MI 101 Maple
Etude de fonction - Graphiques
Feuille de TD numéro 11 - jeudi 10 janvier

Table des matières

1 Infos diverses

- Dernière leçon!! La semaine prochaine, on pourra faire une sorte de révision générale, avec des exemples de questions, etc...
- EXAMENS FINAUX : à priori, ce sera

jeudi 24	9h-11h et 11h-13h	groupe M1
jeudi 24	14h-16h et 16h-18h	groupe M3
jeudi 31	9h-11h et 11h-13h	groupe A4

- Comme pour l'examen intra, il faut décider à quelle séance vous venez; les conditions sont les mêmes que d'habitude (feuilles de TD autorisées, 1 feuille de notes perso manuscrite autorisée, 2h, ordi disponible); il y aura, comme pour l'intra, quelques questions générales, quelques exercices d'application, et quelques commandes Maple à corriger; cela comptera pour 40% de la note.
- Il peut y avoir un rattrapage, en 'oral' sur machine, si votre note est entre 8 et 10 sur 20 (40 et 50 sur 100).
- Conformément aux règlementations de l'université, la carte d'étudiant et une pièce d'identité seront obligatoires.
- Et il y a le devoir à rendre la semaine prochaine dernier délai... Des questions?

2 Etude de fonction

Voici une procédure d'étude de fonction; f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et `f` est la fonction Maple associée :

Continuité La commande `iscont(f(t),a..b)` renvoie *true* ou *false* selon que f est continue ou non sur l'intervalle $]a, b[$. La commande `discont(f(t),t)` renvoie une liste des points de discontinuité de f. Ces fonctions doivent préalablament être chargées par `readlib(iscont)` et `readlib(discont)`

Racines x est une racine de f ssi $f(x) = 0$. On trouve donc ces racines par $solve(f(t) = 0, t)$.

Points fixes x est un point fixe de f ssi $f(x) = x$. On trouve donc ces points fixes par $solve(f(t) = t, t)$.

Limites Les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, ou en leurs points de discontinuité, sont obtenues par la commande `limit(f(t),t=...)`.

Asymptotes Les asymptotes horizontales de f sont obtenues par les limites en $+\infty$ et $-\infty$, et les asymptotes verticales en étudiant les limites aux points de discontinuité de f.

Dérivées La fonction dérivée f' de f est obtenue par `D(F)`, et sa dérivée seconde par `D(D(f))` ou `D@@2(f)`.

Extrema f atteint un extremum (maximum ou minimum) en x ssi $f'(x) = 0$ et f' change de signe en x (sauf si x est à une 'extrémité', à la frontière, de l'ensemble de définition de f, mais bon... on n'envisagera pas ce cas là...). On cherche donc les racines de f', et on complète cela par l' étude du signes de f', par somple observation graphique autour de ces racines.

Graphique Le graphe de $y = f(x)$, pour x entre $x1$ et $x2$ et y entre $y1$ et $y2$ est tracé par `plot(f(x),x=x1..x2,y=y1..y2)`

3 Graphiques

IMPORTANT : il faut avant toute commande graphique charger la bibliothèque graphique de Maple, par `with(plots)`.

Lorsqu'un graphique est affiché dans la feuille de calcul Maple, une barre de menu contextuel vous permet de modifier la présentation du graphique. Il suffit, pour la faire apparaître, de cliquer sur le graphique.

- En 2D, la première zone de la barre indique les coordonnées du point où vous avez cliqué; la seconde zone présente quatre boutons permettant de modifier le style de dessin (point-par-point, lignes,...), la troisième zone présente quatre boutons permettant de modifier l'affichage des axes (en 'boite', pas d'axes, centrés en 0,...), et la quatrième zone présente un bouton permettant d'afficher un repère orthonormé, avec les deux axes à la même échelle.
- En 3D, les deux premières zone de la barre indiquent l'angle de vue du graphique, et vous pouvez le modifier; la troisième zone présente sept boutons permettant de modifier le style de dessin (lignes de niveau, points, maillage,...), la quatrième zone présente quatre boutons permettant de modifier l'affichage des axes (en 'boite', pas d'axes, positionnés en 0,...), et la quatrième zone présente un boutons permettant d'afficher un repère orthonormé, avec les trois axes à la même échelle.

Enfin, en 3D, on peut modifier l'angle de vue du dessin simplement en cliquant sur le dessin puis en déplaçant la souris sans la relacher.

