

Rapport de stage de MVA : Synthèse de l'image parfaite par photographie computationnelle

Briand Thibaud

31 juillet 2014

Mon stage de fin de M2 MVA a été effectué sous la direction de Pascal Monasse et de Jean-Michel Morel. Intitulé, "Synthèse de l'image parfaite par photographie computationnelle", ce stage de quatre mois s'est principalement déroulé au CMLA et dans une moindre mesure à l'école des Ponts. Il constitue une préparation à ma future thèse portant sur la "stéréoscopie à haute précision" dont le but général est de participer à la construction d'une stéréoscopie numérique haute précision à partir d'une paire d'images (et plus généralement à partir d'un nombre arbitraire d'images d'une même scène). L'objectif final est d'arriver à définir les limites effectives quand *on contrôle toute la chaîne d'acquisition à la précision maximale*, et que l'on fait du *b/h* vraiment faible, avec des images sans bruit. Ce dispositif stéréo utilise des caméras rapprochées, prenant des vues presque identiques de la scène avec un très faible bruit d'acquisition et un très faible *aliasing*, obtenu par fusion temporelle d'images.

Les équipes CMLA et IMAGINE qui proposent le sujet de thèse ont été primées récemment pour leurs acquis en stéréo-vision et en débruitage d'images par des conférences internationales et des jurys internationaux. Elles ont monté avec le CNES en 2007 le projet MISS (Mathématiques pour l'Imagerie Stéréoscopique et Spatiale) qui a permis de spécifier deux projets de satellites d'observation de la Terre créant des paires stéréo quasi-simultanées en faible *b/h*. Les travaux préparatoires à l'exploitation de **Pléiades** et un théorème fondamental explicité dans ce rapport démontrent que la limite principale à la précision en stéréoscopie est donnée par le rapport signal à bruit. Mieux, le théorème montre que la précision augmente sur-linéairement par rapport au SNR. Il est donc très important de saisir cette opportunité. Or, pour les applications portant sur la modélisation de terrain et de bâti, l'augmentation par des moyens numériques du rapport signal à bruit dans un rapport arbitraire, et la création d'images parfaites (sans *aliasing*) est possible. De plus l'équipe commune a montré dans le cadre d'un projet préliminaire de l'ANR (Callisto, 2009-2013) la faisabilité de la calibration à très haute précision de caméra, faisant ainsi sauter l'autre verrou technologique qui compromettait la transformation de la stéréoscopie en une technique à haute précision.

Durant la thèse, je mènerai les études mathématiques et numériques conduisant à la constitution d'images "parfaites" (à bruit et *aliasing* très faibles). Je ferai la théorie et la simulation de la mise en correspondance optimale entre deux images parfaites d'une paire stéréo en tentant de se rapprocher au plus près des bornes théoriques inférieures de Cramér-Rao. Je participerai également en fin de thèse à la validation du concept et de la réalisation effective d'une stéréo à haute précision.

Les deux équipes ont été récemment primées internationalement pour leurs réalisations en stéréo-vision et en traitement d'images. Les résultats de la thèse seront notamment publiés en ligne dans le nouveau journal créé par l'équipe, IPOL (*Image Processing on Line*) qui fournit pour chaque article des démonstrateurs en ligne. Des contacts sont déjà noués avec deux sociétés de haute technologie (DxO et Technicolor) qui explorent actuellement des concepts de caméras stéréoscopiques. Un transfert technologique sous forme de licences d'algorithmes est prévisible en fin de thèse.

Le but de ce stage est de se lancer sur le sujet avec tous les préliminaires que constituent lectures approfondies, formation à l'expérimentation, premières expériences, et compréhension du programme de recherches. En particulier, il est souhaité d'obtenir des premiers résultats d'expériences interprétables et permettant d'orienter le travail futur.

Je tiens à remercier chaleureusement Pascal Monasse, Jean-Michel Morel, Enric Meinhardt, Loïc Simon, Gabriele Facciolo et Carlo De Franchis pour le soutien et l'aide qu'ils m'ont apporté.

1 Résumé

La stéréoscopie permet de reconstruire à partir d'une ou de plusieurs images planes le **relief**. Ce dernier est obtenu en trouvant des correspondances entre ces images. L'incertitude d'estimation des correspondances, qui est principalement due aux erreurs contenues dans les images, se transmet à celle du relief. Il est donc nécessaire de contrôler les trois principales erreurs que sont le bruit, l'*aliasing* et l'erreur de troncature. Pour arriver aux limites de précision en stéréoscopie, il faudra travailler sur des images ayant le moins d'erreurs possibles : les images parfaites.

Durant le stage il a été mené une étude de l'erreur de troncature à travers notamment l'extension d'une théorie au cas bidimensionnel. Il a aussi été développé une méthode de construction d'image parfaite ainsi qu'un procédé expérimental pour tester la constitution de telles images. L'interprétation des résultats obtenus permet d'orienter le travail futur. Notamment, un algorithme de super-résolution permettant de faire diminuer les trois erreurs est envisageable.

Le rapport se décompose de la manière suivante. Dans un premier temps, nous motivons l'intérêt porté sur les erreurs contenues dans les images dans la section 2. La section suivante 3 présente les trois principales sources d'erreur. L'erreur de troncature est étudiée en détails dans une section à part 4. Nous présentons ensuite notre algorithme de création d'image parfaite ainsi qu'une méthode d'estimation de l'erreur contenue dans ce type d'image à la section 5. Une étude plus détaillée du recalage est faite à la section 6 avant de présenter les résultats à la section 7. Nous finissons par une description du travail futur et notamment d'un algorithme de super-résolution à la section 8.

2 Motivations

2.1 La stéréoscopie

L'enjeu de la stéréoscopie, c'est la reconstruction du monde visible en trois dimensions à partir de systèmes passifs d'acquisition de la lumière (appareil photographiques/caméras). Les travaux préliminaires de calibration des équipes du CMLA et de IMAGINE montrent qu'avec l'explosion de l'arsenal numérique applicable à une caméra, les caméras grand public de bonne qualité peuvent être converties après calibration en instruments scientifiques à haute précision.

Les deux équipes collaborent déjà avec le CNES sur l'exploitation de satellites permettant l'acquisition du sol en stéréovision par les satellites Pléiades lancés en 2012 et 2013. L'impact économique et sociétal envisageable est évident, si le projet réussit à établir les conditions technologiques d'une acquisition 3D passive fiable. Ce projet s'inscrit dans un contexte où les fabricants de caméras, de téléphones portables, de systèmes d'acquisition pour la télévision, le cinéma et les jeux, envisagent tous des systèmes d'acquisition 3D, en particulier des caméras multiobjectifs. Pour cette raison, des contacts sont déjà établis avec DxO, leader en hardware et software de restauration d'images et avec Technicolor (caméras pour le cinéma et la télévision notamment).

2.2 b/h faible et précision

Le but général de la thèse est la stéréoscopie numérique haute précision à partir d'une paire d'images (et plus généralement à partir d'un nombre arbitraire d'images d'une même scène). Le but du projet est d'arriver à définir les limites effectives quand *on contrôle toute la chaîne d'acquisition à la précision maximale*, et que l'on se place à un b/h vraiment faible, avec des images sans bruit.

Par b/h faible on entend que la distance b entre les caméras est faible par rapport à la distance h à l'objet photographié (moins de $1/10$). Les deux images de la paire stéréoscopique sont donc très semblables et la surface d'occlusion (la surface vue par l'une des caméras et cachée sur l'autre) est minime. Mais le b/h faible (qui correspond à la perception visuelle humaine quand on accommode à 1,5 mètre de distance) n'est réalisable que si toute la chaîne d'acquisition et de traitement respecte des critères de haute précision. La notion que la stéréoscopie devrait se baser sur des paires à b/h aussi faible que possible a été introduite au CNES par Bernard Rougé et ses collaborateurs [7], et se base sur une série d'arguments mathématiques et numériques [12], [8] que nous allons développer ci-dessous.

Dans la technologie actuelle, les chercheurs utilisent des b/h de toutes valeurs, y compris faibles (voir le site Middlebury de comparaison de méthodes [22]), mais sans discussion sur leurs implications sur l'erreur. Les chercheurs de vision par ordinateur n'ont pas mené l'analyse de l'impact du bruit sur le *block matching*

qui consiste à trouver des blocs similaires (selon un certain critère) dans les paires stéréo (en réalité des études sur ce sujet dues à Peyman Milanfar et ses élèves n'ont jamais été prises en compte [19]). Il en résulte que la stéréovision manque encore de la maturité scientifique et technique que lui donnera l'exploration de ses limites absolues en précision. C'est l'objet du sujet d'atteindre ces limites, de les caractériser mathématiquement, et de les réaliser par de premiers dispositifs, ~~done de renouveler le sujet.~~

2.3 Le contexte mathématique

2.3.1 Le principe d'incertitude de la stéréoscopie

Il faut signaler un dilemme d'acquisition: La précision de l'algorithme de triangulation permettant de calculer la position effective des points de l'espace est inversement proportionnelle à b/h , ce qui est de nature à effrayer les tenants d'un b/h faible.

Notons: $\tilde{u}(\mathbf{x})$ la première image (bruitée), $u(\mathbf{x}) := \mathbb{E}\tilde{u}(\mathbf{x})$ l'image idéale (sans bruit) qui serait obtenue par exposition infinie. On peut écrire $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + n_1(\mathbf{x})$ où $n_1(\mathbf{x})$ désigne le bruit. Notons $\varepsilon(\mathbf{x})$ la disparité réelle d'une image de la paire à l'autre, en un point \mathbf{x} de la première image de la paire, à savoir le déplacement apparent de ce point de la première image quand on le recherche dans l'autre. La seconde image est donc

$$v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + \varepsilon(\mathbf{x})), \quad (1)$$

et l'image observée bruitée est $\tilde{v}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + \varepsilon(\mathbf{x})) + n_2(\mathbf{x})$. Supposons par exemple, pour donner un cadre intuitif, que les deux caméras soient aériennes et pointent vers le même point X_0 du sol vu dans la première image en \mathbf{x}_0 , et que la bissectrice de l'angle formé par les axes optiques des caméras soit perpendiculaire au sol. On a alors par le théorème de Thalès $\varepsilon(\mathbf{x}_0) = 0$ et pour tout autre point \mathbf{x} de la première image,

$$h(\mathbf{x}) \simeq \frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{b/h} \quad (2)$$

où $h(\mathbf{x})$ désigne la différence de l'altitude du relief au point \mathbf{x} avec l'altitude au point de référence \mathbf{x}_0 . Cette formule est lisible de deux manières. D'une part, on voit que l'erreur sur l'altitude va être proportionnelle à $\frac{1}{b/h}$, ce qui devrait inciter à choisir un b/h fort. D'un autre côté un b/h faible (*low baseline*) garantit que $\varepsilon(\mathbf{x})$ est petit, et donc que les deux images sont très semblables et donc comparables.

Almansa, Sabater et Morel [21] (se basant sur l'analyse commencée par Delon et Rougé [8]) ont montré les relations fondamentales suivantes sur la moyenne et l'écart type de la disparité calculée en un point \mathbf{x}_0 de l'image bruitée $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + n_1(\mathbf{x})$, comparée en faisant du **block matching** avec la seconde image notée $\tilde{v}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + \varepsilon(\mathbf{x})) + n_2(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + n_2(\mathbf{x})$. La première équation [8] donne la disparité observée par *block matching* $d(\mathbf{x}_0)$ en fonction de la disparité réelle $\varepsilon(\mathbf{x})$ dans le bloc de la deuxième image utilisé dans la comparaison:

$$d(\mathbf{x}_0) \simeq \frac{\int \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) v_x(\mathbf{x}) 2\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) v_x(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}}. \quad (3)$$

La seconde formule [21] estime le terme principal de l'erreur sur $d(\mathbf{x}_0)$ causé par le bruit σ dans les deux blocs de comparaison. (Dans la même référence, des expériences sur des paires stéréographiques réelles ont confirmé que ce terme d'erreur rend compte au premier ordre de l'erreur sur la disparité, avec un b/h modéré de l'ordre de $1/6$). L'écart type de la disparité $d(\mathbf{x}_0)$ calculée par la méthode de comparaison de bloc vérifie:

$$\delta d(\mathbf{x}_0) \simeq \sqrt{2}\sigma \frac{(\int (\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) v_x(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}}{\int \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) v_x(\mathbf{x}) 2d\mathbf{x}}. \quad (4)$$

Dans ces formules, la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ est la fenêtre douce à support compact utilisée pour le block matching. Les intégrales sont 2D, et les dérivations v_x sont faites dans la direction de la ligne épipolaire, les deux images étant supposées ramenées en géométrie stéréorectifiée (dans la correspondance entre les deux images, tous les points se déplacent dans la direction de x .)

Toutefois il est important de noter sous quelles conditions d'acquisition les relations asymptotiques précédentes sont valides. La condition principale est que ε varie lentement sur le support de la fenêtre φ définissant le bloc de comparaison, et plus concrètement que sur ce bloc la distance de la disparité à sa moyenne sur le bloc, $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$, soit petite devant 1. En d'autres termes, il faut que la déformation observée

d'une image à l'autre soit le plus faible possible, ce qui est justement ce que garantit le faible b/h : quand il tend vers zéro, les deux images de la paire tendent l'une vers l'autre.

La relation (3) exprime le phénomène d'*adhérence* (appelé assez improprement en anglais *fattening*) selon lequel la disparité du centre d'un bloc est en fait une moyenne des disparités des points du bloc, pondérée par leurs gradients. Donc la disparité des points à faible gradient "adhère" à celle des points voisins à fort gradient. Dans le cas de stéréo urbaine (voir l'exemple figure 1), où souvent les toits des bâtiments sont contrastés et le sol moins, l'adhérence se traduit par un grossissement apparent des bâtiments, donc leur *fattening*.

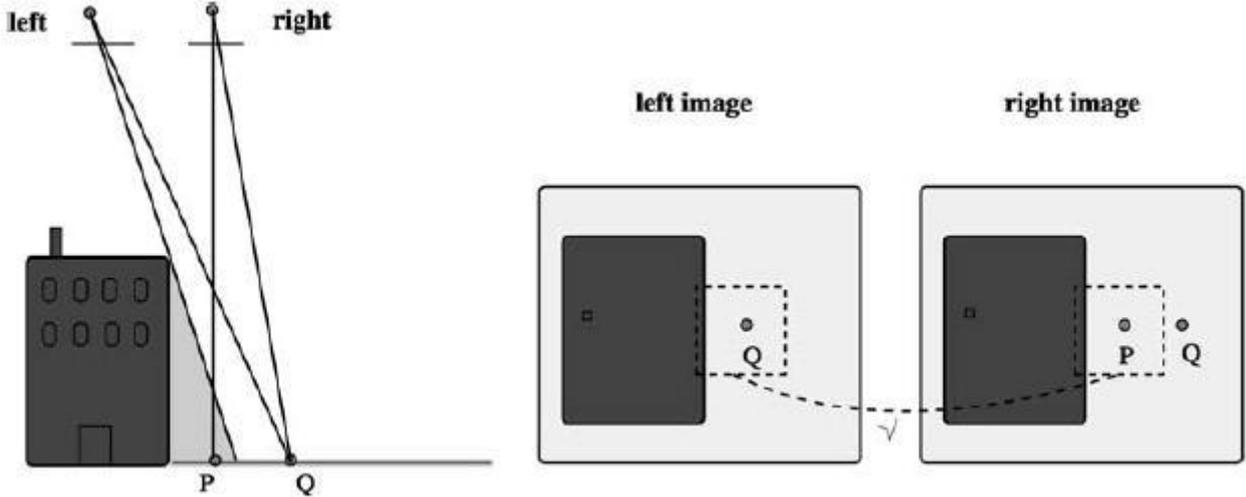


Figure 1: Exemple de l'effet de l'adhérence (par Elodie Lucas).

2.3.2 Ordres de grandeur en jeu

Il en résulte que le faible b/h est possible, mais que la condition *sine qua non* est la diminution drastique du bruit. On remarquera que la technologie classique actuelle consiste à jouer sur un autre facteur, à savoir l'écart type de la fenêtre φ . En effet la formule (4) implique que plus le support du bloc φ est grand, et plus la variance de l'erreur diminue. Pour le voir, prenons pour simplifier le cas d'un bloc défini par une fonction constante sur un carré, $\varphi(\mathbf{x}) \simeq \frac{1}{n^2}$, où n est le nombre de pixels de la fenêtre, de sorte que l'intégrale de la fenêtre est égal à 1. Alors on voit que l'équation fondamentale donnant l'erreur de disparité peut s'écrire sous forme simplifiée:

$$\delta d(\mathbf{x}_0) \simeq \frac{\sqrt{2}\sigma}{nv_x^2},$$

où v_x^2 désigne la moyenne de v_x^2 sur la fenêtre, et que finalement l'erreur sur l'altitude du point 3D vérifie grâce à (2),

$$\delta h(\mathbf{x}_0) \simeq \frac{\sqrt{2}\sigma}{b/h(nv_x^2)}. \quad (5)$$

Cette équation peut encore être précisée en prenant en compte le fait que les images bruitées $\tilde{v}(\mathbf{x})$ et $\tilde{u}(\mathbf{x})$ sont en chaque point des observations de variables de Poisson (le décompte de photons pendant un intervalle de temps de longueur t) dont la variance est donc proportionnelle à l'espérance. Introduisons une nouvelle variable cruciale, le temps d'exposition t . L'image non bruitée $u(\mathbf{x})$ est l'espérance de la valeur de l'image pour un intervalle de temps unité. On a pour l'image réelle observée et bruitée $\mathbb{E}\tilde{v}(\mathbf{x}) \simeq t\mathbb{E}u(\mathbf{x})$ et l'écart type sur $\tilde{v}(\mathbf{x})$ est $\sigma \simeq \sqrt{tv(\mathbf{x})}$. On a aussi par simple dérivation $\mathbb{E}\tilde{v}_x(\mathbf{x}) \simeq t\mathbb{E}v_x(\mathbf{x})$. Donc

$$\delta h(\mathbf{x}) \simeq \frac{1}{(b/h)nt^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{v(\mathbf{x})}}{(v_x^2)}. \quad (6)$$

Dans cette équation, nous avons tous les éléments du problème. D'abord il apparaît que la mise en correspondance entre images dépend crucialement de leur niveau de contraste dans la fenêtre et l'erreur est

inversement proportionnelle au carré du contraste mesuré par $\overline{(v)_x^2}$. C'est ce qu'indique le second terme. Nous ne pouvons influencer sur ce terme. Si une zone observée a une couleur complètement homogène (comme cela arrive par exemple avec un ciel bleu ou un bâtiment fraîchement repeint éclairé frontalement), aucune mise en correspondance n'est raisonnable. Mais de telles zones plates sont faciles à détecter. Donc nous devons nous concentrer sur le premier terme du produit, qui doit être le plus petit possible pour obtenir une grande précision sur $h(\mathbf{x})$. Cela veut dire que le dispositif d'acquisition doit réaliser une valeur de $(b/h)nt^{\frac{3}{2}}$ la plus grande possible.

Il y a dans ce produit trois termes, et nous allons examiner la possibilité de rendre l'un ou l'autre grand.

- le terme n , à savoir la taille du bloc de comparaison dans la comparaison de blocs (*block matching*). C'est le terme le plus utilisé pour désambigüer la comparaison de blocs. L'usage est d'utiliser un n assez grand, allant généralement de 5 à 10, voire plus selon le niveau de bruit et de dégradation des images. Toutefois l'usage d'un n grand a deux graves inconvénients. Le premier est le phénomène mentionné plus haut d'adhérence, qui génère un biais presque irréparable. Le second inconvénient est que plus la fenêtre est grande, plus elle risque de contenir des changements brusques de relief. Or, les formules précédentes ne sont valables que si la disparité réelle ε varie peu sur la fenêtre, nettement moins qu'une unité (mesurée en pixels). En conclusion, n doit être maintenu le plus petit possible, par exemple 3 ou 5.
- le terme b/h ne peut être rendu grand sans ruiner toute l'entreprise. En effet l'équation (2) implique que la disparité $\varepsilon(\mathbf{x})$ tend vers zéro quand b/h tend vers zéro, **ce qui est nécessaire** pour vérifier l'hypothèse $|\varepsilon - \bar{\varepsilon}| \ll 1$. De plus, si b/h est grand, le modèle que la seconde image observée est de la forme $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + \varepsilon(\mathbf{x}))$ n'est plus valide, en raison des occlusions et changements d'aspect des **surfaces** observées sous des angles trop différents.
- il en résulte que *le seul terme que nous pouvons faire croître sans aucun dommage est le temps d'observation t* . Ici, et ici seulement, nous sommes soudain dans une position très favorable. En effet l'erreur sur le relief causée par le bruit est par exemple divisée par un facteur 1000 si le temps d'exposition est multiplié par 100. Augmenter le temps d'exposition est donc la seule voie possible en stéréo et, à en juger par l'examen des ordres de grandeur, c'est une voie royale. Par exemple augmenter le temps d'exposition d'un facteur 16 permet, à précision égale, de diviser la taille n de la fenêtre d'un facteur 4, et le b/h d'un facteur 16. On passe ainsi d'un dispositif banal et mauvais de stéréo, à $b/h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et à fenêtre 12×12 , à un dispositif où l'adhérence a été réduite d'un facteur 4 et où, les images étant presque égales, on obtient une disparité à la fois plus fiable et plus dense.

2.4 Objectifs

L'analyse précédente faite sur l'équation (6) motive alors les deux objectifs principaux de la thèse décrits ci-dessous. Le stage et la suite de ce rapport portent sur le premier.

2.4.1 Faire des images parfaites

Le but est d'obtenir des paires stéréo parfaites. Par image parfaite, on entend une image SANS bruit et SANS *aliasing* obtenue par accumulation et fusion. Il s'agit d'augmenter le temps d'exposition, même pour des scènes bien éclairées et d'étendre la technique du *burst denoising* [2]. Évidemment la création d'images parfaites doit avoir un intérêt en plus de la visualisation, et c'est la précision en stéréo qui est l'enjeu le plus direct pour faire des images parfaites.

2.4.2 Évaluer la précision optimale en mise en correspondance stéréoscopique

Pour ce faire on dispose d'un outil statistique sophistiqué et qui curieusement n'a pas à notre connaissance été appliqué dans ce cadre, la borne de Cramér-Rao [19] [20]. Elle permet de fixer des bornes effectives pour la précision maximale possible de la mise en correspondance stéréo. On appliquera cette théorie à la mise en correspondance invariante par translation, cisaillement et compression pour prendre en compte les anamorphoses géométriques locales, puis on devra essayer d'atteindre cette performance par un algorithme optimal.

3 Les différentes sources d'erreur

On cherche à construire des images parfaites au sens où l'on veut obtenir des images avec le moins d'erreur possible et donc plus de fiabilité. De plus, on souhaiterait avoir un contrôle sur cette erreur et une connaissance des limites que l'on peut atteindre. Cela fournirait les premiers ingrédients de l'évaluation de la précision optimale en mise en correspondance stéréoscopique.

Expliquons dans un premier temps quelles sont ces erreurs dont nous parlons, d'où elles proviennent et comment il est possible de les corriger ou éviter. L'acquisition d'une image digitale fournit des données discrètes alors que le traitement du signal (ou de l'image) se base sur des considérations continues. En effet si l'on veut appliquer une transformation géométrique (rotation, translation, ...) à l'image digitale ou si l'on veut travailler avec une précision sous-pixelique (pour la détection de correspondance par exemple), il est nécessaire de reconstruire l'image continue sous-jacente à partir des échantillons disponibles. Cette étape d'interpolation n'est pas triviale [11] et on peut même affirmer que la reconstruction parfaite du signal continu est rendu impossible par des erreurs de différents types. Dans la suite on ne retiendra que les trois principales sources d'erreur que sont le bruit, l'*aliasing* et la troncature.

3.1 Le bruit

Une manière de concevoir le bruit dans une image est de dire que le bruit constitue toute l'information aléatoire obtenue lors de l'acquisition. Deux photographies d'une même scène sans aucun mouvement ni modification de l'illumination donneront des échantillons différents. Dans le cadre qui nous intéresse, qui est l'acquisition à l'aide d'un appareil photographique à capteur CCD ou CMOS, on peut résumer le procédé de la manière suivante. L'objet observé émet des photons qui sont convertis en charge électrique par le capteur puis stockés dans un puit de potentiel afin d'être à nouveau convertis en valeur pixelique. Les principales sources de bruit apparaissent alors à chacune des étapes [1].

3.1.1 Le photon shot noise

Le *photon shot noise* provient de la nature ondulatoire de la lumière. Le capteur compte le nombre de photon lui parvenant mais ce nombre varie aléatoirement. La distribution d'émission se modélise très bien par une distribution de Poisson (dont la moyenne et la variance sont égales).

3.1.2 Le dark current shot noise

Les photons sont ensuite convertis en charge électrique via la génération d'électrons. Cependant l'agitation thermique introduit un nombre aléatoire d'électrons supplémentaires. C'est ce que l'on appelle le *dark current shot noise* et qui se modélise par une distribution de Poisson.

3.1.3 Le readout noise

Après stockage dans le puit de potentiel une valeur de voltage est donnée pour chaque pixel. Cette valeur s'obtient par différence de potentiel avec une référence correspondant à l'absence de lumière. Encore une fois l'agitation thermique perturbe la lecture de la valeur. C'est ce que l'on appelle le *readout noise* et qui se modélise par une gaussienne de moyenne nulle.

3.1.4 La quantification

Enfin le voltage est quantifié ce qui donne une erreur additive indépendante de la valeur considérée et suivant une distribution uniforme sur $[-0.5, 0.5]$ d'écart-type $\frac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.29$. Cette valeur est à mettre en comparaison avec le nombre de bits utilisés lors de la quantification. Par exemple en utilisant 16 bits au lieu de 8 bits on divise le bruit de quantification par un facteur 256.

