termes, cherchez les limites possibles, observez les 1termes.

Exo 7
On considère $U_n = \frac{1}{n!}$, et $V_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$. Définissez ces suites (on peut utiliser la commande `sum()`), et déterminez leurs limites.

7 Correction

Exo 1

```
f1:=x->exp(-x)*sin(x); f2:=x->arctan(cos(1/x)); f3:=x->1/x**3;
f4:=x->1/x**4;
limit(f1(t),t=0); limit(f1(t),t=infinity);
limit(f2(t),t=0); limit(f2(t),t=infinity);[1]
limit(f3(t),t=0); limit(f3(t),t=infinity);[2]
limit(f3(t),t=0,right); limit(f3(t),t=0,left);
limit(f4(t),t=0); limit(f4(t),t=infinity);
```

Exo 2

```
a:=3; b:=7; F1:=x->ln(x)/x**a; F2:=x->x**a/b**x; F3:=b**x/ln(x);
limit(F1(z),z=infinity); limit(F2(z),z=infinity); limit(F3(z),z=infinity);[3]
```

Exo 3

```
limit(((x**2-x-6)-(x-3))/(x**2-4x+3),x=3);[4]
```

Exo 4

```
F:=((x**2-x-6)-(x-3))/(x**2-4x+3); solve(x**2-4*x+3,x);[5]
limit(F,x=1,right); limit(F,x=1,left);
limit(F,x=-infinity); limit(F,x=+infinity);
```

Exo 5

```
fu:=u->(4*u+1)/5; U:=n->f(U(n-1));
solve(f(u)=u,u);
for u0 from -10 to 10 do U(0):=u0: evalf(U(100)); od;
```

Exo 6

```
fl:=(l,ll)->l+ll; L:=k->f(L(k-1),L(k-2));[6] L(0):=1; L(1):=1;
solve(f(l,l)=l,l);
for i from 0 to 30 do L(i); od;[7]
```

Exo 7

```
U:=n->1/n!; V:=n->sum(U(k),k=0..n);[8]
limit(U(i),i=infinity); limit(V(i),i=infinity);
```

`Bonnes vacances ;o)`

[1] Il n'y a pas de limite en 0, la fonction oscille.
[2] En zéro, la limite n'est pas définie, il faut tester à droite et à gauche...
[3] Donc b^x domine x^a qui domine $\ln(x)$.
[4] C'est cette valeur que doit prendre $f(3)$ pour être continuement prolongée.
[5] On obtient les valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas définie, donc pas continue, donc auxquelles on peut trouver une asymptote verticale. Le cas de 3 est déjà étudié, et il nous reste 1.
[6] ou `L:=proc(k) option arrow, remember; f(L(k-1),L(k-2)); end;` qui sera beaucoup plus rapide.
[7] La croissance des lapins est exponentielle!!!
[8] ou `V:=n->V(n-1)+U(n); V(0):=U(0);`