3.1 Graphiques 2D et 3D classiques

La représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se fait à l'aide de `plot`. Si `f` est une fonction, ou si `p` est une expression dépendant de la variable `x`, les formulations suivantes sont équivalentes:

```
plot(f,x1..x2);
plot(f(x),x=x1..x2);
plot(p,x=x1..x2);
```

De même, pour tracer des graphes de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on utilise la commande `plot3d` semblable, avec les formulations:

```
plot3d(f,x1..x2,y1..y2);
plot(f(x,y),x=x1..x2,y=y1..y2);
plot(p,x=x1..x2,y=y1..y2);
```

On peut également calibrer l'axe vertical (particulièrement si la fonction n'est pas bornée sur l'intervalle étudiée, comme dans le cas d'une asymptote verticale), comme dans les exemples suivant:

```
plot(1/x,x=-3..3,y=-2..2);
plot(1/(x+y),x=-3..3,y=-3..3,y=-2..2);
```

De nombreuses options peuvent être ajoutées, après la/les intervalles; elles sont à spécier sous la forme ***nom=choix***, où ***nom*** est le nom de l'option, et ***choix*** l'option choisie; vous en trouverez le détail dans l'aide `?plot`, mais en voici l'essentiel:

- `style` permet de choisit le style de tracé; les choix sont `point` et `line` pour la 2D, et `hidden`, `contour`, `patch`,... pour la 3D.
- `linestyle` permet, pour la 2D, de choisir le style de ligne; les choix sont `1` pour un trait continu, `2` pour des tirets, `3` pour des points,...
- `axes` permet de choisit la présentation des axes; les choix sont `boxed`, `frame`, `normal` ou `none`.
- `scaling` permet de choisit si le repère doit être ou non orthonormé; les choix sont `constrained` ou `unconstrained`.
- `title` permet d'indiquer un titre au graphique, par `title='Le titre de votre choix'`.
- `color` permet de choisir la couleur de tracé; vous pouvez par exemple essayer `color=blue` ou `color=pink`; vous aurez plus d'infos dans l'aide `?color`.
- `numpoints` permet d'indiquer le nombre minimum de points que calculera Maple pour dessiner le graphe, et de modifier ainsi la qualité du résultat, au prix evantuel d'espace mémoire et de temps de calcul.

On peut aisément tracer simultanément plusieurs courbes ou surfaces, en regroupant les fonctions ou expressions correspondantes dans une liste; si `f1`, `f2`, `f3` sont des fonctions, et `p1`, `p2`, `p3` sont des expressions dépendant de `x`, la commande sera

`plot([f1,f2,f3],x1..x2);` ou `plot([p1,p2,p3],x=x1..x2);`,

et il en est de même pour des graphes avec `plot3d()`.

Ces listes peuvent aussi être générées par `seq`, comme dans l'exemple suivant:

```
Lst:=[seq(t*exp(x)+x**2,t=-1..3)];
plot(Lst,x=-3..3,y=-5..5);
```

Lors d'un tracé simultané de plusieurs courbes, on peut choisir un style pour chacune d'elles en utilisant des listes pour les options `style`, `linestyle`, `color`, avec par exemple `plot([sin,cos],-5..5,linestyle=[1,3],color=[black,red]);`.

3.2 Graphes implicites

On peut dessiner l'ensemble des solutions d'une équation (ou d'un système d'équations) à deux inconnues avec `implicitplot()`, et à trois inconnues avec `implicitplot3d()`. Dans ce cas, la courbe ou la surface obtenue est définie *implicitement* par la ou las équation(s).

La syntaxe de ces graphes implicites est

`implicitplot(`*`equation,intervalles,options`*`)`

, où *`equations`* est l'équation dont on souhaite afficher les solutions, *`intervalles`* est la séquence des intervalles, sur les deux variables, dans lesquelles on se place pour l'étude. Vous pouvez choisir les mêmes options que pour un `plot()` classique.

La syntaxe est la même avec `implicitplot3d()`, avec une équation à 3 inconnues, et les intervalles correspondants.

Exemples :

```
implicitplot(x**2+y**2=1,x=-2..2,y=-2..2);
implicitplot3d(x**2+y**2-z**2=1,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);
```

3.3 Courbes et surfaces paramétrées

Si on souhaite tracer une courbe paramétrée, où les coordonnées des points de la courbe sont données par les fonctions f et g, pour des valeurs du paramètre entre $t1$ et $t2$, il suffit de taper `plot([f(t),g(t),t=t1..t2]);`, ou `plot([p,q,t=t1..t2]);` si p et q sont des expressions dépendant de t. L'intervalles sur le paramètre (`t=t1..t2`) est facultative, on peut également ajouter des intervalles (du type `x=x1..x2`) pour limiter le graphique, et encore les mêmes options que précédemment.

Sa syntaxe est identique pour une surface paramétrique en 3D, en adaptant les nombre de coordonnées (3) et de paramètres (2). Pour une courbe paramétrée en 3D, on utilise toujours la même syntaxe, mais avec `spacecurve()` à la place de `plot3d`, et 3 coordonnées, et 1 paramètre.