3.1.5 Modélisation simplifiée et traitement du bruit

Finalement, si l'image continue sous-jacente (non aliasée) est u alors on peut écrire que l'échantillon obtenu $\tilde{u}(x, y)$ au point (x, y) comme la somme $\tilde{u}(x, y) = u(x, y) + n(x, y)$. Le bruit s'écrit $n(x, y) = g(x, y) + q(x, y)$ où g représente la contribution du *photon shot noise*, du *dark current shot noise* et du *readout noise* et q celle du bruit de quantification (somme de variable aléatoire indépendante). Sa moyenne

est nulle si bien que $\mathbb{E}(\tilde{u}(x, y)) = u(x, y)$. On peut approximer $g(x, y)$ par une gaussienne de moyenne nulle dont la variance dépend de la valeur sous-jacente $u(x, y)$ (donc du temps d'exposition) et de la caméra. On notera que ce modèle de bruit va un peu plus loin que celui utilisé pour obtenir l'équation (6).

Pour réduire le bruit lors de l'acquisition on peut dans un premier temps augmenter le temps d'exposition (pour g) et le nombre de bits (pour q). Comme l'augmentation du temps d'exposition peut entraîner des phénomènes de saturation dans les zones fortement éclairés, on simule cette augmentation par accumulation et fusion. Il s'agit d'acquérir une série d'images $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N$ (qui sont bien recalées les unes par rapport aux autres !) et donc de multiples réalisations de la même variable aléatoire. La loi forte des grands nombres nous assure même que la moyenne tend (presque sûrement) vers son espérance qui est l'image continue sous-jacente u . Le bruit voit son écart-type divisé par la racine du nombre de réalisations \sqrt{N} . Lors de l'expérimentation nous essaierons de retrouver cette variation.

Évidemment il existe de nombreux algorithmes de débruitage [3] pouvant fournir de très bon résultat mais ces derniers peuvent modifier voire détruire de l'information (par exemple les détails contenus dans les hautes fréquences). Nous tirons avantage de l'énorme quantité d'information fournie par la série d'images pour obtenir une image débruitée par une méthode non destructive. En d'autres termes nous préférons la fidélité aux données à l'efficacité du débruitage.

Remarque : De manière générale la méthode d'accumulation et fusion fonctionne dès lors que le bruit additif est de moyenne nulle (pour le multiplicatif de moyenne unitaire) et que les réalisations sont indépendantes. Le modèle précédent n'est donc pas essentiel pour la suite mais il permet de faire le lien avec le temps d'exposition.

3.2 L'aliasing

L'*aliasing* ou repliement du spectre traduit le fait qu'une infinité de signaux (les *alias*) correspondent aux mêmes échantillons [13]. Ainsi, il existe une ambiguïté lors de la phase d'interpolation puisque l'on doit faire un choix. La présence ou non d'*aliasing* dépend de la relation entre le pas d'échantillonnage (en lien avec le pas de la grille des capteurs) et la plus haute fréquence du signal.

Plus précisément, dans le cas unidimensionnel si on considère un signal échantillonné avec un pas T . On peut construire un signal ayant les mêmes échantillons en translatant son spectre par un multiple de $\frac{1}{T}$. Le théorème de Nyquist-Shannon précise que si l'on se restreint aux signaux ayant une fréquence maximale f_m alors l'ambiguïté disparaît dès lors que l'on considère une fréquence d'échantillonnage strictement supérieure à $2f_m$. De plus dans ce cas on a la formule d'interpolation de Whittaker-Shannon,

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u[nT] \text{sinc}(t - nT) \quad (7)$$

où u est le signal sous-jacent, $(u[nT])_{n \in \mathbb{Z}}$ les échantillons obtenus avec un pas $T < \frac{1}{2f_m}$. Dans le cas où le pas est trop grand on observe que les fréquences supérieures à $\frac{1}{T}$ sont copiés par périodisation dans le domaine fréquentiel $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$. Il devient alors impossible de faire la différence entre les fréquences copiées et les autres. C'est pourquoi on parle de repliement du spectre. Ce phénomène s'explique par le fait que l'échantillonnage dans le domaine spatial correspond à une périodisation dans le domaine de Fourier. L'extension à la 2D est immédiate en utilisant des arguments de séparabilité. En pratique on ne sera plus capable de retrouver le signal sous-jacent puisque du contenu fréquentiel a été modifié et qu'il n'est pas possible de faire machine arrière (même avec une connaissance a priori du signal). Par exemple l'utilisation de la formule d'interpolation (7) sous-entend que le signal sous-jacent avait une fréquence maximale inférieure stricte à $\frac{1}{2T}$.

Il est possible de diminuer l'impact de l'*aliasing* en appliquant un filtrage optique ou en faisant une combinaison de petits capteurs (exemple hypomode [15]). Il faut cependant garder à l'esprit que tout filtrage passe-bas modifie les échantillons. Si on cherche à corriger l'*aliasing* à partir d'images digitales alors il faut arriver à augmenter le pas d'échantillonnage artificiellement. On notera que zoomer ou accumuler et fusionner ne change rien au problème. Pour cela, il conviendra d'utiliser un algorithme de super-résolution [10] qui tire avantage du fait que des photographies d'une même scène ne sont jamais exactement recalées. On trouve toujours un décalage qui peut par exemple être dû aux vibrations de l'appareil. Si ce décalage est sous-pixelique alors on obtient des échantillons à des positions différentes et donc une information totalement nouvelle. En recalant puis combinant ces échantillons les algorithmes de super-résolution permettent de simuler une augmentation du pas d'échantillonnage.

3.3 L'erreur de troncature

En supposant que l'on dispose d'un nombre infini d'échantillons non bruités et non aliasés la formule de Whittaker-Shannon (7) répond théoriquement à la question du passage du discret au continu. En pratique on n'en possède qu'un nombre fini ce qui nous oblige par exemple dans le cas précédent à tronquer la somme (ou plus généralement à avoir un a priori sur les échantillons inconnus). Ceci introduit une erreur lors de l'interpolation que l'on appelle erreur de troncature ou *aliasing* de type 2. La deuxième dénomination étant justifiée par le fait que comme pour l'*aliasing* de type 1 les erreurs sont introduites lorsque l'on ne dispose pas d'assez d'échantillons. Bien que cette erreur ait été étudiée dès les années soixante, elle n'est que très peu souvent prise en compte par la communauté du traitement du signal. Or l'amélioration de la qualité des images en terme de bruit et d'*aliasing* et le passage à 16 bits font que l'on ne peut plus négliger l'erreur de troncature.

Un aspect délicat de l'erreur de troncature est qu'il est difficile de l'évaluer. De manière générale son estimation nécessite l'introduction d'un modèle concernant le comportement du signal en dehors des échantillons connus. Durant mon stage l'étude de l'erreur de troncature s'est faite à travers la relecture (vérification et correction) et à l'extension au cas bidimensionnel d'un *preprint* de Loïc Simon faisant suite à une première publication sur le sujet [23]. C'est pourquoi je présente à part ce travail dans la section suivante.

Pour limiter l'impact de l'erreur de troncature, il suffit dans un premier temps d'augmenter le nombre d'échantillons. Des images plus grandes donneront une erreur moindre. Les appareils ayant une résolution limitée on peut comme pour l'*aliasing* simuler l'augmentation du nombre d'échantillons à l'aide d'un algorithme de super-résolution.

Remarque : Le bruit fait que les échantillons obtenus à l'acquisition ne correspondent pas aux valeurs fournies par la fonction continue sous-jacente. L'*aliasing* perturbe l'interpolation car il n'est pas possible de différencier les fréquences repliées du reste. La troncature quant à elle fait que, même en ayant accès aux bons échantillons (sans bruit et avec un pas d'échantillonnage assez faible), toute méthode d'interpolation introduit une erreur du fait que l'on a accès qu'à un nombre fini de ces échantillons. Ces trois aspects différents démontrent l'impossibilité de la reconstruction parfaite. Il est vital d'arriver à contrôler ces erreurs et c'est ce que nous tentons de faire dans la suite.

En théorie les algorithmes de fusion et accumulation et ceux de super-résolution permettent de faire diminuer les trois erreurs évoquées précédemment. Cependant ils nécessitent toujours le recourt à une méthode d'interpolation (par exemple au moment du recalage qui est sous-pixellique) qui est biaisée par les erreurs que l'on cherche justement à corriger. Il faudra toujours garder à l'esprit que le problème de correction des erreurs se mord la queue et c'est ce qui rend **compliqué** l'interprétation des résultats.

4 Majoration de l'erreur de troncature

Nous présentons ici un résumé du travail de Loïc Simon portant sur l'erreur de troncature ainsi que ma proposition d'extension au cas bidimensionnel. Les signaux (principalement monodimensionnels) sont vus comme des processus aléatoires faiblement stationnaires bande-limités et l'erreur de troncature est exprimée en terme d'erreur quadratique moyenne. Ce modèle a l'avantage d'être compatible avec les images au sens où l'on ne suppose pas que le signal est borné ou sur-échantillonné. Les méthodes d'interpolation envisagées sont supposées linéaires et invariantes par translation et sont donc descriptibles en terme de noyaux. Dans le cas de l'interpolation de Whittaker-Shannon et de l'interpolation par DFT, il est obtenu une majoration de l'erreur dépendant de la distance au bord et du contenu spectral du signal. Un système d'expérimentation utilisant des images permet de valider les bornes obtenues et donne une idée de l'erreur de troncature obtenue en fonction du noyau interpolateur utilisé. On retiendra que l'utilisation de la décomposition *periodic plus smooth* [16] peut s'avérer judicieuse.

Remarque : Par soucis de simplicité la présentation suivante ne contient pas toute les justifications théoriques (permettant par exemple la définition des quantités employées) ni les démonstrations de toutes les étapes permettant l'obtention des bornes.

4.1 Généralités

4.1.1 Notations

Dans la suite, $t \in \mathbb{R}^d$ fera référence à la position spatiale (ou temporelle), alors que $k \in \mathbb{Z}^d$ sera un entier. On écrit $\omega \in \mathbb{R}^d$ pour représenter les pulsations (ce qui correspond à la fréquence au facteur 2π près). En dimension d les écritures du type $|k| \leq K$ sont à lire coordonnées par coordonnées. La transformée de Fourier d'un signal déterministe x_t sera notée $\mathcal{F}(x)$ et définie par $\hat{x}_\omega := \mathcal{F}(x)(\omega) := \int e^{-i\omega \cdot t} x_t dt$. Avec cette convention la transformée de Fourier inverse est définie par $\mathcal{F}^{-1}(\hat{x})(t) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\omega \cdot t} \hat{x}_\omega d\omega$.

On définit les transformées de Fourier discrètes d'un vecteur $(x[k])_{|k| \leq K}$ par $\mathcal{DF}\mathcal{T}(x)[l] := \sum_{|k| \leq K} e^{-i\frac{2\pi l}{N} \cdot k} x[k]$ et $\mathcal{DF}\mathcal{T}^{-1}(x)[k] := \frac{1}{N} \sum_{|l| \leq K} e^{i\frac{2\pi l}{N} \cdot k} x[l]$.

4.1.2 Résultats sur les processus aléatoires

Comme évoqué précédemment il est nécessaire de se munir d'un modèle pour les échantillons inconnus. On utilise le modèle stochastique suivant où le signal sera représenté par X_t un processus aléatoire faiblement stationnaire. On considèrera dans la suite uniquement des processus aléatoire de ce type.

Définition 4.1 (Processus aléatoire faiblement stationnaire). Soit X_t un processus aléatoire. $\mathbb{E}[X_t]$ et $\mathbb{E}[X_\tau X_{\tau+t}]$ désignent les statistiques d'ordre un et deux de X_t .

Un processus aléatoire X_t est dit faiblement stationnaire si ses statistiques d'ordre un et deux sont invariantes par translation ie pour tout t, t' et tout τ, τ'

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}[X_{t'}] \\ \mathbb{E}[X_\tau X_{\tau+t}] &= \mathbb{E}[X_{\tau'} X_{\tau'+t}]. \end{aligned}$$

On note alors $\mu := \mathbb{E}[X_t]$ sa moyenne et $R_X(t) := \mathbb{E}[(X_\tau - \mu)(X_{\tau+t} - \mu)]$ sa fonction d'auto-correlation.

Nous rappelons maintenant la définition de la notion de convergence que l'on utilisera dans la suite.

Définition 4.2 (Convergence en moyenne quadratique). Soit X_1, \dots, X_n, \dots une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On dit que $X_n \rightarrow X$ en moyenne quadratique si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^2] \rightarrow 0.$$

Par extension, une suite de processus aléatoires X_t^n converge vers X_t en t si

$$\mathbb{E}[|X_t^n - X_t|^2] \rightarrow 0.$$

De plus, un processus aléatoire X_t est continu en moyenne quadratique si, pour tout t , $X_s \rightarrow X_t$ en moyenne quadratique quand $s \rightarrow t$.

Définition 4.3 (Distribution de la puissance spectrale). Soit X_t un processus aléatoire faiblement stationnaire continu en moyenne quadratique. On note $d\Psi_X(\omega) := \mathcal{F}(R_X)(\omega)$ la distribution de la puissance spectrale de X_t . De plus,

- X_t est dit Nyquist bande-limité si $\text{supp}(d\Psi_X) \subset \{|\omega| \leq \pi\} := \Omega_\pi$.
- Si de plus, $d\Psi_X(\partial\Omega_\pi) = 0$, alors X_t est dit strictement Nyquist bande-limité.

4.1.3 Échantillonnage et reconstruction

L'action d'extraire des échantillons d'un processus aléatoire est mathématiquement équivalent à la multiplication avec un peigne de Dirac.

Définition 4.4 (Peigne de Dirac). Soit $0 < K \leq \infty$. La distribution suivante est appelée peigne de Dirac de de demi-longueur K

$$\Delta_K = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |k| \leq K} \delta_k.$$

Lorsque cela a un sens, on appelle version échantillonnée d'un processus aléatoire X_t la distribution aléatoire suivante

$$X.\Delta_K := \sum_{|k| \leq K} X_k \delta_k.$$

On rappelle que l'action de retrouver un signal continu à partir d'un signal échantillonné est appelé reconstruction. On ne considérera dans la suite que des méthodes de reconstruction linéaires et invariantes par translation.

Définition 4.5 (Système de reconstruction). On appelle:

- noyau de reconstruction, toute fonction $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
- système de reconstruction, toute suite $(h_K)_{K>0}$ de noyaux de reconstruction.

Un système de reconstruction

- est dit interpolant si

$$\forall K > 0, \forall |k| \leq K, h_K(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

- reproduit les constantes

$$\forall K > 0, \forall t, \sum_{|k| \leq K} h_K(t - k) = 1.$$

Finallement, on dit qu'un système de reconstruction h_K satisfait la condition de domination des systèmes de reconstruction (notée CDSR) si $\exists h_\infty$ tel que

- $\forall t, \forall |\omega| \leq \pi, \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq K} e^{i\omega k} h_K(t - k) = \sum_k e^{i\omega k} h_\infty(t - k)$ et
- $\forall t, \exists M(t) > 0$ tel que

$$\forall K > 0, \forall |\omega| \leq \pi, \left| \sum_{|k| \leq K} e^{i\omega k} h_K(t - k) \right| \leq M(t).$$

Théorème 4.1 (Reconstruction linéaire invariante par translation). Soit X_t un processus aléatoire, h_K un système reconstruction et $0 < K < \infty$. On définit la reconstruction de X_t à partir de ses échantillons $X_k, k \in \{-K, \dots, K\}$ par

$$\tilde{X}_t^{[h_K, K]} := (X.\Delta_K) * h_K(t) = \sum_{|k| \leq K} X_k h_K(t - k).$$

Ensuite, si le système vérifie la CDSR, on peut étendre la définition précédente pour $K = \infty$

$$\tilde{X}_t^{[h_\infty, \infty]} := (X.\Delta_\infty) * h_\infty(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} (X.\Delta_K) * h_K(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq K} X_k h_K(t - k),$$

où la convergence est en moyenne quadratique, ie

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\tilde{X}_t^{[h_\infty, \infty]} - \sum_{|k| \leq K} X_k h_K(t - k) \right)^2 \right] = 0.$$

Proof. Dans le cas limite ($K = \infty$), on doit montrer que sous la CDSR la limite précédente existe au sens de la moyenne quadratique. Ceci revient à montrer que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\tilde{X}_t^{[h_\infty, \infty]} - \tilde{X}_t^{[h_K, K]} \right)^2 \right] = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\tilde{X}_t^{[h_\infty, \infty]} - \tilde{X}_t^{[h_K, K]} \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} X_k h_\infty(t-k) - \sum_{|k| \leq K} X_k h_K(t-k) \right)^2 \right] \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, m \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} [X_k X_m] h_\infty(t-k) h_\infty(t-m) \\
&\quad - 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |m| \leq K} \mathbb{E} [X_k X_m] h_\infty(t-k) h_K(t-m) \\
&\quad + \sum_{|k| \leq K, |m| \leq K} \mathbb{E} [X_k X_m] h_K(t-k) h_K(t-m).
\end{aligned}$$

Posant $Y_t = X_t - \mu$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [X_k X_m] &= \mu^2 + \mathbb{E} [Y_k Y_m] = \mu^2 + R_X(k-m) \\
&= \mu^2 + \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\omega(k-m)} d\Psi_X(\omega).
\end{aligned}$$

L'expression devient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\tilde{X}_t^{[h_\infty, \infty]} - \tilde{X}_t^{[h_K, K]} \right)^2 \right] &= \mu^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, m \in \mathbb{Z}^d} h_\infty(t-k) h_\infty(t-m) \\
&\quad - 2\mu^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |m| \leq K} h_\infty(t-k) h_K(t-m) \\
&\quad + \mu^2 \sum_{|k| \leq K, |m| \leq K} h_K(t-k) h_K(t-m) \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, m \in \mathbb{Z}^d} h_\infty(t-k) h_\infty(t-m) e^{i\omega(k-m)} d\Psi_X(\omega) \\
&\quad + 2 \frac{1}{(2\pi)^d} \int \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |m| \leq K} h_\infty(t-k) h_K(t-m) e^{i\omega(k-m)} d\Psi_X(\omega) \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int \sum_{|k| \leq K, m \in \mathbb{Z}^d} h_K(t-k) h_K(t-m) e^{i\omega(k-m)} d\Psi_X(\omega) \\
&= \mu^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h_\infty(t-k) - \sum_{|k| \leq K} h_K(t-k) \right)^2 + \\
&\quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{i\omega k} h_\infty(t-k) - \sum_{|k| \leq K} e^{i\omega k} h_K(t-k) \right)^2 d\Psi_X(\omega)
\end{aligned}$$

Considérant $K \rightarrow \infty$ et étant donné la partie convergence de la CDSR, on note que $\forall t, \forall |\omega| \leq \pi$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{i\omega k} h_\infty(t-k) - \sum_{|k| \leq K} e^{i\omega k} h_K(t-k) = 0$$

L'identité précédente et la partie de domination sont facilement étendues à tout ω par périodicité. Ceci assure que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{i\omega k} h_\infty(t-k) - \sum_{|k| \leq K} e^{i\omega k} h_K(t-k) \right)^2 d\Psi_X(\omega) = 0.$$

□

Remarque 4.1. • Si h_K est interpolant, la reconstruction est exacte aux positions $|k| \leq K$.

- Si h_K reproduit les constantes, la reconstruction est parfaite pour les processus aléatoires constants.

Définition 4.6 (RMSE). Soit X_t un processus aléatoire et \tilde{X}_t une reconstruction. On évalue la qualité de la reconstruction au sens de la RMSE:

$$RMSE_{[\tilde{X}]}(t)^2 := \mathbb{E}[(X_t - \tilde{X}_t)^2]$$

Comme nous l'avons vu précédemment le filtre passe-bas idéal joue un rôle essentiel dans la théorie de l'échantillonnage et de la reconstruction.

Proposition 4.1. *Le système de reconstruction de Shannon-Whittaker ($h_K(t) = \text{sinc}(t) := \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$) est interpolant et vérifie la CDSR. En revanche il ne reproduit les constantes qu'asymptotiquement pour $K \rightarrow \infty$.*

Définition 4.7 (Interpolation de Shannon-Whittaker). On appelle interpolation idéale de Shannon-Whittaker de X_t ,

$$\tilde{X}_t^{[\text{sinc}, \infty]} := \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq K} X_k \text{sinc}(t - k)$$

où la limite est au sens de la moyenne quadratique ie

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\tilde{X}_t^{[\text{sinc}, \infty]} - \sum_{|k| \leq K} X_k \text{sinc}(t - k) \right)^2 \right] = 0.$$

Théorème 4.2 (Théorème de l'échantillonnage). *Soit X_t un processus aléatoire Nyquist bande-limité (non nécessairement strictement). Alors, en moyenne quadratique,*

$$X_t = \tilde{X}_t^{[\text{sinc}, \infty]}.$$

Proof. On obtiendra ce théorème à partir des estimations de RMSE qui suivent. En fait la convergence est uniforme en moyenne quadratique lorsque t est borné. \square

4.1.4 Aliasing généralisé

L'erreur de reconstruction peut être considérée comme une erreur due à un *aliasing* généralisé. Il existe une infinité de signaux continus (les alias) qui correspondent à un nombre donné d'échantillons. Ainsi toute reconstruction peut être vue comme un alias du signal continu que l'on cherche à obtenir. L'*aliasing* de type 1 apparaît dans le cas où l'on connaît un nombre infini d'échantillons mais que le spectre du signal n'est pas contenu dans le domaine de Nyquist. L'*aliasing* de type 2 correspond au cas où le signal est Nyquist bande-limité mais que les échantillons sont en nombre finis.

4.1.5 Reconstruction linéaire invariante par translation

Notre analyse porte uniquement sur les reconstructions linéaires invariantes par translation. Dans ce cas, on obtient une représentation de la RMSE de l'aliasing généralisé que l'on appelle "représentation spectrale" en raison du rôle majeur que joue le contenu spectral. Le théorème suivant s'interprète de la manière suivante. La MSE est la somme des erreurs quadratiques par rapport à la moyenne de X et à chaque harmonique $e^{i\omega t}$ (pondérée par le spectre X).

Théorème 4.3. *Représentation spectrale de la RMSE de l'aliasing généralisé] Soit X_t un processus aléatoire de moyenne μ et de puissance spectrale $d\Psi_X$, $K < \infty$ et h_K un système de reconstruction (il n'est pas nécessaire que h_K soit interpolant ou préserve les constantes). Alors la MSE de la reconstruction $\tilde{X}_t^{[h_K, K]} = (X \cdot \Delta_K) * h_K(t)$ est*

$$RMSE_{[X \cdot \Delta_K * h_K]}(t)^2 = |\mu - \mu \Delta_K * h_K(t)|^2 + \frac{1}{(2\pi)^d} \int |e^{i\omega t} - [(e^{i\omega \cdot} \Delta_K) * h_K](t)|^2 d\Psi_X(\omega) \quad (8)$$

La formule s'étend au cas $K = \infty$ sous la CDSR.

Proof. On commence avec le cas $K < \infty$. Soit $Y_t := X_t - \mu$.

$$\begin{aligned}
RMSE_{[X.\Delta_K * h_K]}(t)^2 &= \mathbb{E} \left[\left(X_t - \sum_{|k| \leq K} X_k h_K(t-k) \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(Y_t + \mu - \sum_{|k| \leq K} (Y_k + \mu) h_K(t-k) \right)^2 \right] \\
&= |\mu - \mu \Delta_K * h_K(t)|^2 + \mathbb{E} \left[\left(Y_t - \sum_{|k| \leq K} Y_k h_K(t-k) \right)^2 \right] \\
&= |\mu - \mu \Delta_K * h_K(t)|^2 + RMSE_{[Y.\Delta_K * h_K]}(t)^2
\end{aligned}$$

La première partie de l'égalité (8) est alors établie. Traitons désormais la deuxième partie. Avec $\mathbb{E}(Y_t Y_s) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\omega(t-s)} d\Psi_X(\omega)$ on obtient

$$\begin{aligned}
RMSE_{[Y.\Delta_K * h_K]}(t)^2 &= \mathbb{E}[Y_t^2] - \sum_{|k| \leq K} (\mathbb{E}[Y_t Y_k] + \mathbb{E}[Y_k Y_t]) h_K(t-k) \\
&\quad + \sum_{|k|, |m| \leq K} \mathbb{E}[Y_k Y_m] h_K(t-k) h_K(t-m) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int 1 - \sum_{|k| \leq K} (e^{i\omega(t-k)} + e^{-i\omega(t-k)}) h_K(t-k) d\Psi_X(\omega) \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int \sum_{|k|, |m| \leq K} e^{i\omega(m-k)} h_K(t-k) h_K(t-m) d\Psi_X(\omega) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \left| e^{i\omega t} - \sum_{|k| \leq K} e^{i\omega k} h_K(t-k) \right|^2 d\Psi_X(\omega),
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'équation (8).

Considérant $K \rightarrow \infty$, on note qu'avec la partie convergence de la CDSR et en prenant $\omega = 0$ on a

$$\mu \Delta_K * h_K(t) \rightarrow \mu \Delta_\infty * h_\infty(t).$$

Rapelons que la condition de domination de la définition 4.5 est formulée pour tout $|\omega| \leq \pi$ mais ceci peut s'étendre à tout ω par périodicité. De fait, à l'aide du théorème de convergence dominée on obtient

$$\int \left| e^{i\omega t} - \sum_{|k| \leq K} e^{i\omega k} h_K(t-k) \right|^2 d\Psi_X(\omega) \rightarrow \int \left| e^{i\omega t} - \sum_k e^{i\omega k} h_\infty(t-k) \right|^2 d\Psi_X(\omega).$$

□

Définition 4.8 (MSE moyenne et de puissance spectrale). On pose

$$\begin{aligned}
MSE_\mu(h_K) &:= \mu^2 |1 - \Delta_K * h_K(t)|^2, \\
MSE_{d\Psi}(t)(h_K) &:= \frac{1}{(2\pi)^d} \int |e^{i\omega t} - (e^{i\omega \cdot} \Delta_K) * h_K(t)|^2 d\Psi(\omega)
\end{aligned}$$

qui désignent respectivement la MSE moyenne et la MSE de puissance spectrale. Ces erreurs correspondent au carré du biais et à la variance de la reconstruction.

Remarque 4.2. Il est préférable en pratique que le système de reconstruction préserve les constantes et donc que la partie MSE moyenne soit nulle. Sinon l'erreur obtenue dépend du nombre de bits utilisés pour coder les images (ce qui donne une moyenne différente).

