PLAN D' ATTAQUE DES PROBLEMES D'OPTIMISATION

Christophe Chorro

19/05/2002
(et oui ca bosse le dimanche un prof...)

CECI EST UN DOCUMENT QUI NE REMPLACE EN RIEN LE COURS DE MONSIEUR BONNISSEAU MAIS QUI REGROUPE LES TECHNIQUES MISENT EN OEUVRE DANS LES TD 1O,11.
N'AYANT DE PLUS AUCUNE PRETENTION LITERRAIRE, JE VOUS DEMANDE DE M'EXCUSER PAR AVANCE POUR D'EVENTUELLES FAUTES D'ORTHOGRAPHE ET AUTRES LOURDEURS DE STYLE.

Contents

1 OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

PROBLEMATIQUE: on va vous demander d'étudier les éventuels extrema d'une fonctions de deux variables (si il y en a trois on fait pareil) qui se présente sous la forme $f(x,y)$ où $(x,y) \in A$ (souvent $A = \Re^2$).
Etape1: étude des dérivées premières.
Il s'agit dans un premier temps de vérifier que la fonction est différentiable et même C_2 (elle le sera toujours en utilisant les théorèmes opératoires).
On recherche ensuite les couples (x_0, y_0) tels que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \tag{2}$$

Rq: ces deux équations conduisent à la résolution d'un système 2,2 donc GARE AUX ERREURS DE CALCULS.
Etape2: Etude de la matrice hessienne
On doit étudier la forme quadratique donnée par la matrice des dérivées seconde (et qui est symétrique d'aprés le théorème de Schwartz) en tous les couples trouvés à l'étape 1.
Je rappelle juste qu'il s'agit d'étudier les valeurs propres de cette matrice.
Etape3: conclusion
Si la hessienne au point (x_0, y_0) est:

* Définie positive,on peut conclure quand à l'existence d'un MINIMUM local en (x_0, y_0) .

* Définie négative,on peut conclure quand à l'existence d'un MAXIMUM local en (x_0, y_0) .

* dans tous les autres cas et ben rien.Sauf si pour faire savant on précise que l'on a un point col lorsque une valeur propre est stricement positive et l'autre strictement négative. Dans le cas pervers ou la forme quadratique est semi définie positive (ou négative) seule une étude plus détaillée permettra de conclure (on aura souvent à utiliser un argument de convexité)(cf exercice 4 td n°10 avec le cas ab=1) .

DIVERSES REMARQUES UTILES:
Si vous avez prouvé qu'un point (x_0, y_0) est un extrémum local et qu'on vous demande si il est global il faut étudier le signe de $f(x_0, y_0) - f(x, y)$ (c'est x et y qui bougent) pour conclure.On procéde pour cela par majoration,minoration.(cf exercice 3 td n°10)
On pourra vous demander aussi de vérifier des propriétés de convexité de f. Je rapelle juste qu'une fonction de classe C_2 est convexe si la hessienne est positive en tout point, et concave si elle est négative en tout point.Et que les propriétés de convexité permettent de passer du local au global.(cf exercice 1 td n°10)

2 OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

2.1 CAS DE CONTRAINTES DE TYPE " = "

Par soucis de clarté je me place dans le cas de deux variables et je vous renvoie à l'exercice 3 du td n°11 pour voir la généralisation immédiate en trois variables.
PROBLEMATIQUE:il va toujours sagir de trouver les extrema locaux de f mais on impose en plus des contraintes sur (x,y) du type g(x,y)=0.(L'interprétation économique de la chose étant que dans la vie on ne fait pas toujours ce que l'on veut pour maximiser sa fonction d'utilité:contraintes budgétaires,mécaniques etc...)
UN OUTIL ESSENTIEL: LE LAGRANGIEN
J'utiliserai jusqu'a la fin la notation suivante :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \tag{3}$$

Etape1: condition de premier ordre
Avant tout délire mathématique on regarde si la condition g(x,y)=0 ne nous permet pas de nous ramener à un problème en une variable (cf: exercice 1 du td n°11.
Ceci étant dit généralement on procédera comme suit:

* Pour etre dans les conditions du cours on vérifie que L est une fonction C_2 de x et y et que **g** est une fonction DONT LA DIFFERENTIELLE NE S'ANNULE PAS pour les points (x,y) tels que g(x,y)=0(la contrainte sera alors dite qualifiée).

* On regarde les triplets (x_0, y_0, λ_0) qui vérifient:

$$g(x_0, y_0) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \tag{6}$$

Etape2: étude da la hessienne de L
On va étudier la hessienne de L aux points (x_0, y_0, λ_0) trouvés précédemment et plus particulièrement la forme quadratique associée. Plusieurs cas se présentent:

* Si elle est définie positive alors f aura un minimum local sous la contrainte g,si elle est définie négative un maximum local sous la contrainte g.

* Si la forme quadratique est mixte (c'est à dire les valeurs propres sont non nulles mais de signe opposé) on calcule:

$$(x, y)(D^2_{(x_0, y_0, \lambda_0)} L)(x, y)^t \tag{7}$$

  pour tous (x,y) vérifiant g(x,y)=0.
  Si la quantité est strictement positive pour tout (x,y) vérifiant g(x,y)=0 on conclut par l'existence d'un minimum local et si la quantité est strictement négative pour tout (x,y) vérifiant g(x,y)=0 on conclut par l'existence d'un maximum local .

2.2 CONTRAINTES DE TYPE " $\leq$"

On traitera dans le td n°11 l'exercice 4 en détail et si on a pas le temps voici le numéro (gratuit) pour toute réponse à vos questions existencielles:06.16.45.25.71.

3 CONCLUSION

Vous avez maintenant en main les techniques qu'il vous faudra mettre en pratique par l'etudes des td correspondants (je vous transmettrai les corrigés).
BON COURAGE POUR LES REVISION
Pour tout ceux qui aimerait poursuivre les maths (et aussi pour les autres) et se posent des questions sur leur future orientation, rendez vous après le partiel autour d'une bière pour conclure un td que j'ai eu beaucoup de plaisir à vous faire.