Exemples :

```
plot([t**3-t,t**2,t=-3..3]);
plot3d([2*u*cos(v),2*u*sin(v),2*cos(2*v)],u=0..1,v=0..2*Pi);
spacecurve([(t**2+3)*sin(15*t),t**2+3*cos(15*t),t**2,t=-3..3]);
```

3.4 Graphiques géométriques

Il est possible de définir des lignes, des points, des flèches, cercles, disques, sphères, cones, icosaèdres... et de les afficher. Pour plus d'infos, reportez-vous à l'aide `?plottools`.

3.5 Animations

A titre d'exemple, voici comment afficher successivement plusieurs graphiques pour obtenir une sorte d'animation :

```
animate(t*exp(x)+x**2,x=-3..3,t=-1..2,frames=20);
```

Il existe les mêmes commandes en 3D.

4 Exercices

Exo 1
Faites l'étude de la fonction $f := t \longrightarrow \frac{(t^2-t-6)^2-(t-3)}{t^2-4t+3}$.

Exo 2
Faites l'étude de la fonction $g := t \longrightarrow e^{-(t-1)^2} - e^{-(t+1)^2}$

Exo 3
Tracez sur la même image les graphes des fonctions $f : x \longrightarrow x^t$, pour $t = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$.

Exo 4
Tracez sur la même image les graphes des fonctions $f_1 : (x, y) \longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ et $f_2 : (x, y) \longrightarrow \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Exo 5
Tracez la courbe implicite, en 2D, définie par $x^7 + 3x^2y^2 + 3y^3 = 0$, pour x entre -2 et 2 et y entre -1 et 1; pour améliorer la qualité, essayez plusieurs valeurs de l'option `numpoints`.

Exo 6
Tracez la surface implicite en 3D, définie par $x^7 + 3x^2y^3 + 3y^2z^2 + z^3 = 0$, en limitant la vue pour des valeurs des coordonnées entre -0.5 et 0.5.

Exo 7
Tracez la courbe paramétrée, en 2D, définie par $\left\{ \begin{array}{l} x(u) = 3/(u^2 - 2u) \\ y(u) = (u^2 - 3)/u \end{array} \right.$, u étant le paramètre, avec $u \in [-5..5]$.

Exo 8
Tracez la surface paramétrée, en 3D, définie par $\left\{ \begin{array}{l} x(u, v) = u\cos(v) - u\sin(v) + u \\ y(u, v) = u\cos(v) - u\sin(v) - u \\ z(u, v) = u\sin(v) + u \end{array} \right.$, u et v étant les paramètres, avec $u \in [0..2\pi]$, $y \in [0..2\pi]$.

Exo 9
Tracez la courbe paramétrique, en 3D, définie par $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sin(40t^{4/3}) \\ y(t) = (3 + \cos(40t^{4/3}))\cos(t) \\ z(t) = (3 + \cos(40t^{4/3}))\sin(t) \end{array} \right.$, t étant le paramètre, avec $t \in [0..\pi]$.

5 Correction

Exo 1
Classique : on cherche les points de discontinuité, les racines et points fixes, les asymptotes, la dérivée, les racines de f', puis on trace f et f'.

Exo 2
idem.

Exo 3
```
plot([seq(x**t,t=-5..-1),seq(x**t,t=1..5)],x=-2..2);
```

Exo 4
```
f1:=(x,y)->(x**2+y**2)**(1/2); f2:(x,y)->(x**2-y**2)/(x**2+y**2);
plot3d([f1,f2],-1..1,-1..1);
```

Exo 5
```
p:=x**7+3x**2y**2+3y**3;
implicitplot(p,x=-2..2,y=-1..1,numpoints=250);
```

Exo 6
```
q:=x**7+3x**2y**3+3y**2z**2+z**3;
implicitplot3d(q,x=-0.5..0.5,y=-0.5..0.5,z=-0.5..0.5,numpoints=500);
```

Exo 7
```
px:=3/(u**2-2u); py:=(u**2-3)/u;
plot([px,py,u=-5..5],-5..5,-5..5);
```

Exo 8
```
px:=u*cos(v)-u*sin(v)+u; py:=u*cos(v)-u*sin(v)-u; pz:=u*sin(v)+u;
plot3d([px,py,pz],u=0..2*Pi,v=0..2*Pi);
```

Exo 9
```
fx:=t->sin(40*t**(4/3)); fy:=t->(3+cos(40*t**(4/3)))*cos(t);
fz:=t->(3+cos(40*t**(4/3)))*sin(t);
spacecurve([fx,fy,fz,t=0..Pi],numpoints=800);
```