Dans le cas contraire il est possible de normaliser le noyau de la manière suivante

$$\tilde{h}(t) := \frac{h(t)}{\sum_{|k| \leq K} h(t-k)}$$

En fait il s'agit d'une approximation à moins que $K = \infty$. De fait on utilise une autre méthode qui consiste à estimer la moyenne empiriquement ($\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{|k| \leq K} X_k$), et modifier la schéma d'interpolation comme **suisant**

$$\tilde{X}_t^h := ((X - \hat{\mu}) \cdot \Delta_K) * h(t) + \hat{\mu}. \quad (9)$$

Le corollaire suivant montre que l'aliasing classique (de type 1) n'est pas oublié dans ce modèle. Dans le cas où l'on a un nombre infini d'échantillons ($K = \infty$) on peut obtenir la RMSE fournie par l'interpolateur idéal de Shannon-Whittaker. Cette erreur provient du fait que parmi tous les alias du signal on choisit celui dont le spectre est contenu dans le domaine de Nyquist.

Corollaire 4.1. *Soit X_t un processus aléatoire, alors la RMSE de la reconstruction idéale de Shannon-Whittaker est*

$$RMSE_{[(X \cdot \Delta_\infty) * \text{sinc}]}(t)^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\omega| \geq \pi} |e^{i\omega t} - [(e^{i\omega \cdot} \cdot \Delta_\infty) * \text{sinc}](t)|^2 d\Psi_X(\omega) \quad (10)$$

Proof. C'est une conséquence direct du théorème 4.3 (qui peut être utilisé pour $K = \infty$ car sinc vérifie la CDSR) et du fait que le noyau préserve asymptotiquement les constantes (*i.e.* $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \text{sinc}(t-k) \equiv 1$) ce qui implique que la MSE moyenne est nulle. \square

4.1.6 Erreur de troncature spatiale

On notera que la formule obtenue précédemment ne peut être estimée numériquement puisque l'on n'a pas accès avec un signal digital au spectre contenu à l'extérieur du domaine de Nyquist. Sachant que l'on cherche à traiter l'erreur de troncature et que l'on a vu que l'*aliasing* pouvait être (partiellement) corrigé, on supposera dans la suite que les signaux considérés sont strictement Nyquist bande-limités. Ils seront alors reconstruits parfaitement à l'aide de la formule idéale de Shannon-Whittaker $X_t = (X \cdot \Delta_\infty) * \text{sinc}$. Pour le noyau sinc la seule source d'erreur restante est la troncature spatiale (des échantillons). On commence par expliciter le théorème 4.3 dans ce cas restreint.

Théorème 4.4 (Représentation spectrale de la RMSE de troncature). *Soit X_t un processus aléatoire strictement Nyquist bande-limité de moyenne μ , et h_K un système de reconstruction. Alors,*

$$RMSE_{[X \cdot \Delta_K * h_K]}(t)^2 = |\mu \Delta_\infty * \text{sinc}(t) - \mu \Delta_K * h_K(t)|^2 + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\omega| \leq \pi} |(e^{i\omega \cdot} \cdot \Delta_\infty) * \text{sinc}(t) - (e^{i\omega \cdot} \cdot \Delta_K) * h_K(t)|^2 d\Psi_X(\omega). \quad (11)$$

Proof. Ce théorème est en fait un corollaire du théorème 4.3. On a utilisé les deux égalités

$$\mu = \mu \Delta_\infty * \text{sinc}(t),$$

et si $|\omega| < \pi$

$$e^{i\omega t} = [(e^{i\omega \cdot} \cdot \Delta_\infty) * \text{sinc}](t).$$

La dernière égalité étant fausse pour $|\omega| = \pi$ cela justifie le caractère strictement Nyquist bande-limité. \square

4.1.7 Comportement général attendu

Comme on ne connaît pas les signaux en dehors du domaine du signal on ne peut pas espérer une reconstruction parfaite du signal via la formule de Shannon-Whittaker. Si on veut tout de même utiliser cette reconstruction il faut avoir un *a priori* sur les échantillons inconnus. On considèrera dans la suite deux extensions classiques:

- l'extension par des zéros où les X_k sont supposés nuls en dehors du domaine du signal: $X_k = 0$ si $|k| > K$,

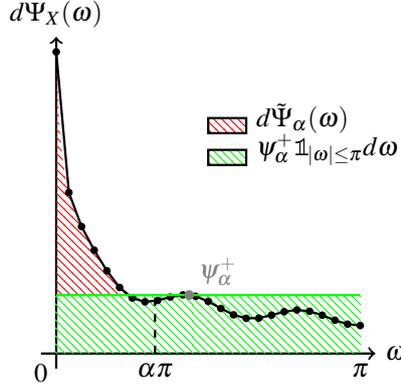


Figure 2: Décomposition du spectre pour un α donné.

- et l'extension périodique où le signal X_t est supposé $2K + 1$ -périodique: $X_k = X_{k \% N}$ si $|k| > K$, où $N = 2K + 1$ est la taille du signal digital, et $k \% N$ est l'unique entier $k' \in \{-K, \dots, K\}$ tel que $k - k' \in N\mathbb{Z}$. On notera que $h_K(t)$ n'est pas dans ce cas $\text{sinc}(t)$ mais $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \text{sinc}(t - l(2K + 1))$ (on montrera que $h_K(t) = \frac{\sin(\pi t)}{N \sin(\frac{\pi t}{N})}$).

Dans tous les cas il sera attendu que l'erreur augmente lorsque l'on se rapproche du bord du domaine du signal (et donc du lieu où on ne connaît plus les échantillons). En effet, l'extension apportera de plus en plus de mauvaises contributions au signal reconstruit. D'ailleurs, étant donné que $|\text{sinc}(t - k)|$ augmente lorsque k se rapproche de t , plus la valeur interpolée considérée est prise à un point t proche d'un échantillon étendu plus celui-ci y contribuera.

De plus, comme le noyau sinc est interpolant (et donc la reconstruction exacte sur les échantillons connus) on s'attend à ce que l'erreur oscille en s'annulant sur les échantillons et atteignant son maximum entre deux échantillons successifs (au milieu).

Pour chaque extension, on montrera que la MSE peut se décomposer en un produit d'une modulation et d'une enveloppe : $RMSE_{[X, \Delta_K * h_K]}(t)^2 = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} A(t)$. On s'intéressera à la variation de l'enveloppe et comme attendu on montrera que celle-ci dépend principalement de la distance de t au bord du domaine du signal, $\pm(K + \frac{1}{2})$.

Définition 4.9 (Distances au bord). Let $|t| \leq K$. On définit

$$\begin{aligned} \delta(t) &:= \min(K + \frac{1}{2} - t, K + \frac{1}{2} + t), \\ \Delta(t) &:= \max(K + \frac{1}{2} - t, K + \frac{1}{2} + t). \end{aligned} \quad (12)$$

4.1.8 Une méthode pour évaluer la composante spectrale de la MSE

On explicite ici la méthode utilisée pour évaluer le comportement de la composante spectrale de la MSE. Cette étude n'est pas aisée et nécessite de se ramener à des signaux particuliers. Pour cela on décompose le signal en une partie bruit-blanc et une partie sur-échantillonnée. L'idée de départ est que si on trouve un spectre $d\tilde{\Psi}$ tel que $d\Psi \leq d\tilde{\Psi}$, alors $MSE_{d\Psi} \leq MSE_{d\tilde{\Psi}}$ ce qui permet d'obtenir une éventuelle majoration si les calculs sont plus simple pour le second spectre.

On considérera des signaux à spectre borné. Dans ce cas, $d\Psi_X(\omega) = \psi_X(\omega)d\omega$ satisfait $\exists \psi^+ \geq 0$ tel que $\forall \omega, \psi_X(\omega) \leq \psi^+$. Alors, utilisant $d\tilde{\Psi}^+ := \psi^+ \mathbb{1}_{|\omega| \leq \pi} d\omega$ qui est un spectre constant sur $[-\pi, \pi]$, la majoration de la composante spectrale revient à celle d'un bruit blanc Nyquist bande-limité. En fait, les bornes obtenues de cette manière ne sont pas assez précises. On introduira alors une autre majoration sur le spectre qui est illustrée sur la figure Figure 2.

Proposition 4.2 (Décomposition du spectre). Soit $0 \leq \alpha < 1$ et supposons que $\mathbb{1}_{|\omega| \geq \alpha\pi} d\Psi_X(\omega)$ est borné. Notons ψ_α^+ la borne supérieure correspondante et $d\tilde{\Psi}_\alpha$ la composante positive de la mesure $d\Psi_X(\omega) - \psi_\alpha^+ \mathbb{1}_{|\omega| \leq \pi} d\omega$. Alors,

$$MSE_{d\Psi_X} \leq MSE_{d\tilde{\Psi}_\alpha} + \psi_\alpha^+ MSE_{\mathbb{1}_{|\omega| \leq \pi} d\omega}. \quad (13)$$

Remarque 4.3. On vient de réduire l'étude des majorations à deux types de signaux :

- Les bruits blancs Nyquist bande-limités ($d\Psi_X(\omega) = \mathbb{1}_{|\omega| \leq \pi} d\omega$), et
- les signaux sur-échantillonnés ($\text{supp}(d\Psi_X(\omega)) \subset \{|\omega| \leq \alpha\pi\}$).

4.2 RMSE de l'interpolation tronquée de Shannon-Whittaker

Dans cette partie nous considérons le cas de la reconstruction tronquée de Shannon-Whittaker où le noyau d'interpolation est sinc et les échantillons inconnus sont mis à 0. On notera que cela n'implique pas que le signal est à support compact (ce qui serait en contradiction avec le principe d'incertitude d'Heisenberg puisque le signal est déjà bande-limité).

4.2.1 Représentation spectrale

Appliquant le théorème 4.4 avec $h_K = \text{sinc}$ et utilisant l'identité $\sin(\pi(t-k)) = \sin(\pi t)(-1)^k$ on obtient le corollaire suivant qui introduit la décomposition en modulation et enveloppe.

Corollaire 4.2. *Soit X_t un processus aléatoire strictement Nyquist bande-limité de moyenne μ , alors*

$$RMSE_{[X, \Delta_K * \text{sinc}]}(t)^2 = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} \left(\begin{array}{c} \mu^2 \left| \sum_{|k| > K} \frac{(-1)^k}{t-k} \right|^2 \\ + \\ \frac{1}{2\pi} \int \left| \sum_{|k| > K} e^{i\omega k} \frac{(-1)^k}{t-k} \right|^2 d\Psi_X(\omega) \end{array} \right) \quad (14)$$

Définition 4.10 (Enveloppe moyenne et spectrale). On définit $\forall |t| < K + \frac{1}{2}$

$$A_\mu(t) := \mu^2 \left| \sum_{|k| > K} \frac{(-1)^k}{t-k} \right|^2,$$

$$A_{d\Psi}(t) := \frac{1}{2\pi} \int \left| \sum_{|k| > K} e^{i\omega k} \frac{(-1)^k}{t-k} \right|^2 d\Psi(\omega).$$

Lorsqu'on utilisera ces notations on supposera implicitement que $|t| < K + \frac{1}{2}$.

Proposition 4.3. *Soit X_t un processus aléatoire, alors*

$$A_{d\Psi_X}(t) = \sum_{|k| > K, |m| > K} R_X(k-m) \frac{(-1)^{k+m}}{(t-k)(t-m)} \quad (15)$$

Proof.

$$\begin{aligned} A_{d\Psi_X}(t) &:= \frac{1}{2\pi} \int \left| \sum_{|k| > K} e^{i\omega k} \frac{(-1)^k}{t-k} \right|^2 d\Psi_X(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \sum_{|k| > K, |m| > K} e^{i\omega(k-m)} \frac{(-1)^{k+m}}{(t-k)(t-m)} d\Psi_X(\omega) \\ &= \sum_{|k| > K, |m| > K} \frac{(-1)^{k+m}}{(t-k)(t-m)} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega(k-m)} d\Psi_X(\omega) \\ &= \sum_{|k| > K, |m| > K} R_X(k-m) \frac{(-1)^{k+m}}{(t-k)(t-m)}. \end{aligned} \quad (16)$$

□

Nous allons maintenant majorer chacune des contributions des enveloppes.

Proposition 4.4 (Enveloppe moyenne). *Soit X_t un processus aléatoire strictement Nyquist bande-limité de moyenne μ , alors*

$$A_\mu(t) \leq \mu^2 \left(\frac{1}{\delta(t) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta(t) + \frac{1}{2}} \right)^2,$$

où $\delta(t)$ et $\Delta(t)$ sont les distances introduites à la définition 4.9.

Proof. Ce résultat s'obtient tout simplement en utilisant une série alternée $|t| < K + 1$. □

4.2.2 RMSE d'un bruit blanc bande-limité

Définition 4.11 (Bruit blanc Nyquist bande-limité). Un processus aléatoire W_t est un bruit blanc Nyquist bande-limité de variance σ^2 si $d\Psi_W(\omega) = \sigma^2 \mathbb{1}_{|\omega| \leq \pi} d\omega$.

Théorème 4.5. *Soit W_t un bruit blanc Nyquist bande-limité de variance 1. Alors, $\forall |t| < K + \frac{1}{2}$,*

$$A_{d\Psi_W}(t) \leq \frac{1}{\delta(t)} + \frac{1}{\Delta(t)}. \quad (17)$$

Proof. Utilisant la proposition 4.3,

$$A_{d\Psi}(t) = \sum_{|k| > K, |m| > K} R_W(k-m) \frac{(-1)^{k+m}}{(t-k)(t-m)}.$$

On a également par transformée de Fourier inverse $R_W(t) = \text{sinc}(t)$. D'où

$$A_{d\Psi}(t) = \sum_{|k| > K} \frac{1}{(t-k)^2}.$$

On utilise la convexité de $g_t : y \mapsto \frac{1}{(t-y)^2}$ sur des intervalles de la forme $]k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}[$ pour $\max(|k - \frac{1}{2}|, |k + \frac{1}{2}|) > t$. L'inégalité de Jensen appliquée à une variable aléatoire uniforme de $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$ donne

$$\frac{1}{(t-k)^2} = g_t \left(\frac{k + \frac{1}{2} + k - \frac{1}{2}}{2} \right) \leq \int_{k - \frac{1}{2}}^{k + \frac{1}{2}} g_t(y) dy = \int_{k - \frac{1}{2}}^{k + \frac{1}{2}} \frac{1}{(t-y)^2} dy.$$

D'où

$$\begin{aligned} A_{d\Psi}(t) &\leq \int_{|y| \geq K + \frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{(t-y)^2} dy \\ &= \frac{1}{K + \frac{1}{2} - t} + \frac{1}{K + \frac{1}{2} + t} \\ &= \frac{1}{\delta(t)} + \frac{1}{\Delta(t)}. \end{aligned}$$

□

4.2.3 RMSE d'un signal sur-échantillonné

On considère des signaux sur-échantillonnés par un taux $\alpha < 1$.

Lemme 4.1. $\forall |\omega| < \pi$ and $\forall |t| < K + 1$,

$$\left| \sum_{|k| > K} e^{i\omega k} \frac{(-1)^k}{t-k} \right| \leq \frac{2}{|1 + e^{i\omega}|} \left(\frac{1}{\delta(t) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta(t) + \frac{1}{2}} \right).$$

Proof. On utilise la sommation par partie (ou transformation d'Abel). Étant donné deux suites, $a_k, b_k, k \geq 0$, on note $S(b)_K^k = \sum_{K < k' \leq k} b_{k'}$. On a alors,

$$\sum_{K < k \leq K'} a_k b_k = a_{K'} S(b)_K^{K'} - \sum_{K < k < K'} (a_{k+1} - a_k) S(b)_K^k. \quad (18)$$

Utilisant cette formule avec $a_k := \frac{1}{t-k}$ et $b_k = (-e^{i\omega})^k$, il vient pour $|t| < K + 1$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K < k \leq K'} e^{i\omega k} \frac{(-1)^k}{t-k} \right| &\leq |a_{K'} S(b)_K^{K'}| + \sum_{K < k < K'} |a_{k+1} - a_k| |S(b)_K^k| \\ &= \frac{1}{K' - t} |S(b)_K^{K'}| + \sum_{K < k < K'} \left(\frac{1}{k-t} - \frac{1}{k+1-t} \right) |S(b)_K^k|. \end{aligned}$$

Notant que

$$\begin{aligned} |S(b)_K^k| &= \left| (-e^{i\omega})^{K+1} \frac{1 - (-e^{i\omega})^{k-K}}{1 + e^{i\omega}} \right| \\ &\leq \frac{2}{|1 + e^{i\omega}|} \end{aligned}$$

et prenant $K' \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k > K} e^{i\omega k} \frac{(-1)^k}{t-k} \right| &\leq \frac{2}{|1 + e^{i\omega}|} \sum_{k > K} \left(\frac{1}{k-t} - \frac{1}{k+1-t} \right) \\ &= \frac{2}{|1 + e^{i\omega}|} \frac{1}{K+1-t}. \end{aligned}$$

De même par symétrie,

$$\left| \sum_{k < -K} e^{i\omega k} \frac{(-1)^k}{t-k} \right| \leq \frac{2}{|1 + e^{-i\omega}|} \frac{1}{K+1+t} = \frac{2}{|1 + e^{i\omega}|} \frac{1}{K+1+t}.$$

□

Théorème 4.6. Soit $\alpha < 1$ et $d\Psi$ un spectre contenu dans $\{|\omega| \leq \alpha\pi\}$, alors

$$A_{d\Psi}(t) \leq \sigma_\alpha^2 \left(\frac{1}{\delta(t) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta(t) + \frac{1}{2}} \right)^2, \quad (19)$$

où

$$\sigma_\alpha^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \alpha\pi} \frac{4}{|1 + e^{i\omega}|^2} d\Psi(\omega). \quad (20)$$

4.2.4 Cas général

Le théorème suivant résume le comportement de la majoration de l'erreur.

Théorème 4.7. Soit X_t un processus aléatoire Nyquist bande-limité et $0 \leq \alpha < 1$ tel que $\mathbb{1}_{|\omega| \geq \alpha\pi} d\Psi_X(\omega)$ soit borné. On a montré que la majoration de $RMSE_{[X, \Delta_K * \text{sinc}]}(t)^2$ pouvait se décomposer de la manière suivante:

- une modulation,
- une enveloppe moyenne,
- une enveloppe basse-fréquence et
- une enveloppe de bruit-blanc.

Cette décomposition conduit à l'inégalité suivante valide $\forall |t| < K + \frac{1}{2}$

$$RMSE_{[X.\Delta_K * \text{sinc}]}(t)^2 \leq \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} \times \left(\begin{array}{c} \mu_X^2 \left(\frac{1}{\delta(t) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta(t) + \frac{1}{2}} \right)^2 \\ + \\ \sigma_\alpha^2 \left(\frac{1}{\delta(t) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta(t) + \frac{1}{2}} \right)^2 \\ + \\ \sigma'_\alpha{}^2 \left(\frac{1}{\delta(t)} + \frac{1}{\Delta(t)} \right) \end{array} \right),$$

où

$$\sigma'_\alpha{}^2 := \|\mathbb{1}_{|\omega| \geq \alpha\pi} d\Psi_X(\omega)\|_\infty$$

et

$$\sigma_\alpha^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \alpha\pi} \frac{4}{|1 + e^{i\omega}|^2} d\tilde{\Psi}_\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \alpha\pi} \frac{2}{1 + \cos(\omega)} d\tilde{\Psi}_\alpha(\omega).$$

4.3 RMSE de l'interpolation périodique de Shannon-Whittaker

Nous venons d'étudier la méthode d'interpolation la plus classiquement considérée dans le contexte de l'erreur de troncature. Cependant, elle n'est que très peu utilisée en pratique car son implémentation est trop lente. Dans la catégorie des méthodes linéaires invariantes par translation, on préfère utiliser celles basées sur des noyaux à décroissance rapide (comme les B-splines). Ici on étudiera une autre approche souvent appelée interpolation par DFT *zero-padding*. La décroissance du noyau est aussi lente que sinc mais l'implémentation est beaucoup plus rapide grâce aux algorithmes de *Fast Fourier Transform* (FFT).

4.3.1 Extension périodique et interpolation par DFT

On introduit dans un premier temps le noyau de reconstruction pour des signaux bande-limités périodiques de taille N .

Définition 4.12 (Sinus cardinal discret). Soit $N = 2K + 1$. On définit la fonction *sinus cardinal discret de rang K* comme la N -périodisée de la fonction sinus cardinal :

$$\text{sincd}_K(t) := \sum_{q \in \mathbb{Z}} \text{sinc}(t - qN). \quad (21)$$

En se basant sur cette définition, il est facile de montrer que l'interpolation basée sur le sinus cardinal discret est équivalente à celle de Shannon-Whittaker si le signal est périodique. On introduit au préalable une notation.

Définition 4.13. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit l'unique couple d'indices $(q_N(k), k \% N)$ tel que $|k \% N| \leq K$ et

$$k = q_N(k)N + k \% N.$$

Théorème 4.8 (Extension périodique). Soit X_t un processus aléatoire, alors

$$X.\Delta_K * \text{sincd}_K(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_{k \% N} \text{sinc}(t - k).$$

Proof.

$$\begin{aligned} X.\Delta_K * \text{sincd}_K(t) &= \sum_{|k| \leq K} X_k \text{sincd}_K(t - k) \\ &= \sum_{|k| \leq K} X_k \sum_{q \in \mathbb{Z}} \text{sinc}(t - k - qN) \end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $k' \% N = k + q_N(k)N$, on obtient la formule souhaitée

$$X.\Delta_K * \text{sincd}_K(t) = \sum_{k'} X_{k' \% N} \text{sinc}(t - k').$$

□

Le sinus cardinal discret peut s'exprimer de deux manières différentes.

Proposition 4.5. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

1.

$$(\text{sincd}_K(t - k))_{|k| \leq K} = \mathcal{DFT}^{-1} \left(e^{-2i\pi t \frac{l}{N}} \right)_{|l| \leq K}; \quad (22)$$

2.

$$\text{sincd}_K(t) = \frac{\sin(\pi t)}{N \sin(\frac{\pi}{N} t)}. \quad (23)$$

Proof. 1. Il s'agit d'une reformulation de la définition du sinus cardinal discret obtenue en prenant en considération le lien entre transformée de Fourier et DFT. Plus précisément, comme $\text{sinc}(t - \tau) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-it\omega} \mathbb{1}_{\{|\omega| < \pi\}})(\tau)$ sa N -périodisée vérifie

$$(\text{sincd}_K(t - k))_{|k| \leq K} = \mathcal{DFT}^{-1}(e^{-it2\pi \frac{l}{N}} \mathbb{1}_{\{|2\pi \frac{l}{N}| < \pi\}})_{|l| \leq K} = \mathcal{DFT}^{-1}(e^{-it2\pi \frac{l}{N}})_{|l| \leq K}$$

2. On obtient la deuxième écriture en reprenant la première et en écrivant

$$\begin{aligned} \text{sincd}_K(t) &= \mathcal{DFT}^{-1} \left(e^{-2i\pi t \frac{l}{N}} \right)_{|l| \leq K} [0] = \frac{1}{N} \sum_{|l| \leq K} e^{-2i\pi t \frac{l}{N}} \\ &= \frac{1}{N} e^{2i\pi t \frac{K}{N}} \frac{1 - e^{-2i\pi t \frac{N}{N}}}{1 - e^{-2i\pi t \frac{1}{N}}} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi t)}{\sin(\frac{\pi}{N} t)}. \end{aligned} \quad (24)$$

□

En plus d'être utile dans la suite, cette proposition nous rappelle que l'on est en train de traiter de l'interpolation classique par DFT.

Corollaire 4.1 (Interpolation par DFT). $\forall t$,

$$X.\Delta_K * \text{sincd}_K(t) = \frac{1}{N} \sum_{|l| \leq K} \mathcal{DFT}((X_k)_{|k| \leq K}) [l] e^{2i\pi t \frac{l}{N}}.$$

Proof. Selon la proposition précédente,

$$\begin{aligned} X.\Delta_K * \text{sincd}_K(t) &= X.\Delta_K * \mathcal{DFT}^{-1}(e^{2i\pi t \frac{l}{N}}) \\ &= \sum_{|k| \leq K} X_k \mathcal{DFT}^{-1}(e^{2i\pi t \frac{l}{N}})[k]. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Parseval on obtient

$$\begin{aligned} X.\Delta_K * \text{sincd}_K(t) &= \frac{1}{N} \sum_{|l| \leq K} \mathcal{DFT}(X_k)[l] \mathcal{DFT}(\mathcal{DFT}^{-1}(e^{2i\pi t \frac{l}{N}}))[l] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{|l| \leq K} \mathcal{DFT}(X_k)[l] e^{2i\pi t \frac{l}{N}}. \end{aligned}$$

□

4.3.2 Représentation spectrale

En appliquant le théorème 4.4 avec $h_K(t) = \text{sincd}_K(t)$ on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. *Soit X_t un processus aléatoire Nyquist bande-limité μ , alors*

$$RMSE_{[X.\Delta_K * \text{sincd}_K]}(t)^2 = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} \frac{1}{2\pi} \int \left| \sum_{|k|>K} (e^{i\omega k} - e^{i\omega k \% N}) \frac{(-1)^k}{t-k} \right|^2 d\Psi(\omega). \quad (25)$$

Proof. Montrons d'abord que la composante moyenne est nulle. Son expression est

$$MSE_{\mu}(\text{sincd}_K) = \mu^2 \left| 1 - \sum_{|k|\leq K} \text{sincd}_K(t-k) \right|^2.$$

Mais selon l'équation (22),

$$\begin{aligned} \sum_{|k|\leq K} \text{sincd}_K(t-k) &= \mathcal{DFT} \left((\text{sincd}_K(t-k))_{|k|\leq K} \right) [l=0] \\ &= \mathcal{DFT} \left(\mathcal{DFT}^{-1} \left((e^{2i\pi t \frac{l}{N}})_{|l|\leq K} \right) \right) [l=0] \\ &= e^{2i\pi t \frac{0}{N}} = 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Le théorème 4.4 et la proposition 4.8 impliquent que

$$\begin{aligned} MSE_{d\Psi}(\text{sincd}_K) &= \frac{1}{2\pi} \int \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\omega k} \text{sinc}(t-k) - \sum_{|k|\leq K} e^{i\omega k} \text{sincd}_K(t-k) \right|^2 d\Psi(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left| \sum_{|k|>K} (e^{i\omega k} - e^{i\omega k \% N}) \text{sinc}(t-k) \right|^2 d\Psi(\omega) \end{aligned}$$

et enfin on utilise encore une fois l'identité $\sin(\pi(t-k)) = \sin(\pi t)(-1)^k$. □

Définition 4.14 (Enveloppe spectrale). On définit l'enveloppe spectrale par

$$B_{d\Psi}(t) := \frac{1}{2\pi} \int \left| \sum_{|k|>K} (e^{i\omega k} - e^{i\omega k \% N}) \frac{(-1)^k}{t-k} \right|^2 d\Psi(\omega).$$

4.4 RMSE d'un bruit blanc bande-limité

4.4.1 Formules explicites

Lemme 4.2. *Soit W_t un bruit blanc bande-limité de variance 1. On a :*

$$\begin{aligned} A_{d\Psi_W}(t) &= \sum_{|k|\leq K} \frac{\pi^2}{N^2 \sin^2(\frac{\pi}{N}(t-k))} \left(1 - \text{sinc}^2\left(\frac{1}{N}(t-k)\right) \right), \\ B_{d\Psi_W}(t) &= \sum_{|k|\leq K} \frac{2\pi^2}{N^2 \sin^2(\frac{\pi}{N}(t-k))} \left(1 - \text{sinc}\left(\frac{1}{N}(t-k)\right) \right). \end{aligned}$$

Les expressions ont été introduites aux définitions 4.10 et 4.14.

