MI 101 Maple
Devoir n°1
A remettre pour le jeudi 15 novembre (version corrigée du sujet)

1 Indications diverses

Ce devoir est composé de deux parties indépendantes. Le travail en équipe est possible et même encouragé. Si nécessaire, vous pouvez

- me poser toutes les questions concernant des éclaircissements souhaités.
- utiliser Maple dans le cadre de la logithèque (voir les horaires de la salle E dans les locaux du SCRIPT, dans le même couloir que la salle de cours-TD).
- disposer éventuellement de la salle de cours-TD; consultez-moi à ce sujet.

Je vois rappelle qu'un document, manuscrit, doit être remis par personne (travail collectif stimulant oui, copie collective stérile non...), et que tout travail remis en retard aura une note réduite.

Le devoir est composé de deux exercices, indépendant, comptant chacun pour moitié. Le document rendu doit contenir les instructions Maple correspondant aux exercices; il nest pas nécessaire d'indiquer les réponses de Maple aux instructions.

Remarque : l'essentiel de devoir est expliqué avec des notations mathématiques, différentes des notations Maple; par exemple le terme x_i correspond à une définitionde l'objet x qui dépend de i, alors que la syntaxe Maple `xi` désigne un objet dont le nom est 'xi', et qui ne dépend donc pas à priori d'un autre objet appelé 'i'.

2 Polynôme d'interpolation

On souhaite construire un polynôme P passant par des points particuliers, c'est-à-dire prenant des valeurs précises pour certaines valeurs de sa variable. On va tout d'abord construire l'ensemble des couples (x_i, y_i), où y_i est la valeur que doit prendre $P(x_i)$. On définira ensuite le polynôme P correspondant, en deux étapes.

2.1 Construction des valeurs souhaitées

Construisez la liste des couples (x_i, y_i) tels que $x_i = \pi/2^i$ et $y_i = \sin(x_i)$, pour $i = 1..5$. L'ordre est important dans un couple, il faut donc que chaque couple soit une liste.

2.2 Construction des polynômes élémentaires

On considère les polynôme

$$\begin{aligned}
N_1 &= (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5),\\
N_2 &= (x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5),\\
N_3 &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5),\\
N_4 &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5),\\
N_5 &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4),
\end{aligned}$$

et $L_1 = \frac{N_1}{N_1(x_1)}$, $L_2 = \frac{N_2}{N_2(x_2)}, \ldots L_5 = \frac{N_5}{N_5(x_5)}$ ($N_i(x_j)$ signifie 'la valeur que prend le polynôme N_i lorsque sa variable est égale à x_j').

Construisez ces polynômes.

2.3 Construction du polynôme d'interpolation

On remarque que le polynôme L_1 vaut 1 en x_1 et 0 en x_2 , x_3, x_4 et x_5 (ou, dit autrement, que $L1(x_1) = 1$ et $L1(x_2) = 0,\ldots$), que L_2 vaut 1 en x_2 et 0 ailleurs, ... Construisez alors $P = y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3 + y_4L_4 + y_5L_5$. P est une somme de polynômes, donc un polynôme lui-même. Ce polynôme, appelé polynôme d'interpolation de Lagrange, vaut y_i en x_i.

Quel est son degré et combien vaut $P(x_6)$ ($x_6 = \pi/2^6$)? Comparez avec $\sin(x_6)$.

3 Intégration approchée

L'intégration approchée consiste à calculer approximativement une intégrale sans utiliser de calcul symbolique. On va ici chercher à calculer l'intégrale de $e^{\sin(1/x^2)}$, pour x entre 1 et 2. Il faut pour cela définir la fonction f associée, par l'instruction Maple `f:=(x)->exp(sin(1/x**2));`. On obtient alors $F(a)$ par l'instruction Male `f(a)`.

Le principe est le suivant : on approche l'intégrale de f entre a et b divisé en n intervalles par la somme des $h \times f(x_i)$, pour i allant de 1 à n, avec $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i \times h$; il s'agit de l'approximation classique par triangles.

3.1 Construction des x_i et $f(x_i)$

Après avoir défini f comme indiqué ci-dessus, ainsi que a, b, n (prenez $n = 10$) et h, construisez la liste des $f(x_i)$, pour $i = 1..n$, à l'aide de la commande `seq()`.

3.2 Intégration approchée

Définissez $In = 0$, puis à l'aide d'une boucle, calculez la valeur de l'intégrale approchée; au iième tour de boucle (de compteur `i`), In doit être remplacé par $In + h \times f(x_i)$. Vérifiez que le résultat est proche de `evalf(int(f(t),t=1..2))`.