Proof. Sans perte de généralité, on suppose que $\mu = \mathbb{E}[W_t] = 0$. Sous cette hypothèse, on a

$$\begin{aligned} A_{d\Psi_W}(t) \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} &= \mathbb{E} \left[(W_t - W.\Delta_K * \text{sinc}(t))^2 \right] \\ B_{d\Psi_W}(t) \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} &= \mathbb{E} \left[(W_t - W.\Delta_K * \text{sincd}_K(t))^2 \right]. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
A_{d\Psi_W}(t) \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} &= \mathbb{E} \left[(W_t - \sum_{|k| \leq K} W_k \text{sinc}(t-k))(W_t - \sum_{|m| \leq K} W_m \text{sinc}(t-m)) \right] \\
&= R_W(0) - 2 \sum_{|k| \leq K} R_W(t-k) \text{sinc}(t-k) + \\
&\quad \sum_{|k|, |m| \leq K} R_W(m-k) \text{sinc}(t-k) \text{sinc}(t-m)
\end{aligned}$$

Comme $R_W(t) = \text{sinc}(t)$ et en particulier comme $R_W(k-m) = \mathbb{1}_{k=m}$, on obtient

$$\begin{aligned}
A_{d\Psi_W}(t) \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} &= 1 - 2 \sum_{|k| \leq K} \text{sinc}^2(t-k) + \sum_{|k| \leq K} \text{sinc}^2(t-k) \\
&= 1 - \sum_{|k| \leq K} \text{sinc}^2(t-k)
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
B_{d\Psi_W}(t) \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} &= \mathbb{E} \left[(W_t - \sum_{|k| \leq K} W_k \text{sincd}_K(t-k)) * (W_t - \sum_{|m| \leq K} W_m \text{sincd}_K(t-m)) \right] \\
&= R_W(0) - 2 \sum_{|k| \leq K} R_W(t-k) \text{sincd}_K(t-k) + \\
&\quad \sum_{|k|, |m| \leq K} R_W(m-k) \text{sincd}_K(t-k) \text{sincd}_K(t-m) \\
&= 1 - 2 \sum_{|k| \leq K} \text{sinc}(t-k) \text{sincd}_K(t-k) + \sum_{|k| \leq K} \text{sincd}_K^2(t-k)
\end{aligned}$$

De plus, utilisant l'identité de Parseval pour $\text{sincd}_K(t-k) = \mathcal{DFT}^{-1}(e^{2i\pi t \frac{l}{N}})$ on obtient

$$\sum_{|k| \leq K} \text{sincd}_K^2(t-k) = \frac{1}{N} \sum_{|l| \leq K} |e^{2i\pi t \frac{l}{N}}|^2 = 1 \quad (27)$$

On a donc montré que

$$\begin{aligned}
A_{d\Psi_W}(t) \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} &= 1 - \sum_{|k| \leq K} \text{sinc}^2(t-k) \\
B_{d\Psi_W}(t) \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} &= 2 \left(1 - \sum_{|k| \leq K} \text{sinc}(t-k) \text{sincd}_K(t-k) \right).
\end{aligned}$$

Finalement, grâce à l'équation (27),

$$\begin{aligned}
A_{d\Psi_W}(t) \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} &= \sum_{|k| \leq K} (\text{sincd}_K^2(t-k) - \text{sinc}^2(t-k)) \\
B_{d\Psi_W}(t) \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} &= 2 \sum_{|k| \leq K} (\text{sincd}_K^2(t-k) - \text{sinc}(t-k) \text{sincd}_K(t-k)),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
A_{d\Psi_W}(t) &= \pi^2 \sum_{|k| \leq K} \left(\frac{1}{N^2 \sin^2(\frac{\pi}{N}(t-k))} - \frac{1}{\pi^2(t-k)^2} \right) \\
&= \sum_{|k| \leq K} \frac{\pi^2}{N^2 \sin^2(\frac{\pi}{N}(t-k))} \left(1 - \text{sinc}^2(\frac{1}{N}(t-k)) \right).
\end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} B_{d\Psi_W}(t) &= 2\pi^2 \sum_{|k| \leq K} \left(\frac{1}{N^2 \sin^2(\frac{\pi}{N}(t-k))} - \frac{1}{\pi N(t-k) \sin(\frac{\pi}{N}(t-k))} \right) \\ &= \sum_{|k| \leq K} \frac{2\pi^2}{N^2 \sin^2(\frac{\pi}{N}(t-k))} \left(1 - \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{N}(t-k)\right) \right). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.6. *Soit W_t un bruit blanc Nyquist bande-limité de variance 1. Alors*

$$A_{d\Psi_W}(t) \leq B_{d\Psi_W}(t) \leq 2A_{d\Psi_W}(t).$$

Proof. Le lemme précédent peut être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_{d\Psi_W} &= \sum_{|k| \leq K} a_k, \\ B_{d\Psi_W} &= \sum_{|k| \leq K} b_k. \end{aligned}$$

avec $a_k, b_k \geq 0$ et $\frac{b_k}{a_k} = 2 \frac{1 - \operatorname{sinc}(\frac{1}{N}(t-k))}{1 - \operatorname{sinc}^2(\frac{1}{N}(t-k))} = \frac{2}{1 + \operatorname{sinc}(\frac{1}{N}(t-k))} := r(\frac{1}{N}(t-k))$. Une étude simple montre que la fonction r est paire et croissante sur $[0, 1]$. On obtient le résultat en ajoutant que $\forall |u| \leq 1$, $r(u) \in [r(0), r(1)] = [1, 2]$. □

On a fait le lien avec l'enveloppe obtenue dans le cas de l'interpolation de Shannon-Whittaker avec extension nulle. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.3. *Soit W_t un bruit blanc Nyquist bande-limité de variance 1. Alors, $\forall |t| < K + \frac{1}{2}$*

$$\begin{aligned} B_{d\Psi_W}(t) &\leq \frac{2}{\delta(t)} + \frac{2}{\Delta(t)}, \\ B_{d\Psi_W}(t) &\geq \frac{1}{\delta(t) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta(t) + \frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{28}$$

4.5 RMSE d'un signal sur-échantillonné

Lemme 4.3. $\forall |\omega| < \pi$ et $\forall |t| < K + 1$,

$$\left| \sum_{|k| > K} (e^{i\omega k} - e^{i\omega k \% N}) \frac{(-1)^k}{t-k} \right| \leq \frac{4}{|1 + e^{i\omega}|} \left(\frac{1}{\delta(t) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta(t) + \frac{1}{2}} \right).$$

Proof. On utilise la même structure que pour la preuve dans le cas de l'interpolation de Shannon-Whittaker tronquée (lemme 4.1). Nous devons trouver une majoration pour $|S(\tilde{b})_K^k|$ avec $\tilde{b}_k = (-e^{i\omega})^k - e^{i\omega k \% N} (-1)^k = b_k - c_k$ où $c_k = e^{i\omega k \% N} (-1)^k$. De fait, il suffit de trouver une majoration pour $|S(c)_K^k|$ car

$$S(\tilde{b})_K^k = S(b)_K^k - S(c)_K^k.$$

Pour ce faire, remarquons que comme $c_{k+qN} = (-1)^q c_k$, on peut classer les termes de $S(c)_K^k = \sum_{K < k' \leq k} c_{k'}$ en groupe de N termes, et chacun des groupes compensera le précédent. Finalement il restera moins de N termes. La classification repose sur le fait que $K < k' \leq k$ est équivalent à

$$q_N(k') \geq 1 \text{ and } \begin{cases} q_N(k') < q_N(k) \\ \text{or} \\ (q_N(k') = q_N(k) \text{ and } k' \% N \leq k \% N) \end{cases}.$$

On en déduit l'expression suivante pour $S(c)_K^k$ où q' et r' représentent $q_N(k')$ et $k' \% N$

$$\begin{aligned} S(c)_K^k &= \sum_{1 \leq q' < q_N(k)} \sum_{|r'| \leq K} c_{q'N+r'} + \sum_{-K \leq r' \leq k \% N} c_{q_N(k)N+r'} \\ &= \left(\sum_{1 \leq q' < q_N(k)} (-1)^{q'} \right) \sum_{|r'| \leq K} c_{r'} + (-1)^{q_N(k)} \sum_{-K \leq r' \leq k \% N} c_{r'}. \end{aligned}$$

Si $q_N(k)$ est impaire, alors le terme de gauche s'annule et

$$|S(c)_K^k| = \left| \sum_{-K \leq r' \leq k \% N} c_{r'} \right| \leq \frac{2}{|1 + e^{i\omega}|}.$$

Si $q_N(k)$ est pair, alors on doit inclure un groupe de N termes de plus de la manière suivante

$$\begin{aligned} S(c)_K^k &= \sum_{1 \leq q' \leq q_N(k)} \sum_{|r'| \leq K} c_{q'N+r'} - \sum_{k \% N < r' \leq K} c_{q_N(k)N+r'} \\ &= \left(\sum_{1 \leq q' \leq q_N(k)} (-1)^{q'} \right) \sum_{|r'| \leq K} c_{r'} + (-1)^{q_N(k)+1} \sum_{k \% N < r' \leq K} c_{r'}. \end{aligned}$$

Encore une fois, le premier terme s'annule et

$$|S(c)_K^k| = \left| \sum_{k \% N < r' \leq K} c_{r'} \right| \leq \frac{2}{|1 + e^{i\omega}|}.$$

Finalement quelle que soit la parité de $q_N(k)$,

$$S(\tilde{b})_K^k \leq \frac{4}{|1 + e^{i\omega}|}.$$

□

Proposition 4.7. Soit $\alpha < 1$ et $d\Psi$ un spectre contenu dans $\{|\omega| \leq \alpha\pi\}$, alors

$$B_{d\Psi}(t) \leq 4\sigma_\alpha^2 \left(\frac{1}{\delta(t) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta(t) + \frac{1}{2}} \right)^2, \quad (29)$$

où

$$\sigma_\alpha^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \alpha\pi} \frac{4}{|1 + e^{i\omega}|^2} d\Psi(\omega). \quad (30)$$

4.5.1 Cas général

Le théorème suivant résume le comportement de la majoration de l'erreur.

Théorème 4.9. Soit X_t un processus aléatoire et $0 \leq \alpha < 1$ tel que $\mathbb{1}_{|\omega| \geq \alpha\pi} d\Psi_X(\omega)$ soit borné. On a montré que la majoration de $\text{RMSE}_{[X, \Delta_K * \text{sincd}]}(t)^2$ pouvait se décomposer de manière suivante (similaire à celle obtenue par troncature de l'interpolation de Shannon-Whittaker)

- une modulation,
- une enveloppe moyenne (nulle)
- une enveloppe basse-fréquence et
- une enveloppe de bruit blanc.

$$RMSE_{[X.\Delta_K * \text{sincd}_K]}(t)^2 \leq \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ + \\ 4\sigma_\alpha^2 \left(\frac{1}{\delta(t) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta(t) + \frac{1}{2}} \right)^2 \\ + \\ 2\sigma_\alpha'^2 \left(\frac{1}{\delta(t)} + \frac{1}{\Delta(t)} \right) \end{pmatrix},$$

où

$$\sigma_\alpha'^2 := \|\mathbb{1}_{|\omega| \geq \alpha\pi} d\Psi_X(\omega)\|_\infty$$

et

$$\sigma_\alpha^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \alpha\pi} \frac{4}{|1 + e^{i\omega}|^2} d\tilde{\Psi}_\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \alpha\pi} \frac{2}{1 + \cos(\omega)} d\tilde{\Psi}_\alpha(\omega).$$

Remarque 4.1. Les principales différences avec le cas de tronquée de Shannon-Whittaker sont que

- l'enveloppe moyenne s'annule
- les coefficients sont plus grands (au plus deux fois en terme de RMSE) pour le cas périodique.

4.6 Extension au cas multidimensionnel

Dans la partie 4.1, on traitait de processus aléatoires sur \mathbb{R}^d et de système de reconstruction quelconques h_K . Ceci a abouti à la représentation spectrale de la RMSE (voir théorème 4.3), dont on déduit les majorations par la suite. Nous n'avons été capables d'obtenir ces majorations que pour deux systèmes de reconstruction particuliers et dans le cas unidimensionnel. Le second aspect peut s'avérer problématique vu que l'on s'intéresse à des images qui sont bidimensionnelles. Ici, on étend les résultats précédents au cas multidimensionnel lorsque la reconstruction est séparable.

4.6.1 Comportement général de la MSE : cas multidimensionnel

Considérant le cas classique où le système de reconstruction est séparable, alors la reconstruction elle-même est séparable au sens où $\tilde{X}_t^{[h_K, K]} := \sum_{|k| \leq K} X_k \prod_{j=1}^d h_{K_j}(t_j - k_j)$ peut être obtenu en appliquant successivement des reconstructions unidimensionnelles. En effet,

$$\tilde{X}_t^{[h_K, K]} := \sum_{|k_1| \leq K_1} \cdots \left(\sum_{|k_d| \leq K_d} X_k h_{K_d}(t_d - k_d) \right) \cdots h_{K_1}(t_1 - k_1) \quad (31)$$

Se basant sur cette observation, il peut être tentant de déduire que les erreurs induites par chacune des reconstructions unidimensionnelles s'accumulent de telle sorte que l'erreur globale soit obtenue par somme directe. Ce n'est malheureusement pas le cas puisque les propriétés statistiques du processus aléatoire original ne sont pas préservées lors des reconstructions.

Remarque 4.2. Rappelons la représentation spectrale obtenue au théorème 4.3:

$$MSE_\mu(h_K) := \mu^2 \left| 1 - \prod_{j=1}^d \Delta_{K_j} * h_{K_j}(t_j) \right|^2,$$

$$MSE_{d\Psi}(t)(h_K) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int \left| 1 - \prod_{j=1}^d \left(e^{i\omega_j \cdot (-t_j)} \Delta_{K_j} \right) * h_{K_j}(t_j) \right|^2 d\Psi(\omega).$$

On a utilisé une formule légèrement différente (mais équivalente) pour la composante spectrale pour souligner que chacune des composantes fait intervenir des termes de la forme

$$\left| 1 - \prod_{j=1}^d a_j \right|.$$

Dans les sections 4.2 et 4.3, nous avons obtenus des majorations unidimensionnelles de la forme $|1 - a_j| \leq u_j$. Notre but est d'utiliser ces résultats dans le cas multidimensionnel. Une manière de faire est d'utiliser l'identité algébrique suivante (obtenue par récurrence sur d)

$$1 - \prod_{j=1}^d a_j = \sum_{j=1}^d (1 - a_j) \prod_{m < j} a_m.$$

D'où,

$$\left| 1 - \prod_{j=1}^d a_j \right| \leq \sum_{j=1}^d |1 - a_j| \prod_{m < j} |a_m| \leq \sum_{j=1}^d u_j \prod_{m < j} (1 + u_m). \quad (32)$$

Appliquant l'identité 32 dans le contexte bidimensionnel qui est celui des images on obtient ce qui suit.

Proposition 4.8. *Soit h_K un noyau de reconstruction étant sinc ou sinc $_d$ et soit X_{t_1, t_2} un processus aléatoire bande-limité. Alors,*

$$\begin{aligned} RMSE_{[X, \Delta_K * h_K]}(t_1, t_2)^2 &= \frac{\sin^2(\pi t_1)}{\pi^2} \mathcal{O} \left(\frac{1}{\delta_1(t)^2} + \frac{1}{\delta_1(t)} \right) + \frac{\sin^2(\pi t_2)}{\pi^2} \mathcal{O} \left(\frac{1}{\delta_2(t)^2} + \frac{1}{\delta_2(t)} \right) + \\ &\quad \frac{\sin^2(\pi t_1)}{\pi^2} \frac{\sin^2(\pi t_2)}{\pi^2} \mathcal{O} \left(\frac{1}{\delta_1(t)^2} + \frac{1}{\delta_1(t)} \right) \mathcal{O} \left(\frac{1}{\delta_2(t)^2} + \frac{1}{\delta_2(t)} \right) \end{aligned}$$

où $\forall j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \delta_j(t) &:= \min(K_j + \frac{1}{2} - t_j, K_j + \frac{1}{2} + t_j), \\ \Delta_j(t) &:= \max(K_j + \frac{1}{2} - t_j, K_j + \frac{1}{2} + t_j). \end{aligned} \quad (33)$$

Remarque 4.3. Les coefficients ne sont volontairement plus explicités car ils n'ont plus d'expressions simples. L'inégalité $|a_i| \leq (1 + u_i)$ pouvant être très large, des majorations plus fines peuvent certainement être obtenues.

Quoi qu'il en soit le comportement général de la RMSE peut tout de même s'interpréter. La majoration montre que lorsque l'on considère des régions éloignées du bord le comportement est essentiellement le même qu'en 1D (ou plus précisément on a la somme des erreurs obtenues par deux interpolations 1D). Près du bord en revanche, l'erreur peut se comporter comme le produit de ces erreurs.

4.6.2 Bruit blanc

Comme la contribution bruit blanc de la MSE a été **identifié** comme la principale lorsque l'on est loin du bord de l'image, nous développons une majoration plus précise pour de tels signaux. La remarque 4.2 peut être raffinée et on obtient une majoration plus simple et plus précise. En effet, nous montrons que la majoration de l'erreur est parfaitement additive dans ce cas. On se basera sur l'expression suivante de la MSE.

Proposition 4.9. *Soit h_K un système de reconstruction, et soit W_t un bruit blanc bande-limité de variance 1. Alors,*

$$MSE_{d\Psi_W}(t)(h_K) = 1 - \prod_{j=1}^d \sum_{|k_j| \leq K_j} h_{K_j}(t_j - k_j) (2\text{sinc}(t_j - k_j) - h_{K_j}(t_j - k_j)) \quad (34)$$

Proof. Pour simplifier les notations on pose

$$a_j(\omega_j, t_j) := \left(e^{i\omega_j(\cdot - t_j)} \Delta_{K_j} \right) * h_{K_j}(t_j) = \sum_{|k_j| \leq K_j} h_{K_j}(t_j - k_j) e^{i\omega_j(t_j - k_j)}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
MSE_{d\Psi_W}(t)(h_K) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \left| 1 - \prod_{j=1}^d \left(e^{i\omega_j(\cdot - t_j)} \Delta_{K_j} \right) * h_{K_j}(t_j) \right|^2 d\Psi_W(\omega) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \left| 1 - \prod_{j=1}^d a_j(\omega_j, t_j) \right|^2 d\Psi_W(\omega) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int 1 - 2 \prod_{j=1}^d a_j(\omega_j, t_j) + \prod_{j=1}^d a_j(\omega_j, t_j)^2 d\Psi_W(\omega) \\
&= R_W(0) - \prod_{j=1}^d \int_{-\pi}^{\pi} 2a_j(\omega_j, t_j) - a_j(\omega_j, t_j)^2 d\omega_j
\end{aligned}$$

Puis on utilise que $R_W(0) = 1$, $\int_{-\pi}^{\pi} a_j(\omega_j, t_j) d\omega_j = \sum_{|k_j| \leq K_j} h_{K_j}(t_j - k_j) \text{sinc}(t_j - k_j)$ et

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} a_j(\omega_j, t_j)^2 d\omega_j &= \sum_{|k_j| \leq K_j, |m_j| \leq K_j} h_{K_j}(t_j - k_j) h_{K_j}(t_j - m_j) \text{sinc}(m_j - k_j) \\
&= \sum_{|k_j| \leq K_j} h_{K_j}(t_j - k_j)^2.
\end{aligned}$$

□

De manière à appliquer des raisonnements plus fins que ceux de la remarque 4.2, nous avons besoin d'une majoration fine pour les termes du produit.

Lemme 4.4. *Soit h_K un système de reconstruction vérifiant $\forall K, \forall |t| \leq K + \frac{1}{2}$,*

$$\sum_{|k| \leq K} h_K(k - t) \text{sinc}(t - k) \geq 0$$

et

$$\sum_{|k| \leq K} |h_K(k - t)|^2 \leq 1$$

Alors,

$$\left| \sum_{|k| \leq K} h_K(t - k) (2 \text{sinc}(t - k) - h_K(t - k)) \right| \leq 1 \tag{35}$$

Proof. Il s'agit d'une simple application de l'inégalité de Cauchy-Scharwz. □

Il est aisé de voir que sinc_K et sinc vérifient les hypothèses du lemme précédent. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 4.10. *Soit h_K un noyau de reconstruction étant sinc ou sinc_K , et soit W_t un bruit blanc bande-limité de variance 1. Alors,*

$$MSE_{d\Psi_W}(t)(h_K) \leq C \sum_{j=1}^d \frac{\sin^2(\pi t_j)}{\pi^2} \left(\frac{1}{\delta_j(t)} + \frac{1}{\Delta_j(t)} \right) \tag{36}$$

où $C = 1$ pour sinc et $C = 2$ pour sinc_K et $\forall j$

$$\begin{aligned}
\delta_j(t) &:= \min\left(K_j + \frac{1}{2} - t_j, K_j + \frac{1}{2} + t_j\right), \\
\Delta_j(t) &:= \max\left(K_j + \frac{1}{2} - t_j, K_j + \frac{1}{2} + t_j\right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Proof. Soit $b_j := \sum_{|k| \leq K} h_K(t-k)(2\text{sinc}(t-k) - h_K(t-k))$. On sait que $|b_j| \leq 1$. Puis

$$\begin{aligned} MSE_{d\Psi_W}(t)(h_K) &= 1 - \prod_{j=1}^d b_j \\ &= \sum_{j=1}^d (1 - b_j) \prod_{m < j} b_m \\ &\leq \sum_{j=1}^d |1 - b_j| \prod_{m < j} |b_m| \\ &\leq \sum_{j=1}^d |1 - b_j| \end{aligned}$$

Comme $1 - b_j$ correspond à la MSE dans le cas unidimensionnel, on peut utiliser le théorème 4.5 et le corollaire 4.3 pour conclure. \square

4.7 Expériences

Dans cette section, nous validons les majorations théoriques obtenues en les comparant à un estimateur empirique de la RMSE. Dans un premier temps nous expliquons comment obtenir cet estimateur. Comme les majorations théoriques reposent sur les statistiques du spectre de l'image, nous avons aussi besoin d'une méthode permettant de les évaluer. Enfin, nous considérons une série d'images test et comparons les majorations et l'estimateur pour les deux interpolations étudiées précédemment.

4.7.1 Estimateur empirique

La principale difficulté pour estimer la RMSE (et l'erreur de troncature de manière générale) est que l'on a besoin de connaître les valeurs originales du signal que l'on reconstruit afin de les comparer aux valeurs reconstruites. Au lieu de générer des signaux synthétiques on se base sur les remarques suivantes. Si on possède une image de grand taille on peut calculer l'image interpolée en utilisant toute l'image et considérer qu'il s'agit du signal original. C'est ce que l'on appelle improprement le signal "ground-truth". On évalue alors la précision de l'interpolation en comparant avec l'interpolée obtenue avec une portion de l'image (voir figure 3). Nous calculerons toujours le *ground truth* par la méthode de Shannon-Whittaker tronquée. Si les bords respectifs de l'image entière et de la portion sont assez éloignés les erreurs introduites dans la référence devraient être relativement plus faibles que celle due à la méthode d'interpolation testée. Comme nous souhaitons une estimation la plus précise possible on utilisera la modification proposée dans l'équation (9) afin d'annuler la composante moyenne de la MSE.

Comme nous connaissons les bornes théoriques pour la méthode de Shannon-Whittaker tronquée nous pouvons les intégrer dans l'estimateur empirique. Pour expliquer comment faire nous introduisons d'abord quelques notations. Notons, $\tilde{X}_t^{gt} := X \cdot \Delta_{K'} * \text{sinc}(t)$ le "ground-truth" et $\tilde{X}_t^h := X \cdot \Delta_K * h_K(t)$ l'interpolation évaluée pour $K \ll K'$. Ce que l'on cherche à estimer est

$$MSE[\tilde{X}^{gt} - \tilde{X}^h](t) := \mathbb{E} \left[(\tilde{X}_t^{gt} - \tilde{X}_t^h)^2 \right].$$

Et nous souhaitons comparer cela avec une majoration théorique obtenue précédemment. On peut remarquer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(\tilde{X}_t^{gt} - \tilde{X}_t^h)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left((\tilde{X}_t^{gt} - X_t) - (X_t - \tilde{X}_t^h) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(\tilde{X}_t^{gt} - X_t)^2 \right] + \mathbb{E} \left[(\tilde{X}_t^h - X_t)^2 \right] - 2\text{cov}(\tilde{X}_t^{gt} - X_t, \tilde{X}_t^h - X_t) \\ &\leq MSE[\tilde{X}^{gt}](t) + MSE[\tilde{X}^h](t) + 2RMSE[\tilde{X}^{gt}](t)RMSE[\tilde{X}^h](t). \end{aligned}$$

Le terme de covariance $-2\text{cov}(\tilde{X}_t^{gt} - X_t, \tilde{X}_t^h - X_t)$ sera généralement négatif car des échantillons manquants dans \tilde{X}_t^{gt} le sont aussi dans \tilde{X}_t^h . De plus on a vu que la contribution majeure sera $MSE[\tilde{X}^h]$ si les bords sont suffisamment éloignés. L'interprétation en terme de RMSE est plus intéressante.

$$RMSE[\tilde{X}^{gt} - \tilde{X}^h](t) \leq RMSE[\tilde{X}^{gt}](t) + RMSE[\tilde{X}^h](t).$$

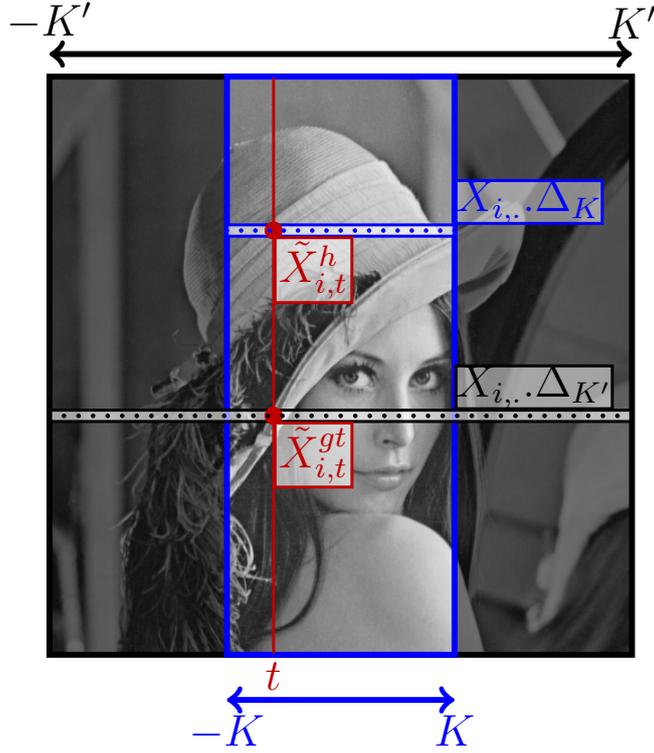


Figure 3: L'estimateur de la RMSE est basé sur la comparaison entre l'interpolation obtenue avec l'image partielle (rectangle bleu) et l'interpolation de Shannon-Whittaker tronquée de l'image entière. Utilisant soit une ligne partielle $X_{i,..}\Delta_K$ soit une ligne complète $X_{i,..}\Delta_{K'}$, nous pouvons calculer deux valeurs interpolées à la position t : $\tilde{X}_{i,t}^h$ et $\tilde{X}_{i,t}^{gt}$. Puis, nous estimons la moyenne quadratique de la différence en moyennant empiriquement les lignes.

Mais comme le terme de covariance est généralement négatif, l'estimateur de la RMSE sera plus proche de $RMSE[\tilde{X}^h](t) - RMSE[\tilde{X}^{gt}](t)$, ce qui signifie que la RMSE est sous-estimée. On notera que la sur-estimation de la RMSE aurait été problématique pour valider les résultats dans le cas d'un dépassement de la borne théorique.

Enfin, nous précisons la formule de l'estimateur empirique. Nous supposons que l'image d'entrée possède M lignes et que l'interpolation est faite sur les lignes. L'estimateur empirique est alors donné par la moyenne des erreurs quadratiques sur les lignes :

$$MSE_{emp}[\tilde{X}^{gt} - \tilde{X}^h](t) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\tilde{X}_{i,t}^{gt} - \tilde{X}_{i,t}^h \right)^2.$$

4.7.2 Statistiques

En observant attentivement les théorèmes 4.7 et 4.9, on se rend compte que les majorations théoriques dépendent de trois statistiques : μ_X , σ_α^2 et $\sigma'_\alpha{}^2$. Dans notre étude expérimentale comme nous considérons des images réelles nous n'avons pas d'accès direct à ces statistiques. Nous devons les estimer sur l'image.

D'une part, la moyenne μ_X peut être évaluée en utilisant l'estimateur empirique classique

$$\mu_X \simeq \frac{1}{MN} \sum_{i,j} X_{i,j}.$$

D'autre part, σ_α^2 et $\sigma'_\alpha{}^2$ sont des statistiques spectrales qui nécessitent une estimation du spectre. Nous devons rester cohérent vis à vis du choix du calcul de l'interpolation le long des lignes. Nous considérons donc chaque ligne $X_{i,t}$ comme la réalisation d'un processus aléatoire X_t où t est la coordonnée le long de la ligne.

Un théorème classique du à Wiener et Khintchine établit que

$$d\Psi_X(\omega) = d\mathbb{E}[|\mathcal{F}(X)(\omega)|^2].$$

Nous supposons lors de l'estimation que le spectre est absolument continu

$$d\Psi_X(\omega) = \psi_X(\omega)d\omega.$$

Alors le théorème de Wiener-Khintchine revient à l'identité

$$\psi_X(\omega) = \mathbb{E}[|\mathcal{F}(X)(\omega)|^2].$$

De plus, grâce à l'algorithme de FFT, pour chaque ligne i , $|\mathcal{F}(X_i)|^2(\omega)$ peut être estimé à des positions fréquentielles uniformément réparties ω_l on $[-\pi, \pi]$, plus précisément $\omega_l := \frac{2\pi l}{N}$ for $|l| \leq K$. Nous pouvons empiriquement moyenner ces valeurs pour obtenir $\psi_X(\omega_l) \simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |\mathcal{DFT}(X_i)|^2(\omega_l)$. À partir de là, les estimateurs de σ'_α et σ_α^2 sont obtenus directement

$$\sigma'_\alpha \simeq \max_{\omega_l \geq \alpha\pi} (\psi_X(\omega_l)),$$

et

$$\sigma_\alpha^2 \simeq \frac{1}{N} \sum_{\omega_l} \frac{2}{1 + \cos(\omega_l)} \tilde{\psi}_\alpha(\omega_l),$$

avec

$$\tilde{\psi}_\alpha(\omega_l) = \max\left(0, \psi_\alpha(\omega_l) - \sigma'^2_\alpha\right).$$

Remarque 4.4. α peut être choisi arbitrairement dans $[0, 1]$. Ceci nous donne un degré de liberté pour optimiser la finesse de la majoration. En pratique on évalue la majoration pour plusieurs valeurs de α et gardons la plus petite valeur.

Remarque 4.5. On ne peut pas utiliser directement les résultats 2D car il n'y a pas de méthode similaire pour estimer les statistiques même si ces dernières ont des expressions semblables. Il faudrait une dimension de plus (et donc une image en 3D) pour effectuer une moyenne empirique

4.7.3 Résultats

Ici nous interprétons les résultats obtenus pour différentes images test. Pour chacune **d'elle**, nous affichons dans une première figure (comme la figure 4) l'image entière et un masque précisant quelle région est sélectionnée pour le test de précision de la méthode d'interpolation. Dans la même figure, nous affichons le spectre estimé de l'image. Ceci permet de savoir si l'image contient une composante bruit blanc importante ou si elle est sur-échantillonnée.

Les résultats sont ensuite présentés dans une seconde figure (comme la figure 5), où la courbe de la RMSE estimée est dominée par la courbe de majoration théorique. À chaque fois, deux sous-figures sont utilisées pour montrer les résultats pour chacune des méthodes d'interpolation. Par soucis de comparaison, une troisième sous-figure montre la RMSE estimée dans le cas d'une B-spline d'ordre 9.

Pour illustrer les différents types de comportement prévus via les majorations théoriques, nous avons choisi trois images avec des contenus spectraux différents. L'image du jardin correspond à une forte texture semblable à un bruit blanc, Lena à une texture modérée et le dé à peu de texture. D'autres exemples sont visibles sur la demo interactive IPOL¹.

Une première remarque est que toutes les expériences valident les majorations théoriques qui sont par ailleurs proche de l'erreur empirique. À y voir de plus près, il semblerait que les majorations soient plus fines lorsque le contenu spectral est proche de celui d'un bruit blanc. Au delà **du sujet de la** validation, l'estimateur de RMSE permet de tirer des conclusions sur la précision des différentes techniques d'interpolation. Un fait frappant concerne la comparaison entre la précision des méthodes et l'erreur de quantification (que l'on rappelle être égale à 0.29). Dans des cas avec une composante bruit blanc modérée ou forte, l'erreur

¹available at http://dev.ipol.im/~simonl/ipol_demo/loic_truncate/

d'interpolation est partout plus grande que l'erreur de quantification. En effet, au centre de l'image (qui est à distance 75 du bord), elles sont égales à 0.7, (resp. 0.8) pour l'image du jardin et 0.3 (resp. 0.4) pour Lena, avec l'interpolation de Shannon-Whittaker tronquée (resp. périodique).

Bien sur, ceci ne sera plus vrai pour des images plus grandes. Comme nous avons montré que la RMSE pour l'interpolation de Shannon-Whittaker varie comme la racine carrée de la distance au bord de l'image, on peut imaginer que ces erreurs deviendront **négligeables aux** erreurs de quantifications pour des positions plus loin que 750 pixels du bord.

Considérant la comparaison entre les méthodes reposants sur la formule de Shannon-Whittaker et les B-splines, on remarque surtout une différence dans la forme de la courbe. Dans le cas des B-splines l'erreur décroît beaucoup plus vite puis l'erreur demeure approximativement constante. Malheureusement cette constante est bien plus grande que celle obtenue loin du bord par les méthodes de Shannon-Whittaker.

4.7.4 Commentaires

Nous venons de voir que l'erreur de troncature dépend de la distance au bord de l'image et du contenu (spectral ou non) de l'image. Dans un premier temps il est donc préférable (et c'est peu étonnant) d'avoir des images de très grande taille. L'estimation que nous obtenons donne dans les cas les moins texturés une erreur de l'ordre de celle de la quantification ce qui est une bonne nouvelle. En revanche en présence de textures ou bien tout simplement en passant à un nombre de bits plus élevé pour la quantification, il arrive que l'erreur de troncature ne soit plus du tout négligeable ce qui peut s'avérer problématique. Par exemple il a déjà été expliqué que dans le cadre de la stéréoscopie il est vital d'avoir une interpolation la plus précise possible. Il serait donc profitable de travailler loin du bord pour limiter les effets au maximum. Ensuite, nous avons vu que l'erreur dépend de la méthode d'interpolation choisie. Notre estimation empirique de l'erreur est applicable à toute méthode d'interpolation linéaire invariante par translation donc on peut chercher quelle méthode fournisse le moins d'erreur.

Nous y reviendrons dans la suite mais il semblerait que des méthodes basées sur la décomposition *periodic plus smooth* fournissent de très bons résultats et en particulier une décroissance très rapide à partir du bord.

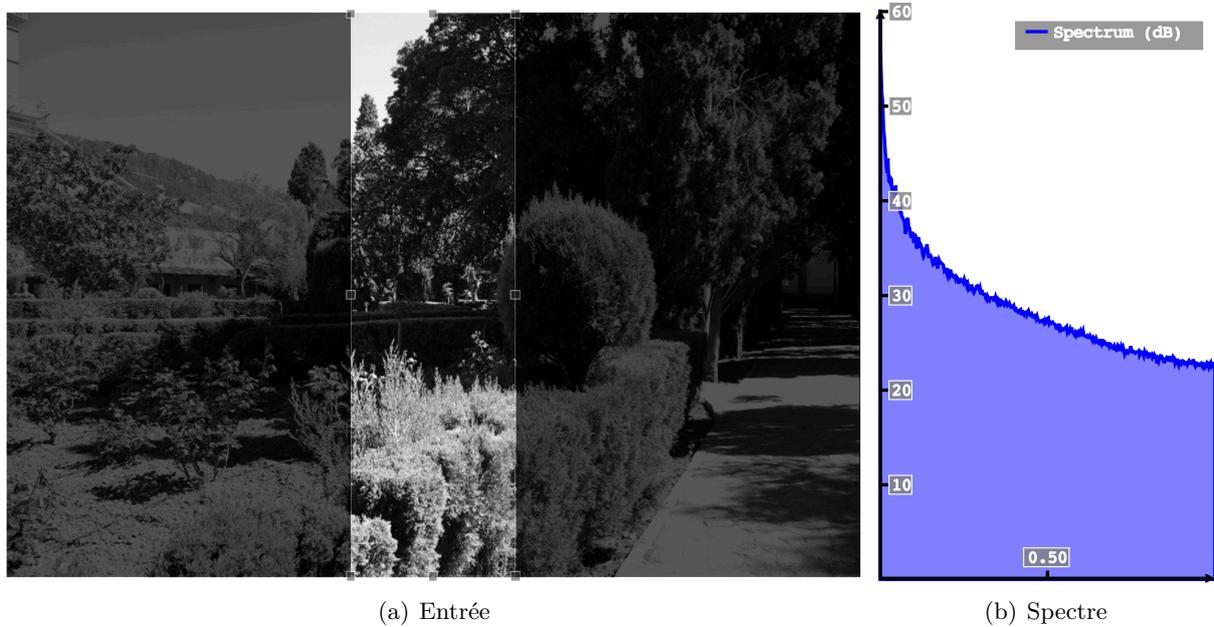


Figure 4: Le jardin et son spectre. La forte composante bruit blanc se lit dans le spectre qui décroît lentement.

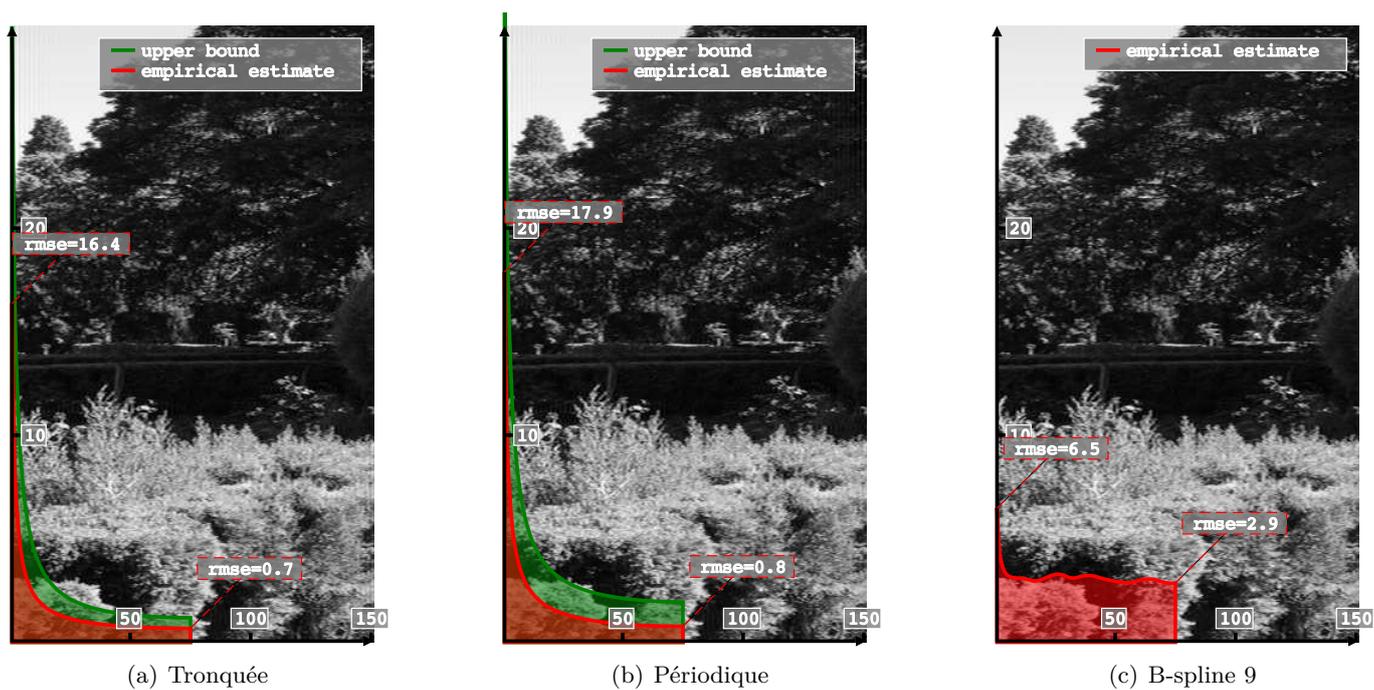


Figure 5: Estimateur de la RMSE et majoration pour le jardin. L'image interpolée est affichée dans le fond. La forte composante en bruit blanc fait que la RMSE décroît lentement.

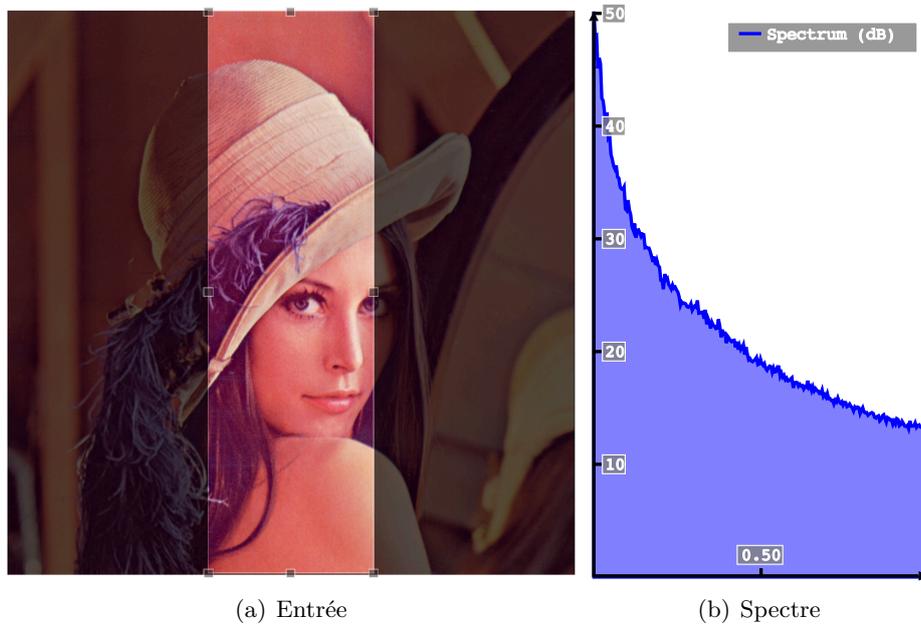


Figure 6: Lena et son spectre.

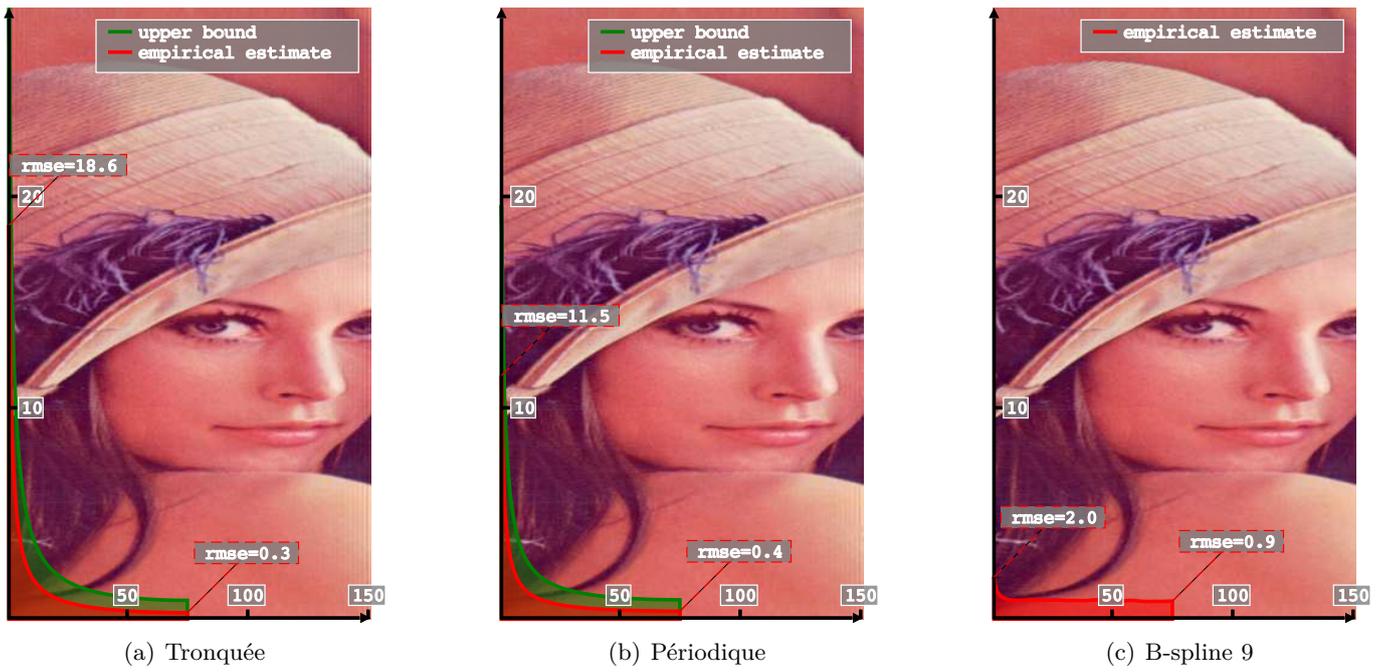


Figure 7: Estimateur de la RMSE et majoration pour Lena. L'image interpolée est affichée dans le fond.

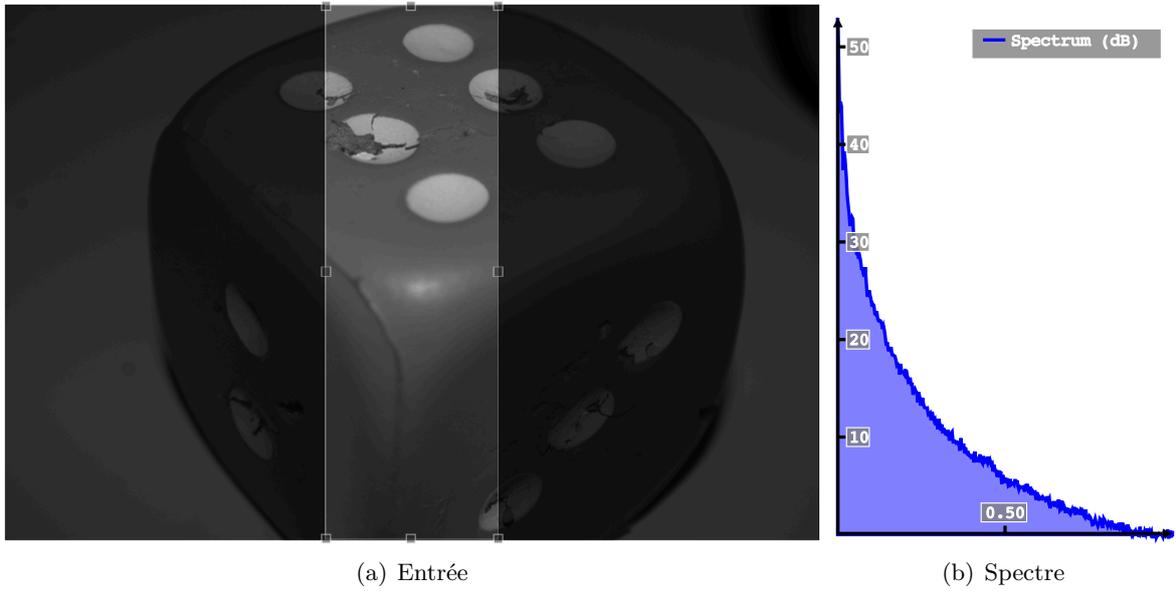


Figure 8: Le dé et son spectre. Le spectre montre que l'image est quasiment sur-échantillonnée.

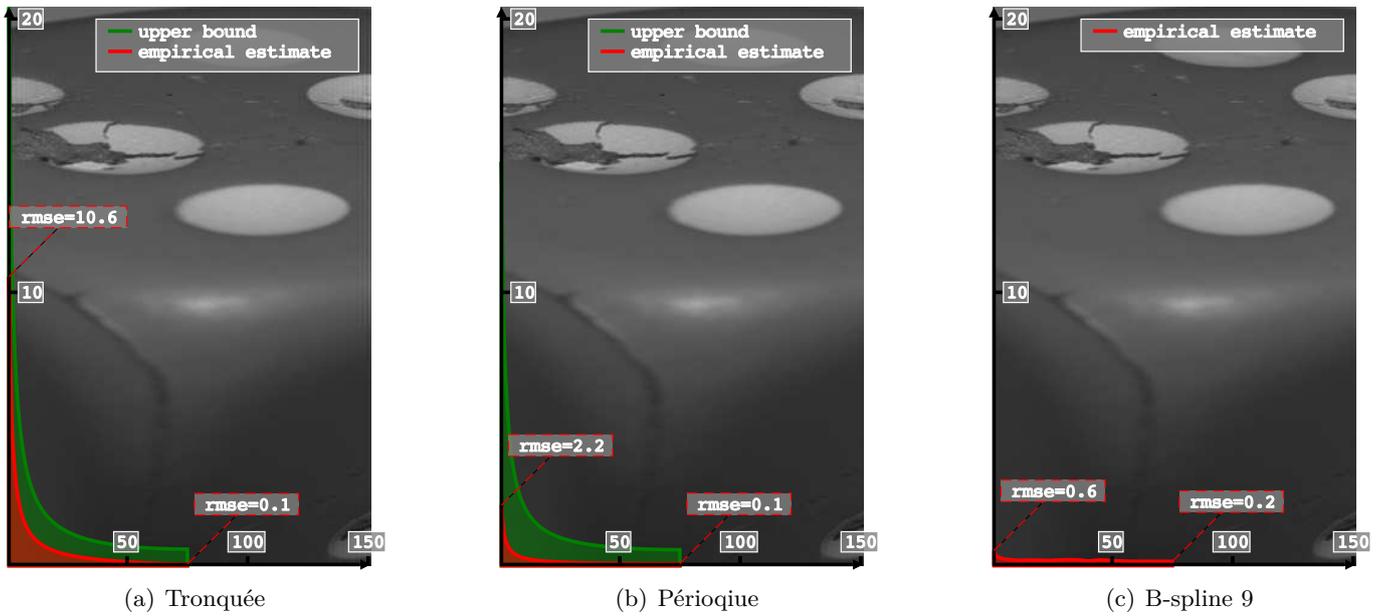


Figure 9: Estimateur de la RMSE et majoration pour le dé. L'image interpolée est affichée dans le fond. L'image étant quasiment sur-échantillonnée la décroissance de la RMSE est rapide et donne une valeur minimale inférieure à l'erreur de quantification.

5 Image parfaite

Avec les connaissances que nous avons désormais sur les erreurs contenues dans les images nous allons essayer de développer un procédé de création d'image parfaite i.e d'image sans bruit et sans *aliasing*. Évidemment il n'est pas envisageable d'éliminer totalement les erreurs donc le terme "parfait" signifie plus exactement que l'image est perturbée le moins possible. En utilisant ces images, on cherchera à estimer l'erreur résiduelle introduite par le bruit (malgré sa diminution), l'*aliasing* et la troncature.

Comme introduit précédemment notre méthode se base sur l'accumulation et la fusion appliquées à un *burst*. Il est essentiel de garder à l'esprit que l'on ne va pas chercher à améliorer la qualité d'une image donnée mais bien construire une image en tirant avantage du nombre potentiellement élevé d'échantillons fourni par le *burst*.

Avant d'aller plus loin nous devons préciser ce que nous entendons par *burst* pour avoir une idée plus précise de ce sur quoi nous travaillons. On appelle *burst* une série de photographies (dans notre cas d'images digitales) d'une scène unique prises d'un même point de vue. On supposera que la scène est fixe, il n'y aura donc pas d'effet de *ghosting* dû au mouvement d'objets. En conséquence l'intervalle de temps entre chaque prise devra être assez court de manière à limiter les possibles modifications de la scène et de manière indirecte les variations de luminosité.

Dans la pratique la manière la plus simple d'obtenir un *burst* est de poser un appareil photographique sur un trépied et de photographier un paysage ou un bâtiment. C'est d'ailleurs le protocole qui a été utilisé par Carlo De Franchis et Loïc Simon pour obtenir le *burst* de 111 photos qui nous servira tout au long de nos expériences. Ces derniers ont utilisé un appareil grand public (Canon EOS 3D) pour photographier un mur. La figure 10 montre une des images obtenues qui est de grande taille (3504 par 2336 pixels) et d'assez bonne qualité. En fait, l'appareil renvoie pour chaque prise deux images, une au format RAW et l'autre au format JPEG. Pour le moment on utilisera les images JPEG qui sont plus simples à manipuler bien que l'on ne contrôle pas toute la chaîne d'acquisition (compression, quantification sur 8 bits, correction de la distorsion, ...). En regardant plus attentivement les images obtenues on peut faire les remarques suivantes qui vont être utiles pour la suite :

- Les images ne sont pas recalées. En passant d'une image à l'autre on distingue un petit décalage de l'ordre de quelques pixels. Même si l'appareil n'était ni tenu ni touché (utilisation d'une télécommande) lors de l'acquisition, il est soumis à des micro-vibrations. De plus, il y a tout un mécanisme lors de la prise qui provoque le mouvement d'un miroir. Il est alors impossible de garantir un déplacement identique à chaque fois.
- Il paraît assez clair que l'illumination globale semble changer d'une image à l'autre. Ceci se vérifie en notant que les moyennes des images (*a priori* non sujettes au bruit) varient légèrement.
- Même si la qualité des images est bonne au sens où à première vue on peut voir des structures hautes-fréquences et peu de bruit, il se trouve que les images sont légèrement aliasées et bruitées. En théorie le bruit n'est pas problématique puisque l'on cherche justement à le supprimer. En revanche on ignorera l'*aliasing* pour le moment (nous en reparlerons en section 8 lors de l'introduction d'une méthode de super-résolution).

Remarque : En fait nous disposons de deux *burst* du même type mais pris à deux endroits différents. L'idée à terme est d'arriver à créer une image parfaite pour chacun des *burst* et d'obtenir une carte des disparités précise et fiable.

5.1 Algorithme de *burst denoising*

L'algorithme d'accumulation et fusion que nous utilisons est plus précisément nommé algorithme de *burst denoising* [2][4]. On notera quelques modifications par rapport à l'algorithme original mais la structure générale reste la même. Celle-ci est présentée rapidement dans ses grandes lignes dans la suite. Une présentation et une étude détaillée de l'étape de recalage est proposée à la section 6.

Étant donné un *burst* $(u_i)_{1 \leq i \leq M}$ ($M = 111$ pour nos applications), on choisit une image de référence u_j sur laquelle on va recalculer les autres images. Le recalage s'effectue en trouvant des correspondances entre les points SIFT des images puis en trouvant par un algorithme de type RANSAC la "meilleure" homographie modélisant la transformation liant les correspondances. Enfin, le recalage se conclut après un



Figure 10: Une des images tirée du *burst* obtenu par Carlo De Franchis et Loïc Simon qui nous servira tout au long de nos expérimentations. On remarque sur sa transformée de Fourier discrète des artefacts typiques de l'*aliasing*

ré-échantillonnage de l'image (à recalcer) dans les coordonnées de références. On effectue ensuite la moyenne de ces images recalées. L'image ainsi obtenue est alors exprimée dans le même référentiel que l'image de référence u_j et diffère de cette dernière uniquement par la suppression du bruit. En pratique il s'ajoute également des erreurs de recalage et d'interpolation ce qui comme on le verra rendra difficile l'interprétation des résultats. Par abus de langage on appellera une telle image une image parfaite.

Algorithm 1: Débruitage par *burst denoising*

Entrée: Un *burst* u_m avec $m = 1, \dots, M$ et une image de référence u_j

Sortie : Une image débruitée u appelée image parfaite

1. **Recalage sur la référence u_j :**
 2. Calculer les points SIFT de u_j .
 3. **for** $i = 1$ à M **do**
 4. Calculer les points SIFT de u_i .
 5. Trouver les correspondances entre les points SIFT de u_i et de u_j .
 6. Trouver avec un algorithme de RANSAC la meilleure homographie $h_{i,j}$ modélisant la transformation entre les correspondances.
 7. Ré-échantillonner u_i dans les coordonnées de référence en utilisant la relation $u_j \sim u_i \circ h_{i,j}$. L'image recalée obtenue est appelée \tilde{u}_i .
 8. **end**
 9. **Combinaison des images recalées :**
 10. Calculer la moyenne u des images recalées \tilde{u}_i i.e $u = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tilde{u}_i$.
-

Remarque : La combinaison se fait par moyenne classique des images recalées et non pas une moyenne pondérée (dépendant du gradient) comme dans l'algorithme initial. Ce choix a été fait de manière à simplifier l'interprétation des résultats. Il est fort probable qu'à terme nous retournions vers une moyenne pondérée de façon à privilégier la contribution des images mieux contrastées. En effet, il y a fort à parier pour qu'une image bien contrastée soit recalée avec une meilleure précision.

5.2 Le protocole expérimental d'évaluation de l'erreur

On rappelle que notre but est d'arriver à estimer l'erreur de reconstruction induite par le bruit, l'*aliasing* et la troncature. Il existe des méthodes d'estimation du bruit [6] et nous avons vu une méthode pour estimer l'erreur de troncature à la section 4. Cependant cela ne nous permet pas d'estimer l'erreur de reconstruction en prenant en compte les trois sources d'erreur. Par exemple, la méthode de la section 4 suppose que les échantillons connus sont exacts donc ne prend pas en compte le bruit. Ceci était plus ou moins adapté dans le cas d'une image seule mais pas dans le cas d'un *burst*.

Pour ces raisons on introduit un protocole expérimental d'évaluation de l'erreur compatible avec la donnée

d'un *burst*. On obtient deux images parfaites par l'algorithme 1 de *burst denoising* à partir d'images différentes d'un même *burst* (et avec la même référence). Ces deux images sont très proches mais nous prétendons que l'étude de leur différence fournit une indication sur l'erreur de reconstruction.

Les images parfaites diffèrent dans un premier temps par leur contraste. Il est aisé de vérifier notamment que les moyennes varient. Cela provient du faible changement d'illumination pouvant avoir lieu durant les acquisitions. Ensuite, malgré la correction par égalisation d'histogrammes, il reste des différences entre les images qui peuvent s'interpréter comme un mélange entre erreur de reconstruction et de recalage. On peut raisonner de la manière suivante en ajoutant au fur et à mesure les différentes sources de différence.

- Supposons que l'on sache recalibrer exactement les images et que la reconstruction parfaite soit possible (pas de bruit ni d'*aliasing* généralisé). Alors les images parfaites obtenues diffèrent uniquement par le changement de contraste que nous venons de corriger.
- Si maintenant on ajoute les erreurs qui gênent la reconstruction alors le recalage devient inexact en raison du ré-échantillonnage qui nécessite une interpolation.
- Si de plus le recalage n'est pas parfait (en raison de l'estimation de la transformation entre les images), il s'ajoute une erreur de recalage.

Ainsi, si l'estimation de la transformation entre les images est suffisamment précise, la différence observée est principalement due aux erreurs contenues dans les images. On cherchera donc à avoir une estimation aussi précise que possible. On notera que l'interprétation de la différence est compliquée car les sources sont multiples.

Le procédé expérimental utilisé est résumé par l'algorithme 2. Comme en section 4 on évaluera l'erreur au sens de la moyenne quadratique (RMSE). Étant donné deux images parfaites u_1 et u_2 de taille N (dont les histogrammes sont égalisés), on définit l'erreur comme

$$\text{RMSE}(u_1, u_2) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_2(i) - u_1(i))^2}. \quad (38)$$

Remarque : Si u est la reconstruction parfaite alors on remarque que

$$0 \leq |\text{RMSE}(u_1, u) - \text{RMSE}(u_2, u)| \leq \text{RMSE}(u_1, u_2) \leq \text{RMSE}(u_1, u) + \text{RMSE}(u_2, u).$$

Il faudra donc garder à l'esprit pour la suite que l'on a tendance à sous-estimer l'erreur réelle.

Algorithm 2: Estimation de l'erreur de reconstruction

Entrée: Un *burst* u_m avec $m = 1, \dots, M$ et une image de référence u_j

Sortie : Une estimation de l'erreur de reconstruction RMSE

1. **Construction des images parfaites**
 2. Pour deux sous-ensembles du *burst* (typiquement une moitié chacun) créer des images parfaites \tilde{u}_1 et \tilde{u}_2 selon l'algorithme 1 de *burst denoising*.
 3. **Comparaison des images parfaites**
 4. Égaliser les histogrammes de \tilde{u}_1 et \tilde{u}_2 . De plus, appliquer une transformation affine envoyant le minimum sur 0 et le maximum sur 255.
 5. Calculer l'erreur de reconstruction RMSE comme en (38).
-

Remarque : La transformation affine est appliquée de manière à pouvoir comparer les erreurs obtenues si on change de *burst* (notamment si on cherche à comparer l'erreur pour des images 8 bits et 12 bits). Cette étape permet d'avoir une plage de valeurs de référence (celle des images 8 bits).

6 Étude du recalage

Au vu de ce qui a été dit précédemment, il est clair que l'étape de recalage est essentielle. Nous présentons dans cette section une étude qui a été faite dans le but de tester sa précision.

Dans un premier temps il est vital d'avoir une idée de la transformation liant les images. En effet, si on s'aperçoit par exemple que les images sont translatées les unes par rapport aux autres selon une direction identique il peut être intéressant d'estimer cette dernière et de réduire le problème à un cas unidimensionnel. La figure 11 montre que ce n'est pas le cas. On y voit la trajectoire estimée (par une méthode SIFT + RANSAC) d'un point au centre de l'image de référence. La distribution semble aléatoire et ne possède pas de direction privilégiée. Le déplacement peut dépasser 5 pixels.

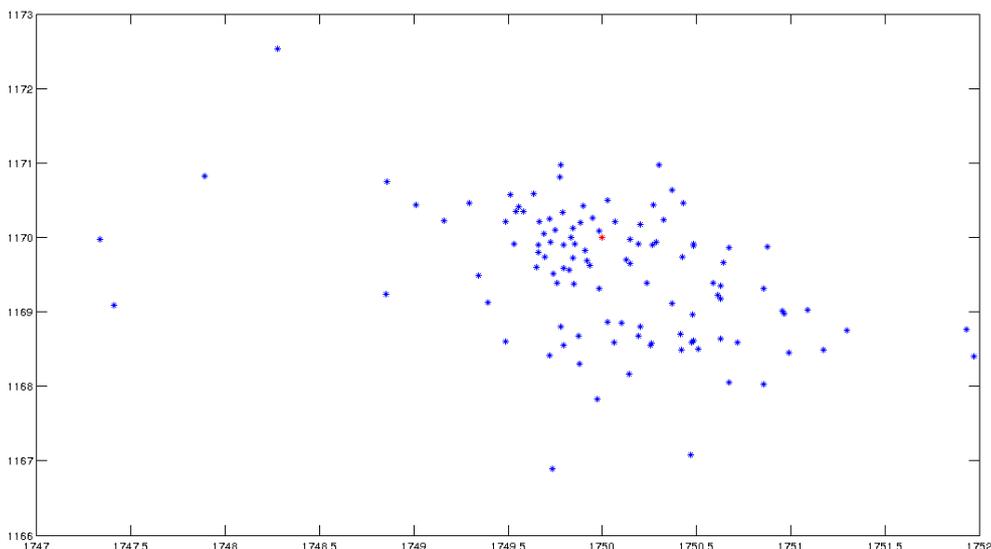


Figure 11: Estimation de la trajectoire d'un point au centre de l'image (point rouge). La distribution semble aléatoire et ne possède pas de direction privilégiée. Le déplacement peut dépasser 5 pixels.

6.1 Ré-échantillonnage

Une fois l'estimation de l'homographie effectuée il est nécessaire d'obtenir les échantillons de l'image en question sur la grille régulière de la référence. Cette étape s'appelle le ré-échantillonnage et nécessite une interpolation.

Plus précisément, supposons que l'on cherche à recalculer l'image u_i sur la référence u_j . On a estimé la transformation $h_{i,j}$ qui nous donne la relation $u_j \sim u_i \circ h_{i,j}$. De fait, la valeur de l'image recalculée en la position (k, l) est donnée par $u_i \circ h_{i,j}(k, l)$. Or en général cet échantillon n'est pas connu (les coordonnées ne sont pas sur la grille régulière) ce qui explique qu'il faille interpoler l'image. Ce ré-échantillonnage est donc soumis aux erreurs de reconstruction et il peut être judicieux d'effectuer les expériences pour différentes méthodes. On choisit les méthodes linéaires suivantes :

- interpolation bicubique,
- interpolation bicubique sur une décomposition *periodic plus smooth* avec $\text{zoom} \times 2$,
- B-spline d'ordre 11,
- B-spline d'ordre 11 sur une décomposition *periodic plus smooth* avec $\text{zoom} \times 2$.

L'utilisation de la décomposition *periodic plus smooth* est justifiée par l'analyse des résultats d'estimation de l'erreur de troncature (section 4). Le ré-échantillonnage est effectué indépendamment sur les deux composantes. Comme la composante périodique est très proche de l'échantillonnage obtenu sur un signal périodique, la méthode d'interpolation adéquate devient celle par DFT. Il n'est pas pratique d'effectuer une telle méthode dans notre cas puisque la grille de ré-échantillonnage n'est pas régulière. On peut se rapprocher

de cette méthode (en effectuant des calculs dans un temps raisonnable) en zoomant par *zero-padding* l'image (ici facteur 2) puis en appliquant une autre méthode d'interpolation (ici bicubique et B-spline d'ordre 11) sur les coordonnées zoomées. La composante *smooth* est tellement régulière que **n'importe quelle méthode d'interpolation** fournit de bons résultats. Le ré-échantillonnage se termine en faisant la somme des deux images obtenues (après avoir dé-zoomé la composante périodique ré-échantillonnée).

Remarque : Les méthodes d'interpolation sont soumises à des effets de bords. Ceci s'explique par le fait que lorsqu'on se rapproche du bord il manque de l'information. En fait, il s'agit exactement de l'erreur de troncature. Comme nous l'avons vu précédemment il vaut mieux ne considérer que des portions éloignées du bord des images. C'est pourquoi à chaque fois que l'on effectuera un ré-échantillonnage (ou plus généralement une interpolation) on effectuera un *crop* de 20 pixels sur les quatre côtés de l'image en question.

6.2 Étude de la précision avec vérité terrain

Nous vérifions la précision des étapes de ré-échantillonnage et d'estimation de l'homographie à l'aide d'une structure de vérité terrain. Plus précisément, nous prenons une image de référence (celle de la figure 10 dans la suite) à laquelle nous appliquons une (ou des) homographie(s) connue(s). Après ré-échantillonnage on obtient donc un *burst* dont on contrôle les transformations.

6.2.1 Précision du ré-échantillonnage

On notera qu'il n'y a pas d'ajout de bruit. En théorie, si u est l'image de référence et v l'image transformée par l'homographie h alors $v = u \circ h$ et $v \circ h^{-1} = u$. En pratique, les erreurs d'interpolations font que ce n'est pas le cas. L'idée est alors, pour chaque méthode d'interpolation, de comparer u et $v \circ h^{-1}$ (image digitale obtenue par ré-échantillonnage et exprimée sur la même grille que u).

Les résultats sont présentés sur la figure 12. La RMSE est de 0.77 pour l'interpolation bicubique et proche de 0.3 pour les autres méthodes soit de l'ordre de l'erreur de quantification. Les résultats sont très proches pour toutes les méthodes sauf l'interpolation bicubique qui introduit plus d'erreur. Dans tous les cas, l'erreur est beaucoup trop élevée même si localisée au niveau des discontinuités. On notera que les images de différences ressemblent à des gradients. Il y a une structure au niveau des bords (blanc à gauche, noir à droite) qui laisse apparaître une possibilité d'erreur dans le code.

6.2.2 Précision de l'estimation de l'homographie

L'idée est exactement la même que précédemment sauf que l'on remplace h^{-1} par \tilde{h}^{-1} où \tilde{h} est l'estimation par la méthode RANSAC + SIFT de l'homographie h liant u et v . Ici s'ajoute aux erreurs d'interpolation les erreurs d'estimation de l'homographie.

Les résultats sont présentés sur la figure 12. Ils sont plus difficiles à lire que précédemment puisqu'il s'agit d'un mélange d'erreur. La RMSE est de 6.6 pour l'interpolation bicubique et proche de 4.7 pour les autres méthodes. Les résultats sont très proches pour toutes les méthodes sauf l'interpolation bicubique qui introduit plus d'erreur. Dans tous les cas, l'erreur est beaucoup trop élevée et n'est plus autant localisée au niveau des discontinuités (même si la contribution y reste majoritaire). On a encore une fois des différences ayant l'aspect de gradient mais on ne peut pas dire si cela provient du ré-échantillonnage ou de l'estimation.

Afin d'avoir une idée de la précision de l'estimation en fonction de la position dans l'image on peut également afficher la différence entre l'identité et la fonction $\tilde{h}^{-1} \circ h$. C'est ce qui est affiché sur la figure 14. On voit que l'estimation est assez précise dans le coin supérieur gauche et de plus en plus mauvaise si on se rapproche du coin inférieur droit. Le maximum est de 9 pixels ce qui est énorme.

6.2.3 Points SIFT

L'unique cause plausible pour une telle répartition de l'erreur est une distribution non uniforme des points SIFT convenablement mis en correspondance. La figure 15 montre que les points SIFT de l'image u ayant une correspondance avec un point SIFT de l'image v sont localisés essentiellement sur les discontinuités mais présents sur tout l'image. De plus, comme on connaît l'homographie h on peut vérifier que la position des points SIFT détectés dans v correspond à la position prévue (à l'erreur 0.5 près). Plus précisément, si un point SIFT se trouve à la position (x, y) dans u alors il devrait se trouver à la position $h(x, y)$ dans v .

Si la détection se fait à la position (\tilde{x}, \tilde{y}) alors l'erreur est $e = \|(\tilde{x}, \tilde{y}) - h(x, y)\|$. On affiche en rouge les points vérifiant $e > 0.5$: ce sont les points qui ne sont pas bien détectés par l'algorithme utilisé pour trouver les points SIFT. On en trouve très peu et ils sont uniformément répartis dans l'image. Les points SIFT en bleus sont les points vérifiant $\tilde{e} > 0.5$ où h a été remplacée par son estimation \tilde{h} : ce sont les points dont la transformation est mal estimée. On en trouve dans toute l'image sauf dans le coin supérieur gauche. Les points SIFT verts sont les points dont la transformation est convenablement estimée. On en trouve dans le coin supérieur gauche i.e le lieu où la précision d'estimation de l'homographie était bonne.

Finalement, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- La méthode de détection des points SIFT est précise (une cinquantaine d'erreur pour 5000 points). Elle reste néanmoins perfectible.
- L'estimation de l'homographie par la méthode de RANSAC doit être améliorée. Il faut forcer l'algorithme à donner une homographie modélisant convenablement la transformation sur l'image entière et non une portion.

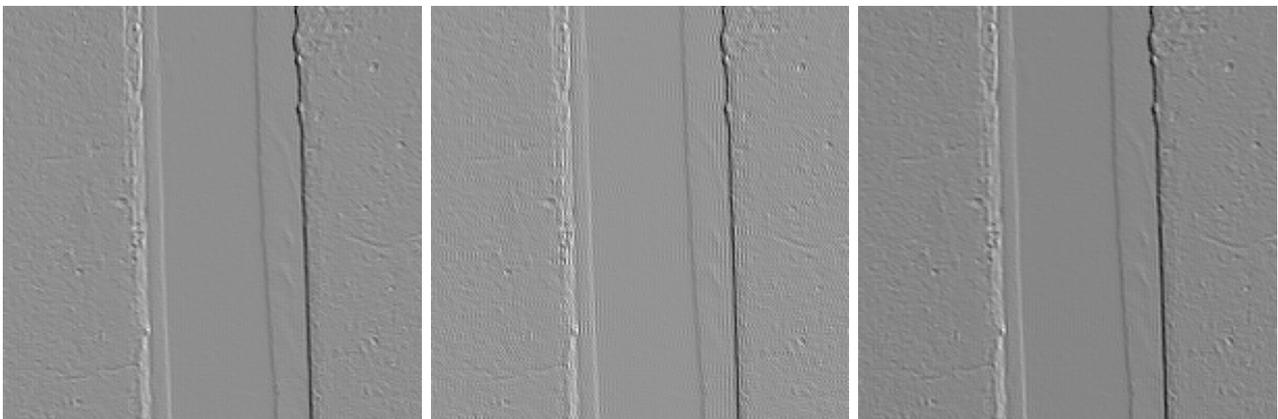
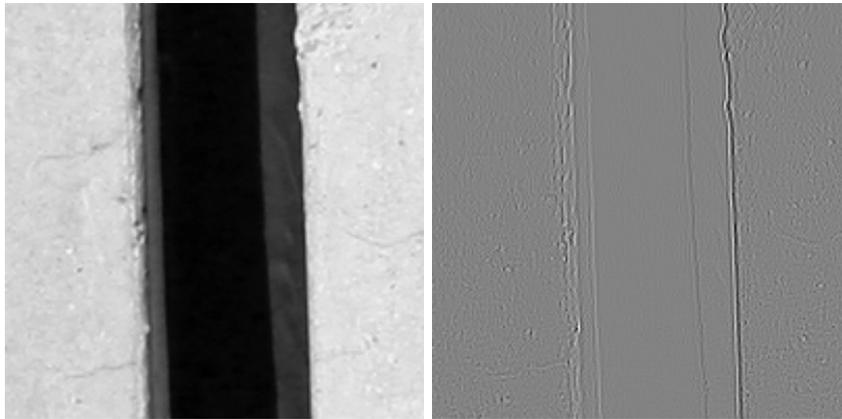


Figure 12: Erreur d'interpolation lors du ré-échantillonnage. Dans l'ordre : la référence u puis la différence entre u et $v \circ h^{-1}$ pour l'interpolation bicubique, bicubique + périodique, B-spline 11, B-spline 11 + périodique). La RMSE est de 0.77 pour l'interpolation bicubique et proche de 0.3 pour les autres méthodes. Les résultats sont très proches pour toutes les méthodes sauf l'interpolation bicubique qui introduit plus d'erreur. On notera que les images de différences ressemblent à des gradients. Il y a une structure au niveau des bords (blanc à gauche, noir à droite) qui laisse apparaître une possibilité d'erreur dans le code (en particulier un décalage).

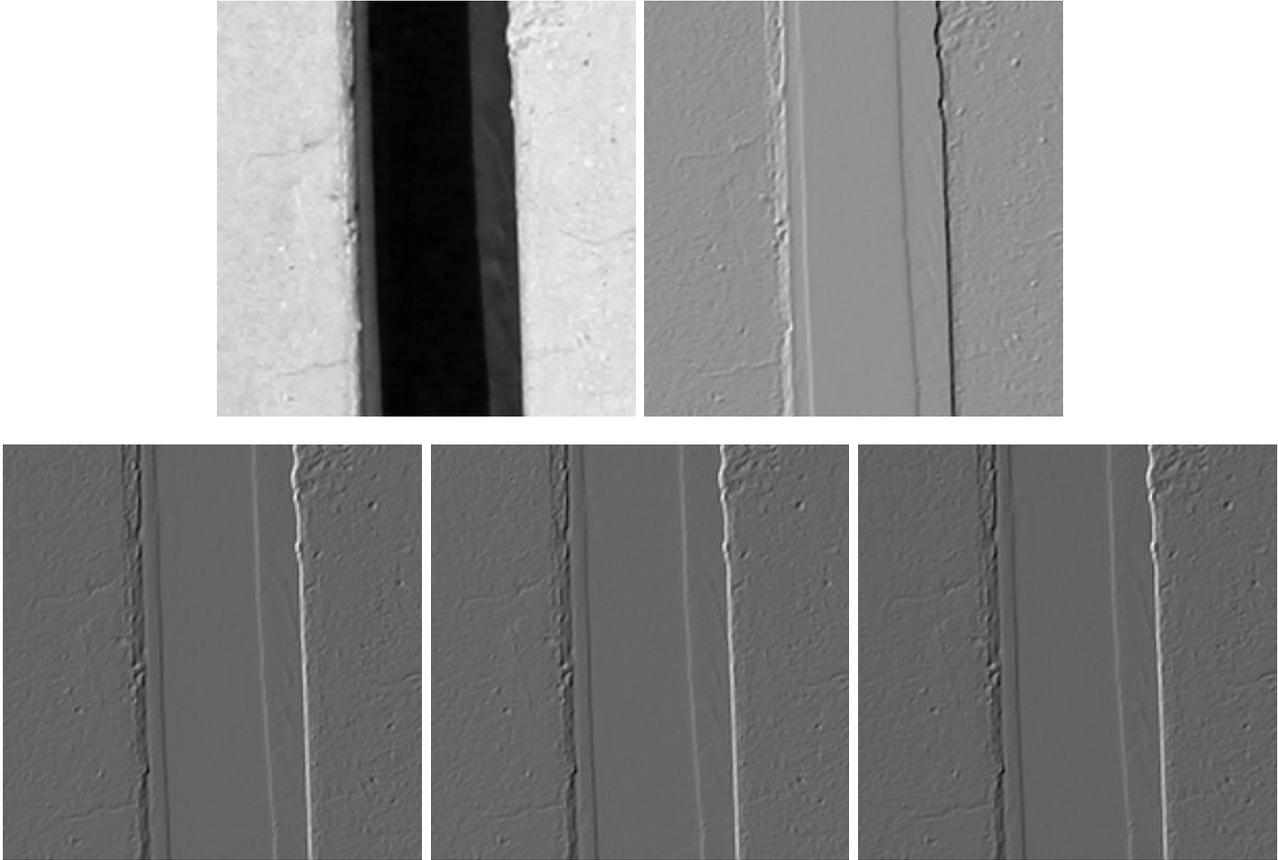


Figure 13: Erreur d'estimation de l'homographie. Dans l'ordre : la référence u puis la différence entre u et $v \circ \tilde{h}^{-1}$ (où \tilde{h} est l'estimation par la méthode RANSAC + SIFT de l'homographie h) pour l'interpolation bicubique, bicubique + périodique, B-spline 11, B-spline 11 + périodique). La RMSE est de 6.6 pour l'interpolation bicubique et proche de 4.7 pour les autres méthodes. Les résultats sont très proches pour toutes les méthodes sauf l'interpolation bicubique qui introduit plus d'erreur.

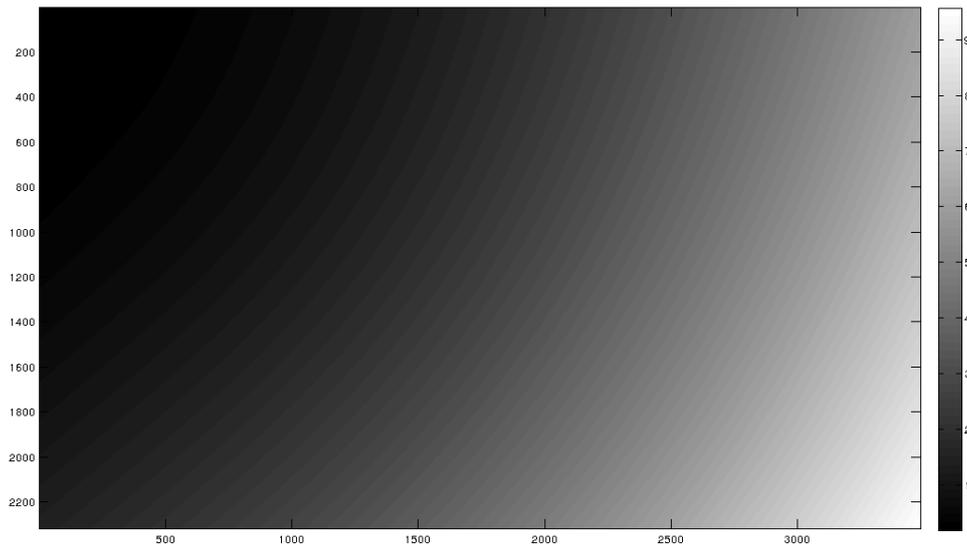


Figure 14: Différence entre l'identité et $\tilde{h}^{-1} \circ h$. La précision est bonne dans le coin supérieur gauche et se détériore si on va vers le coin inférieur droit. Le maximum est de 9 pixels !

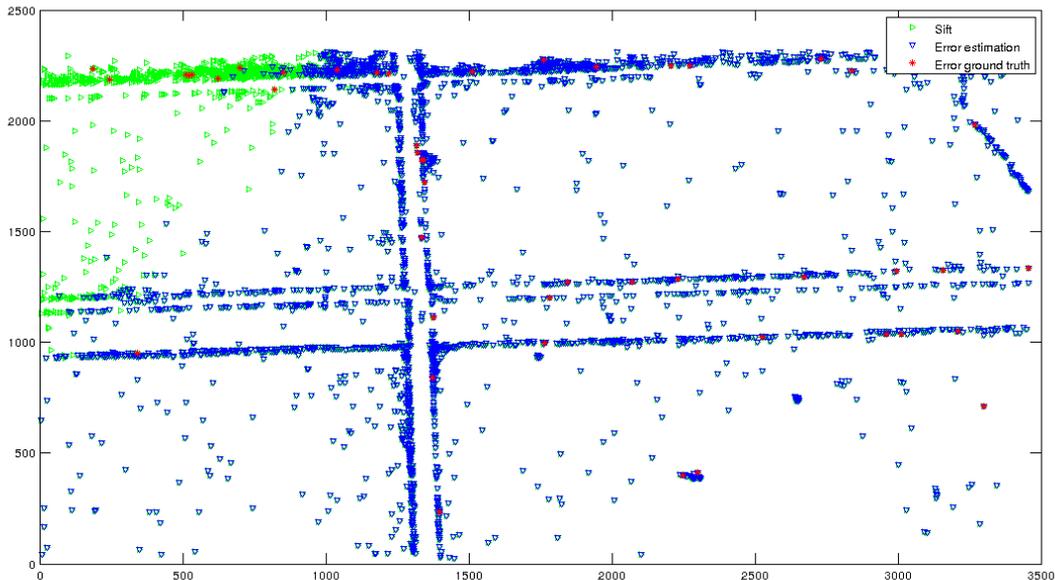


Figure 15: Distribution des points SIFT. Chaque symbole représente un point SIFT de l'image u ayant un match avec un point SIFT de l'image v : leur répartition semble privilégier les bords (c'était attendu) mais on en trouve dans toute l'image. En rouge, les points SIFT mal détectés par l'algorithme permettant de trouver les points SIFT : il y en a très peu et ils sont répartis uniformément dans toute l'image. En vert, les points SIFT dont la transformation est convenablement estimée : ils sont localisés dans le coin supérieur gauche, lieu où la précision était la meilleure pour l'estimation de l'homographie. En bleu, les points SIFT où elle est mal estimée : on en trouve dans toute l'image sauf le coin supérieur gauche.

7 Résultats

Dans cette section nous créons des images parfaites en utilisant l'algorithme 1 de *burst denoising* sur le *burst* de Loïc Simon et Carlo De Franchis. Puis, nous obtenons une estimation de l'erreur contenue dans les images par l'algorithme 2. Même si on a vu que l'étape de recalage était source d'erreur, il se trouve que l'analyse des résultats peut s'avérer pertinente et permet d'orienter le travail futur.

7.1 Images parfaites

Nous affichons sur la figure 16 les images parfaites obtenues en appliquant l'algorithme 1 de *burst denoising* à 55 images du *burst* expérimental (pour différentes méthodes d'interpolation). À première vue les images semblent très proches. On peut néanmoins en zoomant sur des détails observer des différences (au niveau des discontinuités notamment). Le mauvais recalage n'a pas un impact désastreux sur l'allure générale des images (ce qui est assez étonnant). Il est probable que les erreurs s'annulent en moyenne. En revanche, l'effet négatif est que les images sont davantage floues. Il peut être intéressant de le vérifier en considérant les transformées de Fourier de ces images. Nous voyons sur la figure 17 que les hautes fréquences ont été atténuées.

7.2 Estimation de l'erreur contenue dans les images

En utilisant l'algorithme 2 de comparaison des images parfaites on peut avoir une idée de l'erreur contenue dans les images. Aussi, en faisant varier le nombre d'images utilisées pour la création d'images parfaites on peut visualiser l'évolution de l'erreur RMSE.

Dans un premier temps, on compare deux images parfaites obtenues chacune à partir de 55 images. On peut voir sur la figure 18 que les différences sont essentiellement localisées dans les discontinuités des images. On pouvait s'y attendre vu la précision du recalage. En revanche, on distingue que lorsqu'on utilise un recalage les différences dans les zones homogènes sont moins fortes et ont un aspect semblable à un bruit blanc. Il y a deux interprétations possibles : soit on visualise uniquement la différence de bruit entre les deux images

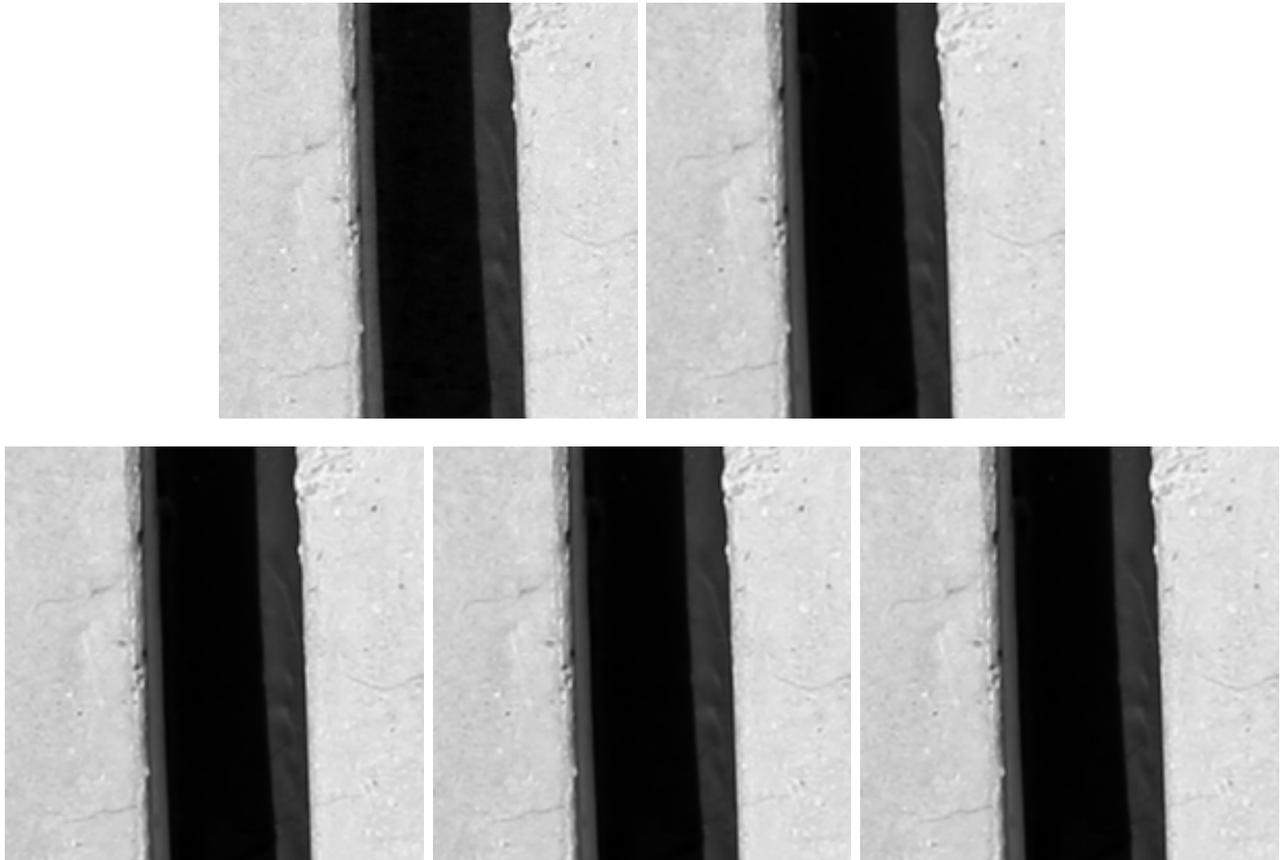


Figure 16: Images parfaites obtenues à partir de 55 images du *burst* pour les quatre méthodes d'interpolation (dans l'ordre : bicubique, bicubique + périodique, B-spline 11, B-spline 11 + périodique). Les images semblent très proches et il faut considérer les détails au niveau des bords pour se rendre compte des différences.

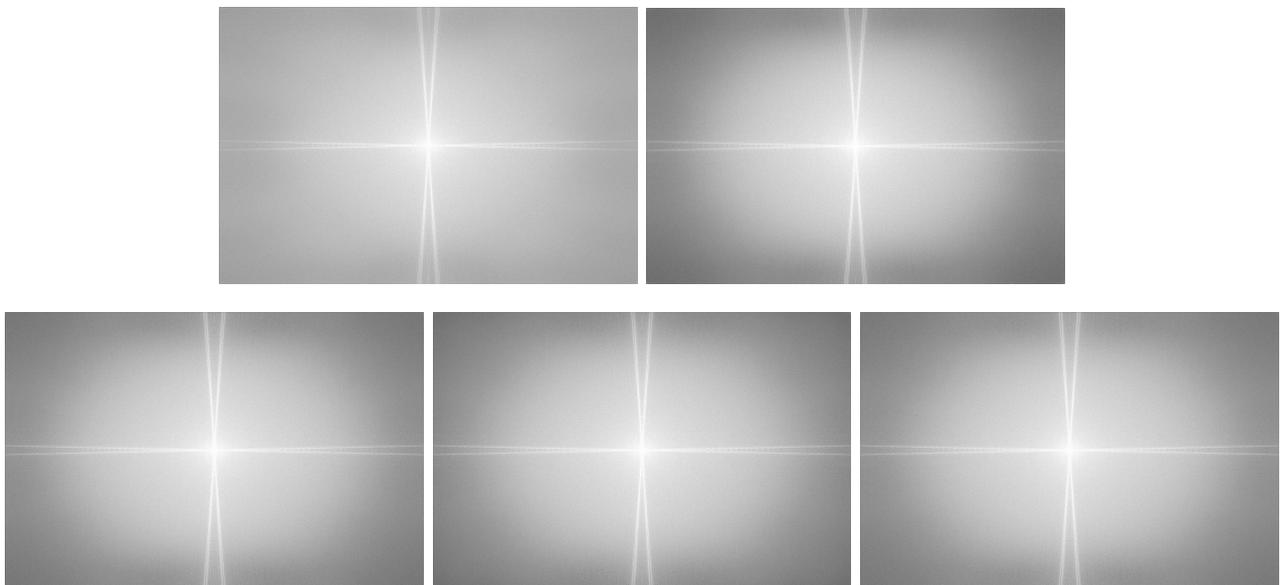


Figure 17: Transformées de Fourier des images parfaites pour les différentes méthodes d'interpolation (toujours dans le même ordre). On voit que les hautes fréquences ont été atténuées. C'est la conséquence du mauvais recalage qui introduit un flou.

parfaites, soit on visualise une suppression du bruit (qui n'est pas la même sur les deux images).

Pour répondre à cette question, on considère la courbe de l'erreur RMSE (obtenue par l'algorithme 2) en fonction du nombre d'images utilisées. On peut voir sur la figure 20 que cette courbe varie en $1/\sqrt{n} + c$ (où n est le nombre d'images et c une constante) quelque soit la méthode de recalage utilisée. On retrouve ainsi la variation théorique du bruit obtenue par accumulation et fusion. La constante peut s'interpréter

comme l'erreur finale due à l'*aliasing* généralisée et au-delà de laquelle on ne peut pas aller sans augmenter le nombre d'échantillons (par super-résolution). Nous avons donc supprimé du bruit.

On observe également que l'erreur est très proche pour toutes les méthodes sauf pour l'interpolation bicubique où elle est légèrement plus faible. On explique ceci par le surplus de flou introduit qui fait diminuer les différences entre les images. Il est important de noter que le flou supprime à la fois le bruit et les détails. Ceci rend plus difficile l'interprétation des résultats. On voit sur la figure 21 que les différences sont localisées dans les discontinuités de l'image et sont quasiment uniformes ailleurs.

Au final, l'erreur minimale obtenue est de l'ordre de 0.7. C'est environ le double de l'erreur de quantification et ce n'est pas une valeur élevée. En effet, n'oublions pas que les images ont été obtenues à partir d'échantillons totalement différents. De plus, la méthode a tendance à surestimer l'erreur. En lisant la valeur approximation de la constante c on obtient 0.5. C'est très prometteur pour la suite si on arrive à faire diminuer davantage l'erreur en étant sûr que cela n'est pas dû au flou introduit. L'estimateur empirique de la section 4 donne pour les images de ce *burst* une erreur de l'ordre de 0.1 au minimum (pour les interpolations utilisées) mais il ne faut pas oublier que ce modèle ne prend pas en compte le bruit.

Remarque : La figure 19 montre que la variation sans recalage est chaotique (et même croissante). Ainsi, même si le recalage était peu précis, il l'est suffisamment pour interpréter les résultats.

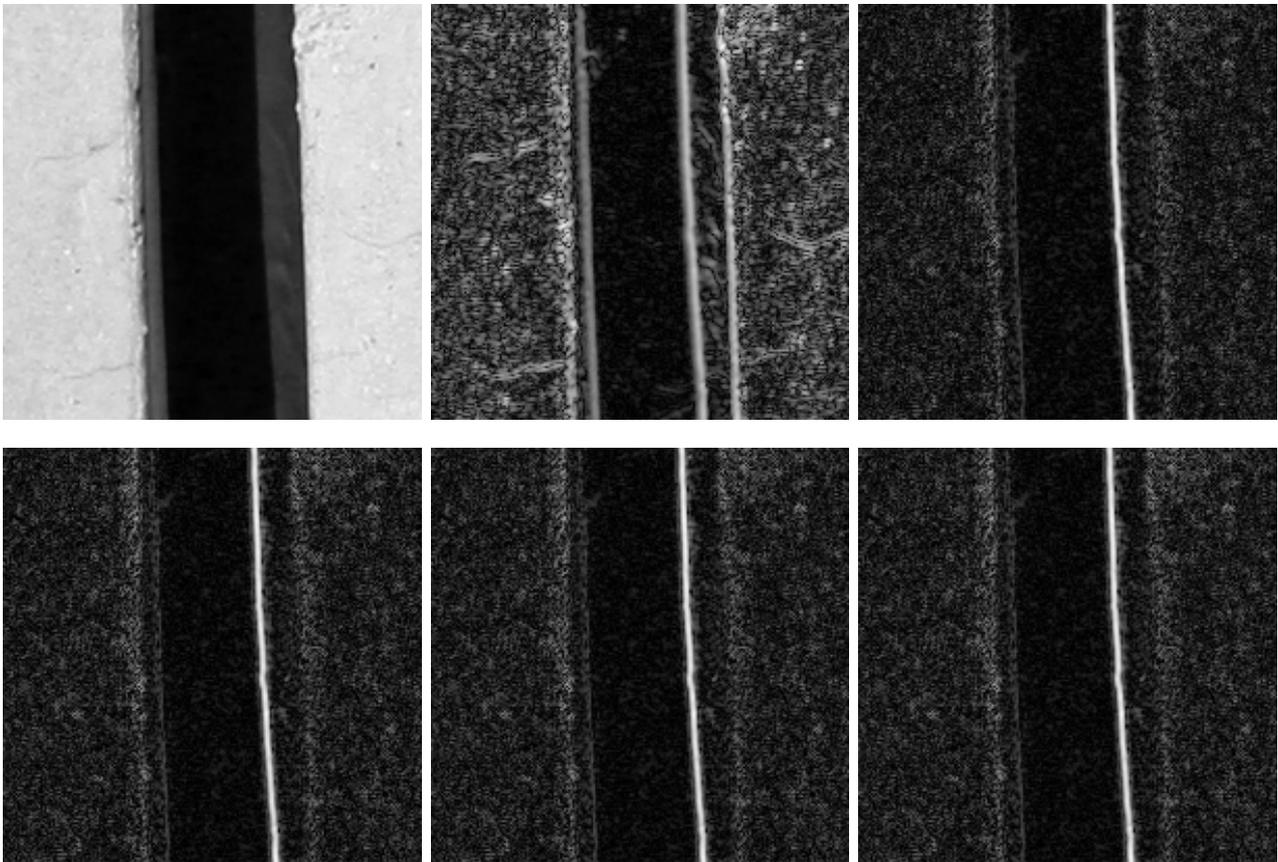


Figure 18: Comparaison entre deux images parfaites obtenues par l'algorithme 1 de *burst denoising* (à partir de 55 images). Les histogrammes sont égalisés avant de faire la différence. Dans l'ordre : le détail dans l'image de référence et la différence sans recalage, avec bicubique, bicubique + périodique, B-Spline 11, B-Spline 11 + périodique. Les différences sont essentiellement localisées dans les discontinuités ce qui était attendu vu la précision du recalage. En revanche on distingue que lorsque l'on utilise un recalage il y a moins d'erreur dans les zones homogènes et que les différences y apparaissant sont semblables à du bruit blanc.

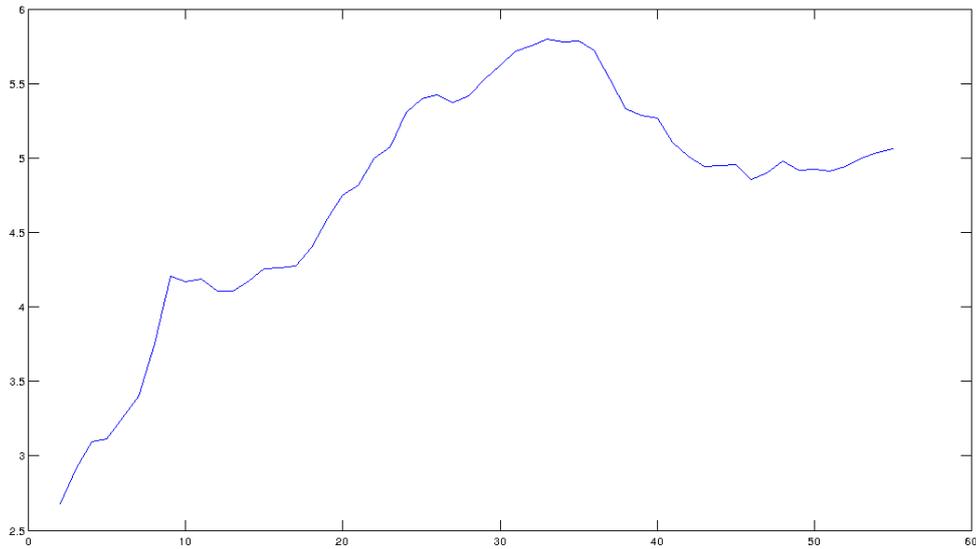


Figure 19: Courbe de la variation de la RMSE entre les images parfaites obtenues à partir d'un nombre n d'images par moyenne directe. Il n'y a pas ici d'étape de recalage. La variation est chaotique (voire même croissante !) et justifie l'utilisation d'un recalage même si celui-ci n'est pas aussi précis que souhaité.

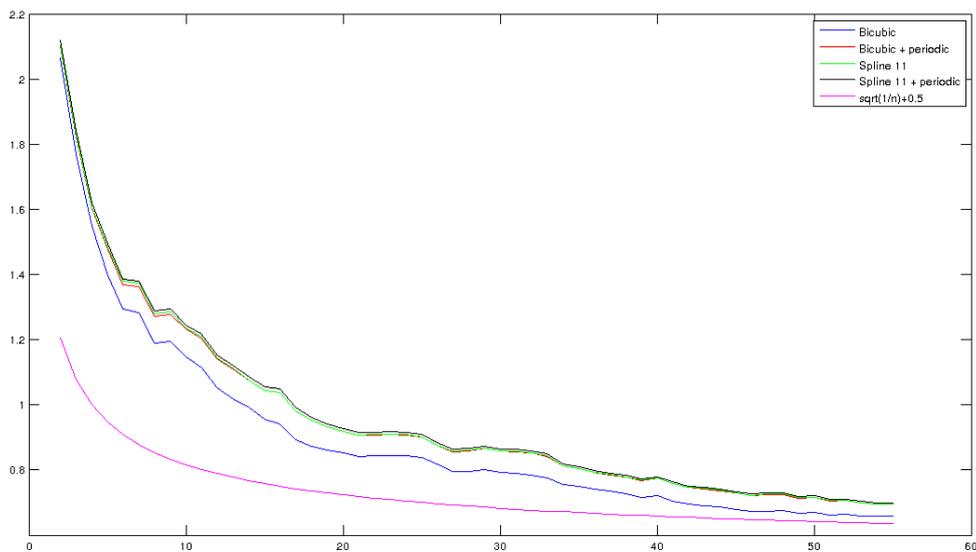


Figure 20: Courbe de la variation de la RMSE entre les images parfaites obtenues à partir d'un nombre n d'images par l'algorithme 2. Les quatre méthodes d'interpolation fournissent globalement la même courbe qui varie en $1/\sqrt{n} + c$ où c est probablement l'erreur au-delà de laquelle on ne peut aller en raison de *aliasing* généralisé. L'interpolation bicubique donne une erreur légèrement plus faible ce qui s'explique par le surplus de flou. Ce dernier a tendance à éliminer d'avantage le bruit et les détails rendant les différences entre les images plus faibles. Il est donc difficile de lire les résultats.

8 Travail futur

8.1 Améliorations

Dans un premier **temps** il est clair que la méthode de recalage est à améliorer. Les différentes pistes suivantes sont à explorer (et le seront) :

- L'algorithme utilisé pour détecter les points SIFT nécessite une quantification des images. Ceci n'est

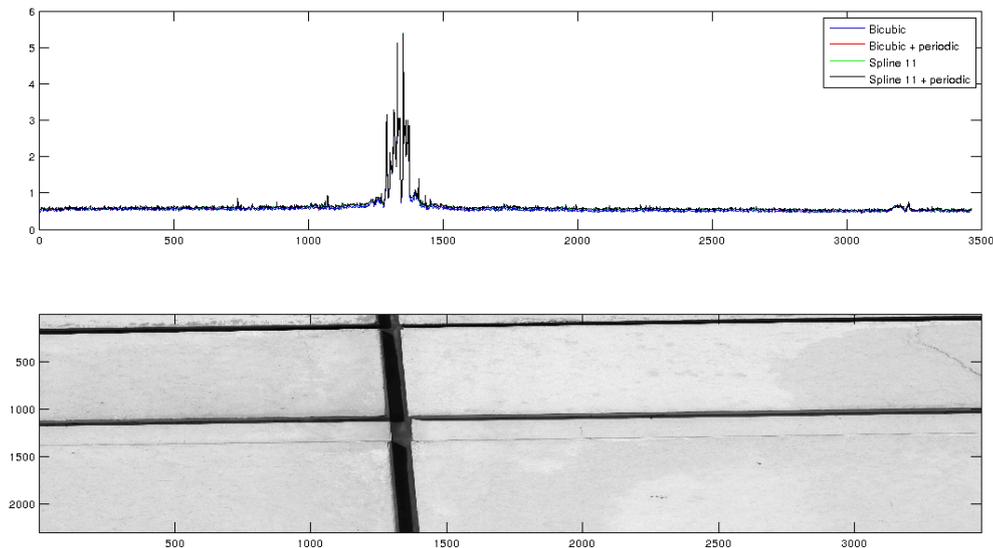


Figure 21: Variation de l'erreur au sens de la moyenne quadratique selon les colonnes. L'erreur est globalement constante (ici environ 0.7) sur l'image entière sauf au niveau des fortes discontinuités où elle explose.

pas gênant si on utilise directement le *burst* mais le devient lorsqu'on effectue les tests avec vérité terrain comme à la section 6.2. Il est possible que la cinquantaine de points SIFT mal détectés proviennent de cette quantification. On notera au passage que dans nos expérimentations toutes les images sont stockées au format TIFF ce qui permet de conserver des valeurs flottantes. La contrepartie est que l'espace mémoire nécessaire est gigantesque.

- Nous pensons que l'étape de ré-échantillonnage est perturbée par une erreur dans le code qu'il faut corriger. Cependant, il est également possible que le passage des variables à la précision *double* au lieu de *float* permettent une nette amélioration de la précision. Par exemple, on peut voir que le ré-échantillonnage d'une image sur elle-même (par transformation identité) fournit une différence de l'ordre de 10^{-4} . Les images ayant une moyenne de l'ordre de 100, on rentre alors dans l'ordre de grandeur de la précision de stockage.
- **L'estimation de l'homographie n'est pas bonne puisque l'algorithme de RANSAC fournit une homographie ne modélisant convenablement la transformation que pour une portion de l'image.** Il faut donc modifier le code afin d'obtenir une répartition plus uniforme des points SIFT convenablement transformés.

8.2 Recalage homographique ou *flow* optique

Il est clair que l'algorithme d'estimation des homographies n'est pas assez précis et ce même dans le cas où l'on est sûr que la transformation liant les images est une homographie (vérité terrain). Après avoir corrigé le problème on peut se demander ce qu'il en est lorsque l'on travaille sur des images réelles. En théorie, la transformation liant les images est une homographie lorsque le mouvement de la caméra est une rotation ou lorsque l'objet en mouvement est plan. Bien que le mur soit quasiment plan, ce modèle peut ne pas être parfaitement adapté à nos applications. De plus, il est possible que des phénomènes de distorsion déforment les images.

Il s'agira donc de voir si notre algorithme de recalage par homographie est assez précis une fois les corrections effectuées. Si jamais il ne l'est pas, il faudra tester d'autres méthodes de recalage. En particulier, il est envisagé d'utiliser un algorithme de *flow* optique [24]. Ce dernier pourra être utilisé soit en remplacement de notre algorithme soit de manière à raffiner le recalage.

8.3 Utilisation d'images RAW

Pour créer des images parfaites, il peut être intéressant d'utiliser les images RAW plutôt que les images JPEG. En effet, nous avons besoin de contrôler la chaîne d'acquisition entière ce qui n'est pas le cas avec les images JPEG puisque nous ne connaissons pas la méthode de correction de la distorsion ou de démosaïquage, le débruitage utilisé... De plus, les images RAW sont codées sur 12 bits ce qui permet de limiter l'impact de la quantification (et donc de limiter les erreurs).

Nous cherchons à appliquer les algorithmes 1 et 2 au *burst* d'images RAW. Il est cependant nécessaire de traiter les images au préalable puisque les échantillons de chaque canaux couleurs ont été filtrés par un filtre de Bayer. On affiche sur la figure 22 un exemple d'image mosaïquée obtenue par lecture d'une image RAW. Afin de se ramener au cas d'une image en niveau de gris, on peut dans un premier temps appliquer une moyenne des canaux. Mais comme ces derniers sont très mal échantillonnés, ceci donne une image trop *aliasée*. Pour éviter cela on effectue un filtrage gaussien un peu particulier des canaux. Plus précisément, si u est l'image RAW et g une gaussienne alors on calcule v la version gaussienne de u par

$$v = u * g(. - (1/2, 1/2)).$$

La translation par $1/2$ permet de rendre symétrique la contribution des différents canaux. Ceci se traduit notamment par l'absence des artefacts du filtre de Bayer comme on peut le voir sur la figure 23. On peut vérifier sur la transformée de Fourier des images que l'on a bien tué les hautes fréquences et évité le repliement du spectre qui aurait eu lieu en moyennant les canaux. La version gaussienne ressemble à une version floue de l'image JPEG (avec un petit décalage de $1/2$).

Nous appliquons alors les algorithmes 1 et 2 aux versions gaussiennes du *burst*. On obtient les courbes présentées dans les figures 24 et 25. La variation de l'erreur est encore une fois en $1/\sqrt{n} + c$ où n est le nombre d'image utilisée mais semble deux fois plus petite. En fait, ce n'est pas si étonnant puisque l'on a flouté les images. Il n'est alors pas possible de dire que l'on a obtenu des images parfaites avec une plus faible erreur. En fait, l'idée n'était pas d'obtenir des images parfaites à partir des images RAW mais plutôt d'obtenir une nouvelle estimation de l'homographie liant les images et de l'utiliser dans un algorithme de super-résolution (voir ci-dessous).

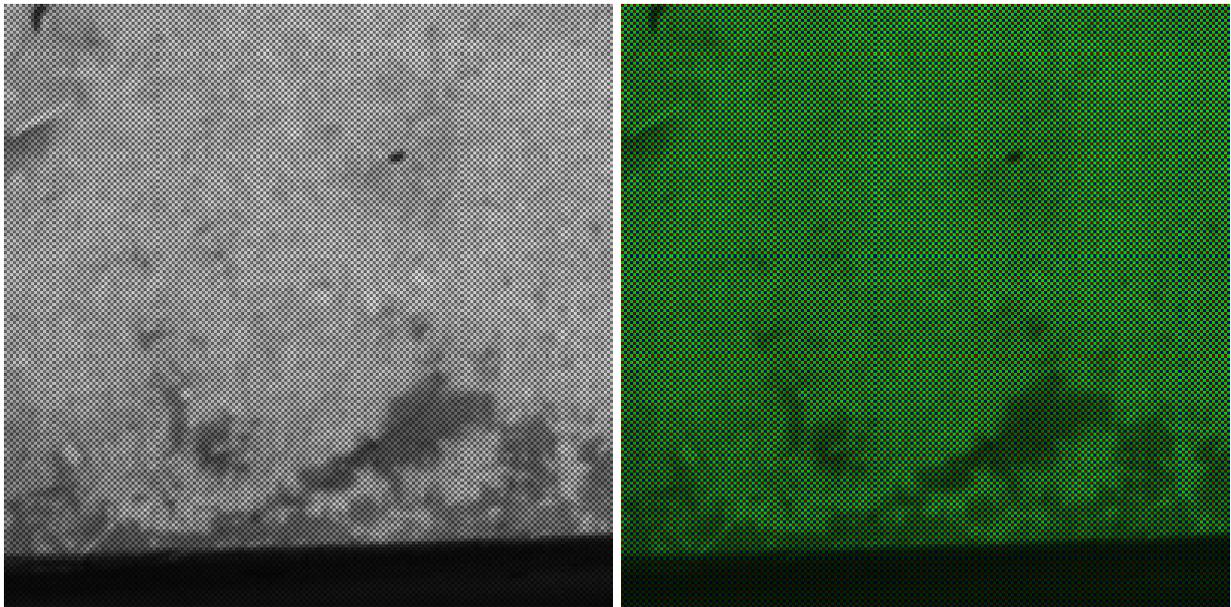


Figure 22: Exemple d'image RAW et de sa version mosaïquée. Les images sont codées sur 12 bits au lieu de 8 ce qui peut s'avérer intéressant pour faire diminuer l'erreur de quantification. On notera les artefacts dus au filtre de Bayer.

8.4 Algorithme de super-résolution

Comme nous l'avons vu précédemment l'unique manière de faire diminuer l'erreur due à l'*aliasing* généralisé est d'augmenter le nombre d'échantillons. Pour ce faire il existe des algorithmes de super-résolution qui

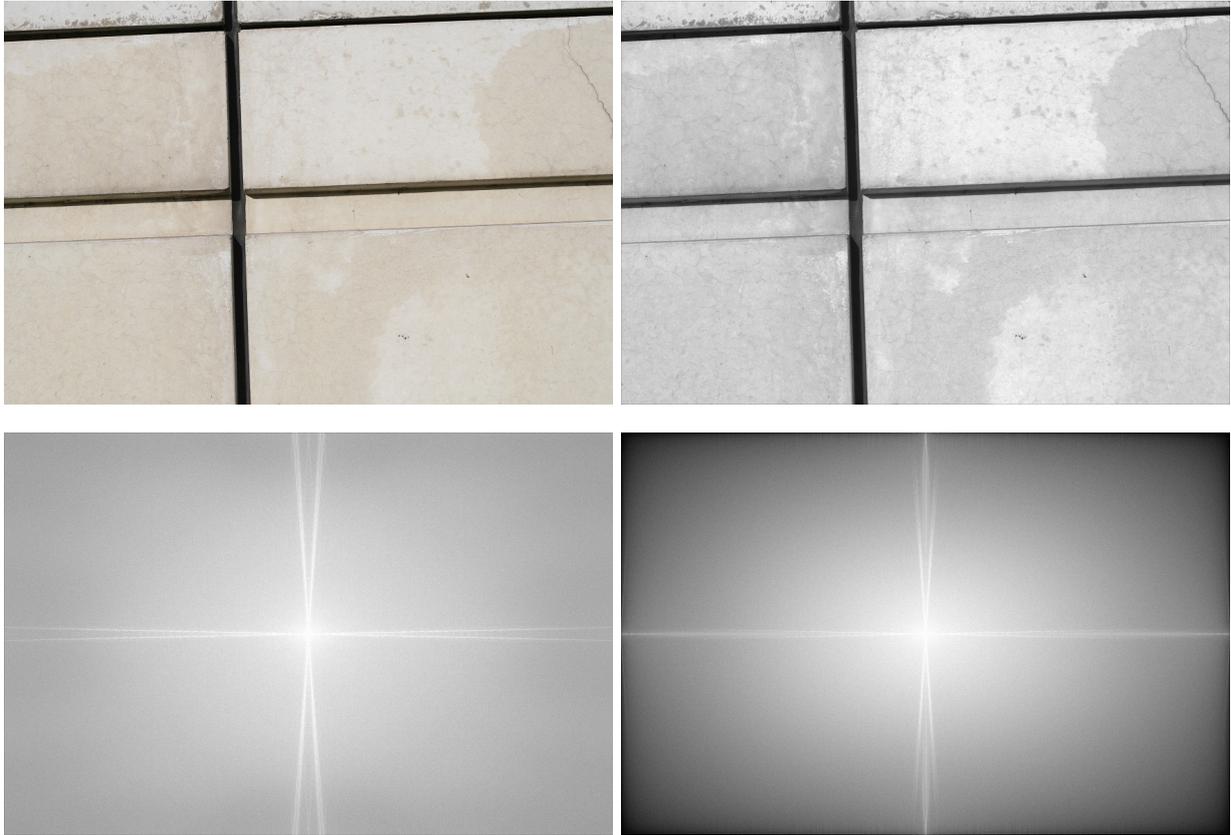


Figure 23: Exemple d'image JPEG et de sa version gaussienne obtenue à partir de l'image RAW. Les transformées de Fourier permettent de vérifier que l'on a flouté l'image (en tuant les hautes fréquences du spectre). C'est ce qui permet d'éviter le trop fort repliement du spectre dans le cas du filtrage moyen.

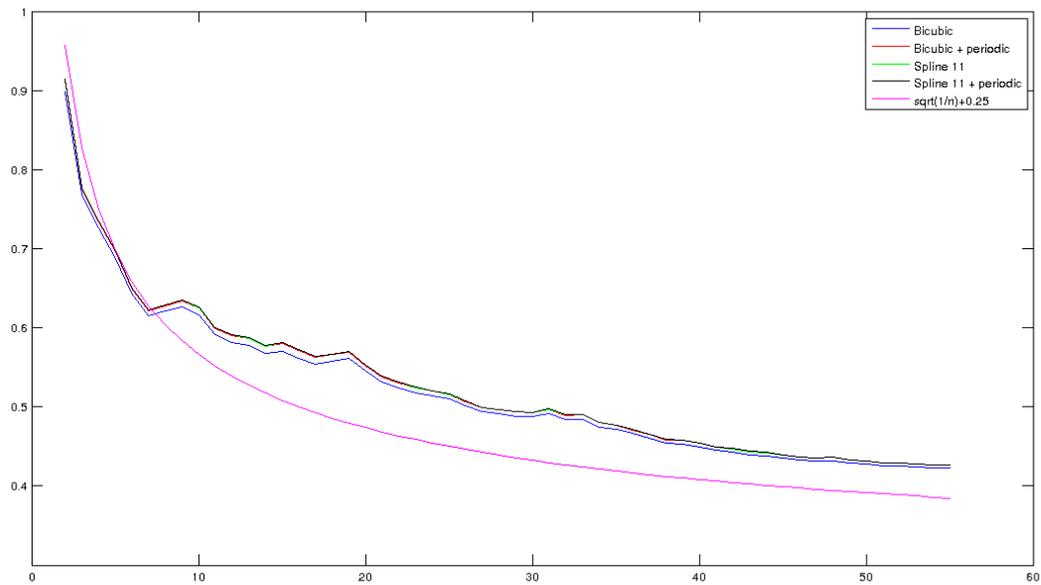


Figure 24: Courbe de la variation de la RMSE entre les images parfaites gaussiennes obtenues à partir d'un nombre n d'images par l'algorithme 2. La variation de la courbe reste en $1/\sqrt{n} + c$. L'erreur est plus faible mais il n'est pas évident d'interpréter le résultat puisque l'on a flouté les images.

tirent un avantage du fait que dans un *burst* on a accès à de nombreux échantillons. En effet, comme les images ne sont pas recalées si les images sont de tailles N on a en fait accès à $M \times N$ échantillons bruités au lieu de N . Si ce décalage était régulier du type $1/M$ alors on pourrait obtenir une image bruitée de taille

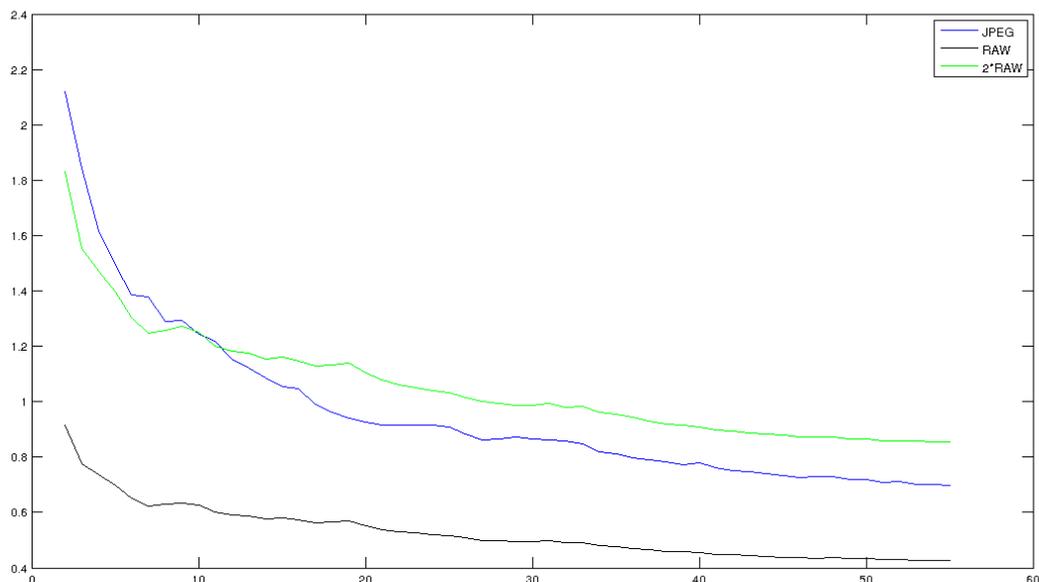


Figure 25: Comparaison des courbes dans le cas gaussien et JPEG. L'erreur est environ deux fois plus petite dans le cas gaussien mais cela ne permet pas de dire que l'on a trouvé une méthode pour avoir des images parfaites avec moins d'erreur puisque les images sont floutées.

$M \times N$ en intercalant les images les unes dans les autres. On pourrait ainsi obtenir un algorithme faisant diminuer l'erreur de reconstruction au lieu de faire diminuer le bruit comme l'algorithme 1. Seulement ici, les transformations liant les images sont aléatoires et les grilles obtenues après recalage ne seraient pas régulières. Il s'agira donc dans un premier temps d'estimer les transformations par une méthode à décider (SIFT + RANSAC homographique ou *flow* optique sur image RAW ou JPEG). Ce choix est crucial et est sujet à étude. Puis, à partir de la grille irrégulière d'échantillons obtenue il faudra reconstruire une image sur une grille régulière (plus grande ou non que celle de départ). Ce procédé est expliqué plus en détail par l'algorithme 3. Si le ré-échantillonnage est adapté il permettra d'obtenir une image débruitée et haute-résolution (corrigeant l'*aliasing* généralisé). Ceci devrait permettre d'atteindre une erreur résiduelle encore plus faible.

Remarque : La pondération gaussienne envisagée évite d'avoir recourt à une méthode d'interpolation pour le ré-échantillonnage. Ainsi, l'*aliasing* généralisé ne contribue que lors de la phase d'estimation de la transformation. Il est possible d'envisager la même procédure que pour l'algorithme 2 afin d'avoir une estimation de l'erreur contenue dans les images parfaites super-résolues.

9 Conclusion

La stéréoscopie haute-précision passe par l'étude des erreurs contenues dans les images. Ces dernières sont principalement due au bruit qui perturbe les échantillons et à l'*aliasing* généralisé qui perturbe les phases d'interpolation. La création des images parfaites est la clé permettant de faire diminuer ces erreurs. L'algorithme 1 envisagé permet dans un premier temps de gérer le bruit. Même si l'étape de recalage n'est pas aussi précise que ce qui est souhaité, les résultats obtenus permettent d'avoir une orientation sur le travail à fournir dans la suite. En particulier, l'obtention d'une méthode de recalage performante ouvrira les portes d'un algorithme de super-résolution qui on l'espère permettra d'obtenir des erreurs bien plus faibles. En augmentant le nombre d'échantillons on obtiendra un algorithme capable de gérer les trois sources d'erreur principales. Les résultats obtenus jusqu'à présent étaient difficiles à interpréter puisqu'on génère de nouvelles erreurs de reconstruction en essayant de corriger le bruit (ce qui induit la présence de flou par exemple). L'algorithme de super-résolution envisagé permet de contourner ce problème puisque l'unique source d'erreur sera dans l'étape de recalage et qu'il n'y a pas d'interpolation.

Une fois finalisée, il faudra évaluer si la création d'images parfaites (super-résolue ou non) permet d'obtenir

Algorithm 3: Estimation de l'erreur de reconstruction

Entrée: Un *burst* (RAW) u_m avec $m = 1, \dots, M$ et une image de référence u_j . Un facteur de zoom entier λ .

Sortie : Une image haute-résolution u .

1. **Estimation de la transformation liant les images**
 2. **for** $i = 1 : M$ **do**
 3. Estimer la transformation $h_{i,j}$ liant les images u_i et u_j ($u_j \sim u_i \circ h_{i,j}$). Cela peut se faire soit par la méthode utilisée dans l'algorithme 1 soit par une méthode de *flow* optique soit par un mélange des deux. L'estimation peut être appliquée aux images JPEG correspondantes (attention au décalage dans ce cas) ou aux versions gaussiennes des images RAW. On suppose que la transformation est la même pour les trois canaux.
 4. **end**
 5. **Ré-échantillonnage sur la grille régulière zoomée**
 6. Le pixel (k, l) de l'image u_i contribue à l'image de sortie u aux pixels se trouvant dans un voisinage de $\lambda h_{i,j}(k, l)$ avec un poids à déterminer (dépendant de la distance). Typiquement on pourra considérer un poids gaussien.
 7. **Renormalisation**
 8. Si les contributions au pixel (k, l) sont $\omega_1 v_1, \dots, \omega_r v_r$ (où les ω_i désignent les poids) alors la valeur de u en ce pixel sera donnée par $u(k, l) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i v_i}{\sum_{i=1}^r \omega_i}$.
-

de meilleurs résultats en stéréoscopie que les algorithmes travaillant directement sur des *burst* pour obtenir une carte des disparités [14].

Au final, avec ce stage j'ai pu traiter de nombreux aspects du traitement du signal (interpolation, *aliasing*, débruitage, ...). Cet aspect complet du stage a été enrichissant mais parfois difficile à gérer puisqu'il m'a fallu apprendre à avancer pas à pas pour ne pas me perdre dans un flux constant de nouvelles informations ou idées. En particulier, interpréter les résultats et concevoir des expériences a été très délicat puisque les erreurs se mélangent en permanence. D'un point de vue pratique j'ai développé une méthode plus efficace d'expérimentation en utilisant un dépôt *git* et une connexion sur un serveur en *ssh*. Ceci peut paraître anodin mais les expériences étant parfois très longue et nécessitant beaucoup d'espace disque ou de mémoire vive il était essentiel de pouvoir les effectuer sur une machine distante toujours allumée (et disponible).

References

- [1] C. Aguerrebere, J. Delon, Y. Gousseau, and P. Muse. Study of the digital camera acquisition process and statistical modeling of the sensor raw data. 2012.
- [2] A. Buades, Y. Lou, J.M. Morel, and Z. Tang. A note on multi-image denoising. In *Int. Workshop on Local and Non-Local Approximation in Image Processing*, pages 1–15, 2009.
- [3] Antoni Buades, Bartomeu Coll, and Jean-Michel Morel. A review of image denoising algorithms, with a new one. *Multiscale Modeling & Simulation*, 4(2):490–530, 2005.
- [4] Antoni Buades, Gloria Haro, and Enric Meinhardt-Llopis. How to blend several photographs of a painting into one. *IPOL*, PREPRINT 2012.
- [5] Antoni Buades, Yifei Lou, Jean-Michel Morel, and Zhongwei Tang. Multi image noise estimation and denoising. MAP5 2010-19 MAP5 2010-19.
- [6] Miguel Colom and Antoni Buades. Analysis and Extension of the Percentile Method, Estimating a Noise Curve from a Single Image. *Image Processing On Line*, 3:332–359, 2013.
- [7] J. Delon and B. Rougé. Le phénomène d'adhérence en stéréoscopie dépend du critère de corrélation. *GRETSI'01 on Signal and Image Processing*, 2001.
- [8] J. Delon and B. Rougé. Small baseline stereovision. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 28(3):209–223, 2007.

- [9] Gabriele Facciolo, Andrés Almansa, Jean-François Aujol, and Vicent Caselles. Irregular to regular sampling, denoising, and deconvolution. *Multiscale Modeling and Simulation*, pages 1574–1608, 2009.
- [10] Sina Farsiu, Dirk Robinson, Michael Elad, and Peyman Milanfar. Advances and challenges in super-resolution. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 14(2):47–57, 2004.
- [11] Pascal Getreuer. Linear Methods for Image Interpolation. *Image Processing On Line*, 1, 2011.
- [12] L. Igual, J. Preciozzi, L. Garrido, A. Almansa, V. Caselles, and B. Rougé. Automatic low baseline stereo in urban areas. *Inverse Problems and Imaging*, 1(2):319–348, 2007.
- [13] AJ. Jerri. The shannon sampling theorem; its various extensions and applications: A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 65(11):1565–1596, Nov 1977.
- [14] Neel Joshi and C. Lawrence Zitnick. Micro-Baseline Stereo. *Microsoft Research*, 2014.
- [15] Lionel Moisan. Modeling and image processing. *Lecture Notes of ENS Cachan edition*, 2005.
- [16] Lionel Moisan. Periodic plus smooth image decomposition. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 39(2):161–179, 2011.
- [17] Lionel Moisan, Pierre Moulon, and Pascal Monasse. Automatic Homographic Registration of a Pair of Images, with A Contrario Elimination of Outliers. *Image Processing On Line*, 2:56–73, 2012.
- [18] Daniel Potts, Gabriele Steidl, and Manfred Tasche. Fast fourier transforms for nonequispaced data: A tutorial, 2000.
- [19] D. Robinson and P. Milanfar. Fundamental performance limits in image registration. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 13(9):1185–1199, 2004.
- [20] D. Robinson and P. Milanfar. Statistical performance analysis of super-resolution. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 15(6):1413–1428, June 2006.
- [21] N. Sabater, J.M. Morel, and A. Almansa. How accurate can block matches be in stereo vision? *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4:472, 2011.
- [22] D. Scharstein and R. Szeliski. A taxonomy and evaluation of dense two-frame stereo correspondence algorithms. *International Journal of Computer Vision*, 47(47(1/2/3)):7–42, 2002.
- [23] Loic Simon. Truncation error in image interpolation. In *10th international conference on Sampling Theory and Applications (SampTA 2013)*, pages 333–336, Bremen, Germany, July 2013.
- [24] Javier Sánchez Pérez, Nelson Monzón López, and Agustín Salgado de la Nuez. Robust Optical Flow Estimation. *Image Processing On Line*, 3:252–270, 2013.